Senior 2016 - A2 medium - Ludo

Note Title 9/4/2016

(Disuguaglianze)

Riarrangiamento $a_1 \dots a_n$ $b_1 \dots b_n$ reali

$\sum a_i b_{\sigma(i)}$ σ permutazione

$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n$ $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$

$\sum a_i b_i$ è max $\sum a_i b_{n+1-i}$ è min.

Se le disug. sono strette, sono unici; altrimenti no.

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{bmatrix}$$

Funziona anche con più di due "tipi".

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \\ c_1 & \dots & c_n \end{bmatrix}$$

Teo: Se a_i, b_i e c_i sono ordinate nello stesso "verso", la somma $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i$ è massima. Se non lo sono, il risultato è $\leq$ di questo massimo.

$a,b,c \geq 0$

$a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+b^2ac+c^2ba$

$$\begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a^2 & b^2 & c^2 \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}$$

Così, $\sum_{i=1}^{n} x_i^{n+1} \geq x_1 x_2 \cdots x_n (x_1+x_2+\dots+x_n)$

$$\begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ x_1 & & x_n \\ \vdots & & \vdots \\ x_1 & & x_n \end{bmatrix}_{n+1} \geq \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots \\ x_2 & x_3 & \dots \\ x_3 & \vdots & \\ \vdots & x_n & \\ x_n & x_1 & \\ x_1 & x_2 & \end{bmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum_{j\neq i} a_j} \geq \frac{n}{n-1} \qquad \frac{a_1}{a_2+a_3+\dots a_n} + \frac{a_2}{a_1+a_3+\dots+a_n} + \dots + \frac{a_n}{a_1+a_2+\dots a_{n-1}} \geq \frac{n}{n-1}$$

$$S = \sum a_i \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{S-a_i}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \dots & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix}$$

$a_1 \dots a_n$ e $\frac{1}{S-a_1} \dots \frac{1}{S-a_n}$ sono ordinati nello stesso verso

$$\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \dots & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} a_2 & \dots & a_n & a_1 \\ \frac{1}{S-a_1} & \dots & & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix}$$

$$\geq \begin{bmatrix} a_3 & \dots a_n & a_1 & a_2 \\ \frac{1}{S-a_1} & \dots & & \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix}$$

n-1 disug.

$$(n-1)\begin{bmatrix} a_1 & \dots a_n \\ \frac{1}{S-a_1} & \dots \frac{1}{S-a_n} \end{bmatrix} \geq \overbrace{\frac{a_2}{S-a_1} + \dots + \frac{a_1}{S-a_n}}^{n \text{ addendi}} + \overbrace{\frac{a_3}{S-a_1} + \dots + \frac{a_2}{S-a_n}}^{n \text{ addendi}} + \dots + \dots$$

$$+ \frac{a_n}{S-a_1} + \dots + \frac{a_{n-1}}{S-a_n} = \underbrace{\frac{(a_2+a_3+\dots+a_n)}{S-a_1}}_{=1} + \underbrace{\frac{a_3+\dots a_n+a_1}{S-a_2}}_{=1}$$

$$(n-1) \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sum_{j\neq i} a_j} \geq \overbrace{1+1+\dots+1}^{n \text{ volte } 1} = n$$

Chebycheff $\quad \left(\frac{\sum a_i}{n}\right)\left(\frac{\sum b_i}{n}\right) \leq \frac{\sum a_i b_i}{n}$

vale anche con più di due "tipi" $a_i, b_i, c_i \dots$

Cauchy-Schwarz-Buniakowski

$a_i \quad b_i$ reali $\qquad (a_1^2+a_2^2+\dots+a_n^2)^{\frac{1}{2}} \cdot (b_1^2+\dots+b_n^2)^{\frac{1}{2}} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|$

Estensioni di C-S. : anche con più di 2 vettori

$a_i, b_i, c_i \geq 0 \quad (a_1^3 + a_2^3 + \dots + a_n^3)^{\frac{1}{3}} \cdot (\sum b_i^3)^{1/3} (\sum c_i^3)^{1/3} \geq |\sum a_i b_i c_i|$

Con esponenti diversi: (Hölder) : $p, q > 0 \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$(a_1^p + a_2^p + \dots + a_n^p)^{1/p} \cdot (b_1^q + b_2^q + \dots + b_n^q)^{1/q} \geq |a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n|$$

(anche questo con più di 2 vettori)

Quali altri pregi ha C.-S.? Talvolta è usata per "eliminare" frazioni o radicali.

IMO 2001/2 $\quad a, b, c > 0 \quad \sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \geq 1$

$$\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{}}, \frac{\sqrt{b}}{\sqrt[4]{}}, \frac{\sqrt{c}}{\sqrt[4]{}} \right) \left(\sqrt[4]{}, \sqrt[4]{}, \sqrt[4]{} \right)$$

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \right) \cdot \boxed{\left(\sqrt{a^2 + 8bc} + \sqrt{b^2 + 8ac} + \sqrt{c^2 + 8ab} \right)} \geq \left(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} \right)^2$$

$$\underbrace{\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \right)}_{\geq 1^2 ?} \cdot \left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}} \right) \cdot \left(\sum a (a^2 + 8bc) \right) \geq (a + b + c)^3$$

Se $\sum a (a^2 + 8bc) \leq (a + b + c)^3$, ho vinto perché $\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + 8bc}}$ deve essere ≥ 1 perché valga la

$$\sum_{cyc} a(a^2+8bc) \le (a+b+c)^3$$

$$\cancel{a^3}+\cancel{b^3}+\cancel{c^3}+\overset{18/6}{\cancel{24}}abc \le \cancel{a^3}+\cancel{b^3}+\cancel{c^3}+\cancel{3}a^2b+\cancel{3}ab^2+\dots+\cancel{6}abc$$

$$+2abc \qquad\qquad +2abc$$

$$\cancel{8}abc \le \underbrace{(a+b)}_{2}\overset{4}{}\underbrace{(b+c)}_{2}\underbrace{(c+a)}_{2}$$

IMO 2005/3 $\quad x,y,z>0 \quad xyz\ge 1 \quad \sum_{cyc}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge 0$

$$(x^{5/2},y,z) \qquad \left(\frac{1}{x^{1/2}},y,z\right)$$

$$(x^5+y^2+z^2)\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right)\ge(x^2+y^2+z^2)^2$$

$$\frac{1}{x}\le yz$$

$$\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\ge\frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2}+1-1=\frac{\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+\cancel{z^2}-x^5-\cancel{y^2}-\cancel{z^2}}{x^5+y^2+z^2}+\cancel{1}$$

$$\cancel{+1}-1$$

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge 1-\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2}=\frac{x^2-yz}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}\ge\sum_{cyc}\frac{x^2-yz}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}\sum_{cyc}x^2-yz\ge 0.$$

Lemma (Titu) [caso part. di C-S.]

$a_i,b_i>0 \quad \sum\frac{a_i^2}{b_i}\ge\frac{(\sum a_i)^2}{\sum b_i} \qquad b_i=c_i^2 \quad \left(\sum c_i^2\right)\left(\sum\frac{a_i^2}{c_i^2}\right)\ge\left(\sum a_i\right)^2$

$a_i>0 \quad i=1,\dots,6 \quad \sum a_i=7 \quad$ Qual è il min $\sum_{i=1}^{6}\frac{i^2}{a_i}$?

$\sum\frac{i^2}{a_i}\ge\frac{(\sum i)^2}{\sum a_i}=\frac{21^2}{7}=63 \qquad$ C-S. ha uguaglianza se $(a_i)=\lambda(b_i)$

$$(\sqrt{a_i})=\lambda\left(\frac{i}{\sqrt{a_i}}\right)$$

$a_i=\lambda i \quad \underbrace{\sum a_i}_{7}=\lambda\underbrace{\sum i}_{21} \quad \lambda=\frac{1}{3}$

$a_i=\frac{i}{3}$

$$\sum_{c} \frac{x^3}{(x+y)^2} \geq \frac{1}{4} \qquad \sum x = 1$$

Lemma di Titu generalizzato:

$$\sum \frac{x_i^m}{a_i^{m-1}} \geq \frac{\left(\sum x_i\right)^m}{\left(\sum a_i\right)^{m-1}}$$

$$\sum \frac{x^3}{(x+y)^2} \geq \frac{\left(\sum x\right)^3}{\left(\sum (x+y)\right)^2} = \frac{1}{4}$$

$bc = x \quad ca = y \quad ab = z$

$abc = 1$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{3}{2}$$

$$\sum_{cyc} \frac{b^2c^2}{a(b+c)} \geq \frac{\left(\sum bc\right)^2}{\sum a(b+c)} = \frac{\left(\sum x\right)^{\cancel{2}}}{2\cancel{\sum x}} \geq \frac{3\sqrt[3]{\cancel{(abc)^2}}}{2} = \frac{3}{2}$$

Medie

$a_1, \dots, a_n \geq 0$

$$M(s) = \left(\frac{a_1^s + \dots + a_n^s}{n}\right)^{1/s} \quad \text{se } s \neq 0 \qquad \text{AM-GM, HM, QM}$$

$$M(0) = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

(si può fare anche pesata $0 < \lambda_i \leq 1$

$\left(\lambda_1 a_1^s + \lambda_2 a_2^s + \dots + \lambda_n a_n^s\right)^{1/s}$ è crescente con s

$$M_\lambda(0) = a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n}$$

Weitzenbock: a, b, c lati di un triangolo di area A

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3} A$$

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$16A^2 = (a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c) \leq (a+b+c)^4$$

$$4A \leq (a+b+c)^2 = 9 \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 \leq 9 \cdot \left[\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^{\cancel{1/2}}\right]^{\cancel{2}}$$

$a+b+c=1 \qquad a^a b^b c^c + a^b b^c c^a + a^c b^a c^b \leq 1.$

$$\left(a^a b^b c^c\right)^{\frac{1}{\cancel{a+b+c}}} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{a+b+c}$$

$$\left(a^b b^c c^a\right)^{\frac{1}{\cancel{a+b+c}}} \le \frac{ab+bc+ca}{a+b+c}$$

$$\left(a^c b^a c^b\right)^{\frac{1}{\cancel{a+b+c}}} \le \frac{ac+ba+cb}{a+b+c}$$

$$\overline{\text{LHS}} \le \frac{(a+b+c)^2}{a+b+c} = a+b+c = 1$$

(Bunching)

Schur $\quad 1[3,0,0] + 1[1,1,1] \ge 2[2,1,0]$ $\qquad \sum_s a^3 + \sum_s abc \ge 2\sum_s a^2 b$

a,b,c

$$\sum_{cyc} a^r (a-b)(a-c) \ge 0$$

Schur $\quad [a+2b,0,0] + [a,b,b] \ge 2[a+b,b,0] \qquad a,b \ge 0$

$$[a+2b+k,k,k] + [a+k,b+k,b+k] \ge 2[a+b+k,b+k,k]$$

$$\sum \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \qquad [10,1,1] + [6,3,3] \ge 2[8,2,2]$$

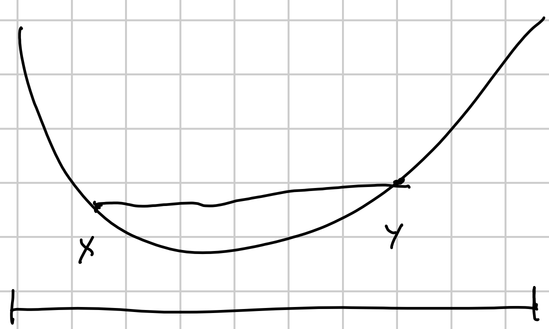
-1

$$[9,0,0] + [5,2,2] \ge 2[7,1,1]$$

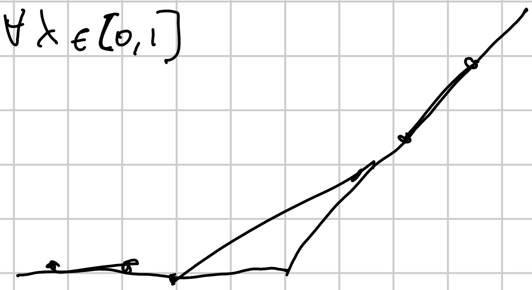
$$\ge 2[7,2,0] \ge 2[7,1,1]$$

$$[10,1,1] + 4[7,5,0] + [6,3,3] \ge 2[6,5,1] + [8,2,2] + [\overset{5?}{6},5,2] + 2[6,4,2]$$

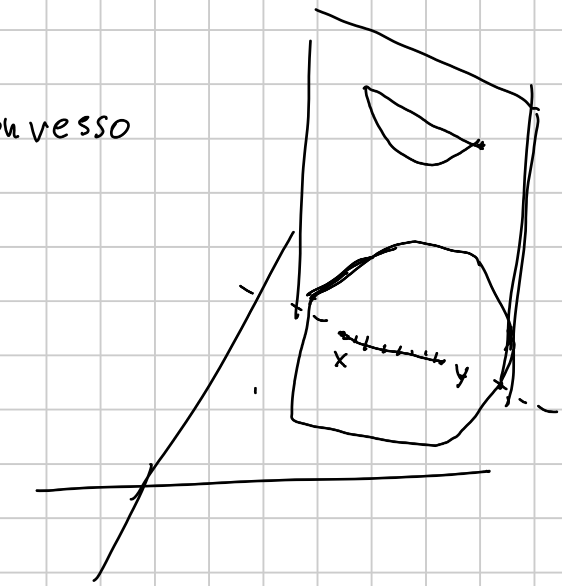
Funzioni convesse :



$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \qquad \forall \lambda\in[0,1]$$



f di due variabili definita su un convesso



Dis. Jensen: $0\le\lambda_i\le 1$ $\sum\lambda_i=1$ se f è convessa,

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2+\dots+\lambda_nx_n)\le \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+\dots+\lambda_n f(x_n)$$

f convessa.

Dis. Karamata Supp. che $(x_i)\succeq(y_i)$

$\sum x_i=\sum y_i$
$x_1\ge y_1$
$x_1+x_2\ge y_1+y_2$
$x_1+x_2+x_3\ge y_1+y_2+y_3$
$\vdots$

Allora $\sum f(x_i)\ge\sum f(y_i)$

x^α $\alpha\ge1$ $x\ge0$ convessa
x^α $0<\alpha<1$ $x\ge0$ concava (stesse disug. con verso opposto)
$\frac{1}{x}$, $\frac{1}{\sqrt{x}}$, $-\log x$

$\sum \lambda_i x_i\ge\prod x_i^{\lambda_i}$

$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{x}}\text{ convessa; pesi } a,b,c\right] \ge \frac{1}{\sqrt{\sum a(a^2+8bc)}}$

omog. $\Rightarrow$ posso supp. $a+b+c=1$

$a=\lambda_1$ $b=\lambda_2$ $c=\lambda_3$ $x_1=a^2+8bc$ $x_2=b^2+8ac$ $x_3=c^2+8ab$ $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$.

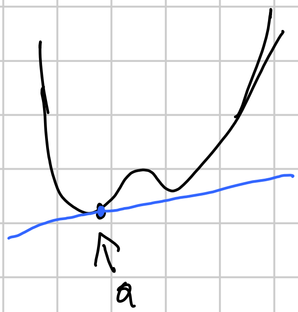
$\iff \sum a(a^2+8bc) \le (a+b+c)^3$

$\sum_c \frac{1}{a+b} \le \sum_c \frac{1}{2a}$ $\qquad f(x)=\frac{1}{x}$ $\qquad a \ge b \ge c$

$\sum_c \frac{a_i^3}{a_{i+1}} \ge \sum a_i^2$ $\qquad a_i = e^{\log x_i}$ $\qquad (a+b,\ a+c,\ b+c) \prec (2a,\ 2b,\ 2c)$

e^x conv. $\qquad 2a \ge a+b$

$2a+2b \ge a+b+a+c$



Trucco della tangente.

Se $f(x) \ge f(a) + f'(a)(x-a)$

$\sum f(x_i) \ge \sum\left[f(a)+f'(a)(x_i-a)\right] = n\left(f(a)+a\cdot f'(a)\right) + f'(a)\cdot\sum x_i$

Piccolo elenco di cose che non vedremo: Newton, MacLaurin, Ravi,

1) Dis. geom.: $a,b,c \ge 0$ $\qquad \underline{a+b+c=abc}$ $\qquad \sum_c \frac{1}{\sqrt{1+a^2}} \le \frac{3}{2}$.

$a=\tan\alpha$

$b=\tan\beta$ $\qquad \sum_c \cos\alpha \le \frac{3}{2}$

$c=\tan\gamma$ $\qquad$ log sin x f. conv.

$$\sum_c \cos\alpha = 1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

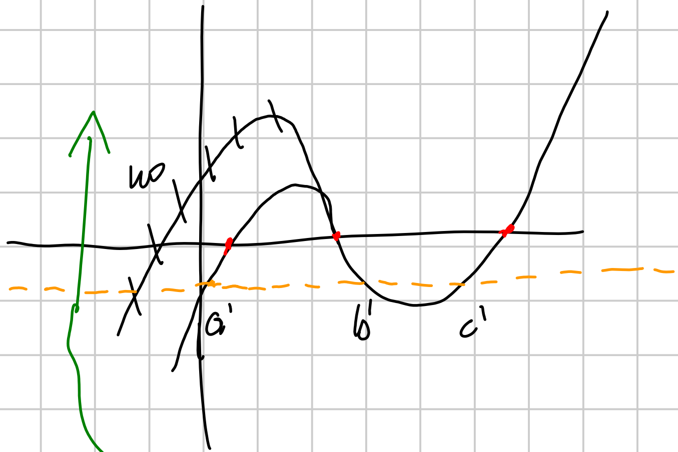
Metodo ABC (o SPQ, o PQR) $\qquad$ Tre variabili $a,b,c \ge 0$

disuguaglianza simmetrica in a,b,c → si può scrivere in termini di $S=a+b+c$, $P=abc$, $Q=ab+bc+ca$ (teo. Newton)

Una funzione simm.ᵗ di grado ≤ 5 in $a,b,c \ge 0$ ha massimo e minimo o dove (almeno) due tra a, b, c sono uguali, o

dove uno (almeno) di essi è 0, (se f è monotona in P)

Costruiamo $g(x)=(x-a)(x-b)(x-c)=x^3-Sx^2+Qx-P$



$\tilde{f}(S,Q,P) =$

$SQ+Q^2+S^4+SP$

$(a,b,c)\to(S,Q,P)$

$(a',b',c')\to(S,Q,P')$

come trovo $P'>P$ (a',b',c'), in cui f è più grande?

Traslo il grafico

→ grafico di $g(x)+k$

le radici di $g(x)+k$, a', b', c', sono t.c.

$(x-a')(x-b')(x-c')=x^3-Sx^2+Qx-P+k$

$$f(a',b',c')=\tilde{f}(S,Q,P-k)=f(S,Q,P)-Sk<f(S,Q,P)$$

Quindi (a,b,c) non è minimo (e se traslo al contrario, non è massimo),

se non posso traslare, una è 0 o due sono uguali.

Così per ogni f simm. in a, b, c, di grado ≤ 8 con il coeff. di P^2 positivo. Es. $(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right)\geq\frac{9}{4}$ IRAN '96.

~~(con normalizzazione)~~

Half-degree principle, teoria dei points of incidence.