SENIOR 2016 – ALGEBRA 3 (Max)

Note Title 05/09/2016

Algebra 3 : → Successioni
→ Eq. Funzionali

SUCC. PER RICORRENZA LINEARI

Succ. di ordine

$$x_{n+1} = a x_n + b \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$x_0 \text{ DATO}$$

Obiettivo : trovare formula generale

1ª idea Bovino pure

$$x_0$$
$$x_1 = a x_0 + b$$
$$x_2 = a^2 x_0 + ab + b$$
$$x_3 = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$$

Idea: $x_n = a^n x_0 + b(1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1})$
$= a^n x_0 + b \dfrac{a^n - 1}{a - 1}$

Congettura: $\boxed{x_n = a^n x_0 + b \dfrac{a^n - 1}{a - 1}}$ Dimostro per induzione

↑ se $a \neq 1$, altrimenti è ancora più banale

2ª idea Facciamo finta che sia $b = 0$ $x_{n+1} = a x_n \rightsquigarrow x_n = x_0 a^n$

Cerco di ridurmi a questa situazione

Pongo $y_n := x_n + \ell$. Vedo cosa risolve y_n:

$$y_{n+1} = \underbrace{x_{n+1}} + \ell = \underbrace{a x_n + b} + \ell = a(y_n - \ell) + b + \ell = a y_n \underbrace{- a\ell + b + \ell}_{\text{scelgo } \ell \text{ in modo che sia } = 0}$$

$$\ell = \frac{b}{a-1} \qquad y_n = y_0 a^n \qquad x_n = y_n - \ell = y_0 a^n - \ell$$

$\rightsquigarrow$ si conclude e si ottiene la formula di prima

$\boxed{3^a \text{ idea}}$ $\qquad x_{n+1} = a x_n + \text{roba}(n)$ $\qquad (n^2+2,\ 2^n,\ n^n)$

Mettiamo di conoscere per qualche motivo $\boxed{\text{UNA}}$ succ. z_n che risolve la ricorrenza

$$z_{n+1} = a z_n + \text{roba}(n)$$

(Magari $z_0 \neq x_0$ e quindi non è la soluz. del probl. dato)

Allora dico che $\boxed{\text{TUTTE}}$ le soluz. della ricorrenza sono del tipo

$$x_n = \boxed{c\, a^n} + \boxed{z_n}$$

costante arbitraria

soluzione generale se roba $(n) \equiv 0$

soluz. speciale che ho

Se questo è vero, allora posso scegliere c in modo da rispettare x_0 come voglio.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Ci sono 2 cose da dim.

(1) Tutte le x_n scritte sopra risolvono la ricorrenza

$$x_{n+1} = c\, a^{n+1} + z_{n+1} = c a^{n+1} + a z_n + \text{roba}(n) = a \overbrace{(c a^n + z_n)}^{x_n} + \text{roba}(m)$$

(2) Tutte le x_n che risolvono la ricorrenza si scrivono come sopra. Sia x_n che risolve, cioè

$$x_{n+1} = a x_n + \text{roba}(n)$$
$$z_{n+1} = a z_n + \text{roba}(n)$$

Chiamo

$$d_n := x_n - z_n$$

e vedo che risolve $\quad d_{n+1} = a d_n \quad \rightsquigarrow \quad d_n = \underset{\overset{\shortparallel}{d_0}}{c}\, a^n$

$$x_n - z_n = c\, a^n \quad \rightsquigarrow \quad x_n = c a^n + z_n$$

Tornando a $x_{n+1} = a x_n + b$ posso cercare una z_n costante che la risolve $z_n \equiv \ell$

$$\ell = a\ell + b \leadsto \ell = \frac{b}{1-a} = z_n$$

$$x_n = c a^n + \frac{b}{1-a}$$ (se conosco x_0 trovo c)

— o — o —

<u>Esercizio</u> $x_{n+1} = 3x_n + n^2$ $\qquad x_n = c\,3^n + z_n$

Provo con z_n = polinomio di 2° grado $\qquad z_n = an^2+bn+c$

Sostituisco

$$\underbrace{a(n+1)^2 + b(n+1) + c}_{z_{n+1}} = \underbrace{3an^2+3bn+3c}_{z_n} + n^2$$

Espando il LHS e uguaglio i coeff. delle potenze di n

$$\begin{cases} a = 3a+1 \\ 2a+b = 3b \\ a+b+c = 3c \end{cases} \leadsto \text{trovo } a, b, c$$

<u>Esercizio</u> $x_{n+1} = 3x_n + 7^n$ $\quad$ Provo $z_n = a\,7^n \leadsto a7^{n+1} = 3a7^n + 7^n$

$\leadsto 7a = 3a+1$

<u>Caso critico</u> : $x_{n+1} = 3x_n + 3^n \leadsto 3a = 3a+1$ ☹

$z_n = an3^n \qquad a(n+1)3^{n+1} = 3an3^n + 3^n$

$a(\cancel{n}+1)3 = 3\cancel{an} + 1 \qquad 3a = 1$

Per approfondire: LEZIONI ANALISI 1 PER MATEMATICA

$\boxed{\text{Ordine 2}}$ (Poi l'ordine n è uguale)

$$x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n + \text{roba}(n)$$

Quando roba $(n) \equiv 0$ la soluzione si ottiene dal pol. caratteristico

$$x^2 - ax - b = 0 \rightsquigarrow \text{radici } \lambda \text{ e } \mu \rightsquigarrow \boxed{x_n = c_1\lambda^n + c_2\mu^n}$$

Se c'è la roba la soluzione è del tipo $x_n = \underbrace{\boxed{c_1\lambda^n + c_2\mu^n}}_{\text{sol. gen. se roba} \equiv 0} + \underbrace{\boxed{z_n}}_{\text{sol. speciale da trovare in qualche modo}}$

Ripasso: perché la formula con roba $\equiv 0$ funziona?

$\boxed{1^a \text{ oss.}}$ Se x_n e y_n sono 2 soluz., allora $x_n + y_n$ è ancora sol.

$\boxed{2^a \text{ oss.}}$ Se x_n risolve e c è una costante, allora $c x_n$ risolve

$\boxed{1^a + 2^a \text{ oss.}}$ Se x_n e y_n risolvono, allora $c_1 x_n + c_2 y_n$ risolve

$\boxed{3^a \text{ oss.}}$ Cerco delle soluz. che siano esponenziali $x_n = k^n$

$$k^{n+2} = a k^{n+1} + b k^n \rightsquigarrow k^2 = ak + b \rightsquigarrow \text{se } k \text{ risolve eq. car.}$$

ho trovato una sol.

$\boxed{4^a \text{ oss.}}$ Chi mi dice che non ci sono altre soluzioni?
Fissati x_0 e x_1, posso trovare c_1 e c_2 in modo che la formula $c_1\lambda^n + c_2\mu^n$ rispetti la ricorrenza e le condizioni x_0 e x_1.
Tutti i valori successivi sono univoc. det. da x_0 e x_1

—o—o—

Riassunto / generalizzazione

→ Per ricorrenze di ordine k non omogenee (cioè con roba (n)) ma lineari

$$x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + \text{roba}(n)$$

la soluzione generale è del tipo

$$x_n = y_n + z_n$$

soluzione qualunque da indovinare

sol. gen. stessa ricorr. ma con roba (n) $\equiv 0$

→ y_n si determina a partire dalle radici del pol. caratteristico.

→ Occhio al caso in cui ci sono radici multiple e al caso in cui la roba (n) contiene un esponenziale che ha come base una radice dell' eq. caratt.

—o—

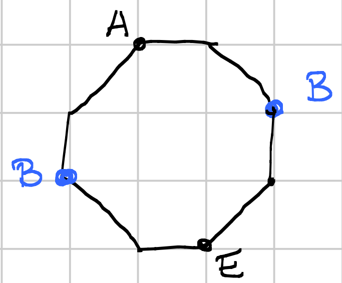
Successioni per ricorrenza escono spesso in comb. induttiva (vedi TI #5)

$\boxed{\text{IMO 1979-6}}$ Trovare quanti sono i percorsi lunghi n che

→ partono da A

→ arrivano in E

→ prima non sono mai stati in E



Detto P_n il numero dei percorsi, intanto $P_{2n+1} \equiv 0$

A_n = percorsi lunghi n che arrivano in A (senza mai passare da E)

B_n = " " " " " " in B (")

Osservo che A_n e B_n sono $\equiv 0$ sui dispari.

Sui pari vale
$$A_{2m+2} = 2A_{2m} + B_{2m}$$
$$B_{2m+2} = 2A_{2m} + 2B_{2m}$$

Tecnica dello shift

$$B_{2m+4} \underset{\substack{\uparrow \\ 2^a \text{ con} \\ \text{shift indici}}}{=} 2A_{2m+2} + 2B_{2m+2} \underset{\substack{\uparrow \\ A_{2m+2} \\ \text{dalla } 1^a}}{=} 4A_{2m} + 2B_{2m} + 2B_{2m+2}$$
$$\underset{\substack{\uparrow \\ A_{2m} \text{ dalla } 2^a}}{=} 2B_{2m+2} - 4B_{2m} + 2B_{2m} + 2B_{2m+2}$$

Concludendo
$$B_{2m+4} = 4B_{2m+2} - 2B_{2m}$$

$x^2 - 4x + 2 = 0 \qquad 2 \pm \sqrt{2}$ ... da cui la formula per B_{2m}.

Dalla formula per B_{2n} trovo quello che serve.

—o—o—

$\boxed{\text{IMO 2005-4}}$ $\quad a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$

Per ogni primo p esiste $n \in \mathbb{N}$ t.c. $p \mid a_n$

$a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1^n$ Caso speciale di una ricorrenza di ordine 4 le cui radici del polinomio caratteristico sono $1, 2, 3, 6$

$a_{n+4} = \alpha a_{n+3} + \beta a_{n+2} + \gamma a_{n+1} + \delta a_n \qquad x^4 - \alpha x^3 - \beta x^2 - \gamma x - \delta = 0$ ha come radici $1, 2, 3, 6$

Inoltre non ho problemi a calcolare a_0, a_1, a_2, a_3

Oss. chiave: $a_{-1} = 0$ e quindi sarà 0 modulo tutti i p

Altra osservazione: la formula modulo p è periodica se $p \neq 2, 3$ perché le potenze sono periodiche, quindi a_{-1} prima o poi ritorna

Capito questo, possiamo fare un'altra soluzione: le potenze ciclano con periodo $p-1$, quindi

$$0 \leftrightarrow p-1$$
$$-1 \leftrightarrow p-2$$

Considero $n = p-2$. $\quad a_{p-2} = 2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$

Moltiplico per 6: $\quad 6\, a_{p-2} = 3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} - 6$

$$\equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod p$$

Se $p \neq 2, 3$ $\quad p \mid a_{p-2}$

Più "brutal mode" $\quad 2^{p-2} = \frac{2^{p-1}}{2} \equiv \frac{1}{2} \pmod p$

Controllare $p=2$ e $p=3$ a mano

$$a_{p-2} \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1$$

Oss. Le formule per le ricorrenze valgono anche modulo p, ma ovviamente le radici del pol. caratteristico vanno trovate mod p.

— o — o —

EQUAZIONI FUNZIONALI

EQ. CAUCHY $\quad f(x+y) = f(x) + f(y)$

- Se cerco soluzioni $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ trovo solo le funz. lineari

$$f(x) = \lambda x \qquad \lambda = f(1)$$

Dim. $\to f(0) = 0$ $\quad$ Pongo $\lambda = f(1)$
$\to f(m) = \lambda m \quad \forall m \in \mathbb{N}$ $\quad$ (induzione)
$\to f(n) = \lambda n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$ $\quad$ ($y = -x$ e vedo che è dispari)
$\to f(mx) = m f(x) \quad \forall m \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ $\quad$ (induzione)
$\to$ Se $x = \frac{p}{q}$, allora $f(q \cdot x) = q f(x)$

$$f(q\cdot x) = f(p) = \lambda p \rightsquigarrow f(x) = \lambda \frac{p}{q}$$

- Se cerco soluzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, allora ce ne sono anche di orribili, ma sono soltanto le solite $f(x) = \lambda x$ se so qualcosa in più, a scelta tra
  - $\to$ f è monotona
  - $\to$ f è continuità
  - $\to$ f è loc. limitata dall'alto o dal basso
  - $\to$ esiste un rettangolo nel piano che non contiene al suo interno p.ti del grafico di f

    (questo dice che le altre soluzioni sono davvero orribili)

Le soluzioni orribili si ottengono con le basi di HAMEL.

$\boxed{\text{BASI DI HAMEL}}$ Un sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}$ si dice

- un insieme di generatori se ogni numero reale x è comb. lin. finita a coeff. in $\mathbb{Q}$ di elem. di B, cioè si scrive come

$$x = q_1 b_1 + \dots + q_k b_k \qquad q_1, \dots, q_k \in \mathbb{Q} \quad (k \text{ dipende da } x)$$
$$b_1, \dots, b_k \in B$$

- un insieme linearmente indipendente se l'unica comb. lin. di el. di B a coeff in $\mathbb{Q}$ che fa 0 è quella con tutti i coeff. nulli, cioè

$$q_1 b_1 + \dots + q_k b_k = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1 = \dots = q_k$$

Def. Una base di Hamel è un qualunque sottoinsieme $B \subseteq \mathbb{R}$ che sia un insieme di generatori e linearmente indip.

Esercizio facile Per ogni $x \in \mathbb{R}$, la scrittura come comb. lin. di el. di B è UNICA

Dim.: se ne avessi due DIVERSE, portando dalla stessa parte avrei una scrittura di 0 non banale.

$\boxed{\text{Teorema difficile}}$ Esistono delle basi di Hamel in $\mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Basi di Hamel ed eq di Cauchy}}$ Data una $B \subseteq \mathbb{R}$ base di Hamel scelgo un numero reale λ_b per ogni $b \in B$.
Dato $x \in \mathbb{R}$, lo scrivo come

$$x = q_1 b_1 + \dots + q_k b_k \quad \text{e pongo} \quad f(x) = q_1 \lambda_{b_1} b_1 + \dots + q_k \lambda_{b_k} b_k$$

Si verifica che questa risolve la Cauchy (esercizio!)

Dim $y = \bar{q}_1 b_1 + \dots + \bar{q}_k b_k$ (posso supporre di usare gli stessi b_i per scrivere x e y)

Ma allora

$$(x+y) = (q_1+\bar{q}_1) b_1 + \dots + (q_k+\bar{q}_k) b_k$$

$$f(x+y) = (q_1+\bar{q}_1) \lambda_{b_1} b_1 + \dots + (q_k+\bar{q}_k) \lambda_{b_k} b_k$$

$$= f(x) + f(y)$$

— o — o —

Esercizio Le soluzioni ottenute con la base di Hamel sono tutte

— o — o —

Esercizio Esistono $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
periodiche tali che

$$f(x) + g(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

(Quando uno lo risolve ha capito la base di Hamel).

— o — o —

$\boxed{\text{VARIANTI DELLA CAUCHY}}$

- $f(x+y) = f(x) + f(y) + a$ ← numero dato

$$\underbrace{f(x+y)+a}_{g(x+y)} = \underbrace{f(x)+a}_{g(x)} + \underbrace{f(y)+a}_{g(y)}$$

$$\rightsquigarrow g(x) = \lambda x \quad \rightsquigarrow \quad f(x) = \lambda x - a$$

- $f(x+y+a) = f(x) + f(y)$

$$f(\overbrace{x+a}^{z} + \overbrace{y+a}^{w} - a) = f(x+a-a) + f(y+a-a)$$

$f(z+w-a) = f(z-a) + f(w-a) \qquad g(x) := f(x-a)$

$\leadsto g(x) = \lambda x \leadsto f(x) = g(x+a) = \lambda(x+a) = \lambda x + \lambda a$

- $f(x+y+a) = f(x) + f(y) + b$

Metto insieme le 2 idee precedenti

- $f(x+y) = f(x+a) + f(y)$

$y = w+a \leadsto f(x+w+a) = f(x+a) + f(w+a)$
In alternativa
$x+a = w \leadsto f(w+y-a) = f(w) + f(y) \leadsto$ come prima

- $f(x+y) = f(x) \cdot f(y) \leadsto$ le soluzioni sono del tipo $f(x) = \lambda^x$ (su $\mathbb{Q}$)

[Dim.: volendo si ripercorre la strada della dim. originaria

$\leadsto$ se $f(0) = 0$ allora $f(x) \equiv 0$, altrimenti $f(0) = 1$ e posto $f(1) = \lambda$ conquisto $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$

In alternativa dimostro in qualche modo che $f(x) > 0$ sempre e poi prendo $g(x) : \log_\lambda f(x)$

$g(x+y) = \log_\lambda f(x+y) = \log_\lambda f(x) + \log_\lambda f(y) = g(x) + g(y)$]

- $f(x \cdot y) = f(x) + f(y) \leadsto f(x) = \log_\lambda x$

- $f(xy) = f(x) \cdot f(y) \leadsto f(x) = x^\lambda$

— o — o —

NORDIC 1998 $\quad f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}.$$

- $P(0,0)$: $\quad 2f(0) = 4f(0) \rightsquigarrow f(0) = 0$
- $P(0,y)$: $\quad f(y) + f(-y) = 2f(y) \rightsquigarrow f(y) = f(-y) \Rightarrow$ PARI

Pongo $\lambda = f(1)$

- $P(x,x)$: $\quad f(2x) = 4f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad (f(2) = 4\lambda)$

(sembra ragionevole che le soluz. sono $f(x) = \lambda x^2$)

- $P(2x,x)$: $\quad f(3x) + f(x) = 2f(2x) + 2f(x)$

$$= 8f(x) + 2f(x)$$

$$\rightsquigarrow f(3x) = 9f(x)$$

$\rightsquigarrow$ per induzione $\quad f(nx) = n^2 f(x) \quad$ (sistema $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$ essendo pari)

Ora uso $x = \frac{p}{q}$ e $n = q$

$$\lambda p^2 = f(p) = f\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = q^2 f\left(\frac{p}{q}\right) \rightsquigarrow f\left(\frac{p}{q}\right) = \lambda \left(\frac{p}{q}\right)^2.$$

— o — o —

INIETTIVITÀ E SURGETTIVITÀ

Come si comportano per composizione?

$g(f(x))$

- $\to$ Se f e g sono iniettive, allora la comp. è iniettiva
- $\to$ f e g surg, allora la composizione è surg.
- $\to$ Se $g(f(x))$ è iniettiva, allora $f(x)$ lo è
- $\to$ Se $g(f(x))$ è surgettiva, allora $g(x)$ lo è

Lo stesso vale se ho composizione di k funzioni. Da in./surg. della comp., posso dedurre solo info. sulla + interna o esterna.

<u>Esercizio</u> Fornisci esempi in cui f iniettiva
g non iniettiva
$g(f(x))$ iniettiva

e idem per surgettività

<u>Esercizio</u> $f(x+y) = f(f(x)) + f(f(y))$ $\quad f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

$P(x,0)$: $f(x) = f(f(x)) + f(f(0))$
$P(0,y)$: $f(y) = f(f(y)) + f(f(0))$

$$f(x+y) = \underbrace{f(x)}_{} + \underbrace{f(y)}_{} - 2f(f(0)) \rightsquigarrow \text{affini}$$

<u>Esempio 1</u> $f(xf(y) + f(x)) = 2f(x) + xy$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ci sono x e y fuori $\rightsquigarrow$ sfruttabili per iniett. e surg.

$P(1,y)$: $f(f(y) + f(1)) = \underbrace{2f(1) + y}_{\text{surg. / iniett.}}$

$\Rightarrow f$ (pensata come esterna) è surgettiva
$\Rightarrow f$ " " interna è iniettiva

Prendo $x_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(x_0) = 0$

$P(x_0, y)$: $f(x_0 f(y)) = x_0 y$
$P(x, x_0)$: $f(f(x)) = 2f(x) + x x_0$
$P(x_0, x_0)$: $f(0) = x_0^2$

poco utili

$P(0,y)$: $f(f(0)) = 2f(0)$

$P(x,0)$: $f(xf(0)+f(x)) = 2f(x)$

Se uno sapesse che $f(0)=0$ $\rightsquigarrow$ $f(f(x)) = 2f(x)$

$f(y) = 2y$

essendo f surgettiva y è un qualunque numero reale.

$P(x_0,0)$: $f(x_0 f(0)) = 0$ ma per iniettività $x_0 f(0) = x_0$

quindi $\to f(0) = 1$ oppure $x_0 = 0$.

D'altra parte sapevamo che $f(f(0)) = 2f(0)$

$f(1) = 2$

$f(0) = x_0^2$ · se fosse $f(0) = 1$ avremmo $x_0^2 = 1$

$\rightsquigarrow$ $x_0 = 1$ oppure $x_0 = -1$

(vedi fondo file)

ci stiamo perdendo...

— o — o —

Esercizio 2 $f(f(x)-y) = 2x + f(f(y)-x)$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$P(x, f(x))$: $f(0) = 2x + f(f(f(x))-x)$

$f(\text{mostro}) = \underbrace{f(0) - 2x}_{\text{surg.}}$ $\Rightarrow$ f surgettiva

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0) = 0$

$P(x_0, x_0)$: $f(-x_0) = 2x_0 + f(-x_0)$ $\rightsquigarrow$ $x_0 = 0$

$P(x,x)$: $f(\cancel{f(x)-x}) = 2x + f(\cancel{f(x)}-x)$

$\rightsquigarrow$ impossibile

Aggiunto dopo video: il testo corretto (facile e istruttivo) è

$f(f(x)+y) = 2x + f(f(y)-x)$

segno +

Esercizio 3 $\quad f(f(x)+y) = f(x^2-y)+4yf(x) \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Provare a rendere uguali due f: $\quad f(x)+y = x^2-y$

$2y = x^2 - f(x)$

$P\left(x, \frac{x^2-f(x)}{2}\right) \quad \cancel{f(\ldots)} = \cancel{f(\ldots)} + 4\,\frac{x^2-f(x)}{2}\,f(x)$

$f(x)=0$ oppure $f(x)=x^2$. Bisogna escludere il "mistone"

Supponiamo che $f(a)=0 \quad a\neq 0$

$f(b)=b^2 \quad b \neq 0$

Sostituisco e vedo che succede

$P(a,b)$: $\underset{=b^2}{f(b)} = f(a^2-b) \rightsquigarrow f(a^2-b) = b^2$

Due casi $\quad 0 = b^2 \rightsquigarrow b=0$

$(a^2-b)^2 = b^2$

$a^4 - 2a^2b + \cancel{b^2} = \cancel{b^2}$

$a^2(a^2-2b)=0$

$a^2 = 2b$

Se esiste un $b\neq 0$ t.c. $f(b)=b^2$, allora l'unico valore a t.c. $f(a)=0$ risolve $a^2=2b$.

Tutti i valori tranne $\pm\sqrt{2b}$ devono andare nel quadrato

Ci sono al max 3 valori di a t.c. $f(a)=0$ e questi 3 valori devono risolvere $a^2=2b$ per tutti gli altri b.

Assurdo.

—o—o—

$\boxed{\text{IMO } 1996-6}$ $\quad f(x-f(y)) = f(f(y)) + xf(y) + f(x) - 1$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$P(f(y),y)$: $\quad f(0) = 2f(f(y)) + f(y)^2 - 1$

$\leadsto f(f(y)) = \frac{f(0)+1}{2} - \frac{1}{2}f(y)^2$

$\leadsto f(x) = k - \frac{1}{2}x^2$ Potremmo farlo se fosse surgettiva

Se fosse surgettiva, sarebbe questa, ma allora non sarebbe surgettiva

$P(f(z),y): \; f(\boxed{f(z)-f(y)}) = f(f(y)) + f(z)f(y) + f(f(z)) - 1$

$= k - \frac{1}{2}f(y)^2 + f(z)f(y) + k - \frac{1}{2}f(z)^2 - 1$

$= f(0) - \frac{1}{2}\left[\boxed{f(z)-f(y)}\right]^2$

$f(x) = f(0) - \frac{1}{2}x^2$ per ogni x che è diff. di due immagini

Resta da dim. che ogni reale è diff. di due immagini

Se $f(x) \equiv 0$ non va bene, quindi $\exists\, y_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(y_0) \neq 0$

$P(x, y_0): \; f(x - f(y_0)) = f(f(y_0)) + x f(y_0) + f(x) - 1$

$f(x - f(y_0)) - f(x) = \underbrace{f(f(y_0)) - 1 + x f(y_0)}_{\text{reale qualunque}}$

—o —o —

$\boxed{\text{BMO 2007-2}}$ $f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4y f(x)$

$f(x) \equiv 0$ è una soluzione

$P(x, f(x)): \; f(2f(x)) = f(0) + 4f(x)^2$ $\quad f(z) = f(0) + z^2$ per ogni $z \in 2\,\text{Im}$.

$\boxed{y = 2f(z) - f(x)}$ $f(2f(z)) = f(2f(x) - 2f(z)) + 8f(z)f(x) - 4f(x)^2$

$$f(0)+4f(z)^2 = f(2(f(x)-f(z))) + 8f(z)f(x) - 4f(x)^2$$

$$\rightsquigarrow f(2(f(x)-f(z))) = f(0) + 4[f(x)-f(z)]^2$$

$$\rightsquigarrow f(y) = f(0)+y^2$$ per ogni y che $2(\mathrm{Im}-\mathrm{Im})$

Basta che surgettività di $\mathrm{Im}-\mathrm{Im}$.

— o — o —

$$f(x)^2 + 2y f(x) + f(y) = f(y+f(x))$$

$P(x,0) = f(x)^2 + f(0) = f(f(x))$ $\qquad$ $f(z) = f(0)+z^2$ sull'immagine

$y=-f(z)$: $f(x)^2 - 2f(x)f(z) + f(-f(z)) = f(f(x)-f(z))$

$\parallel \leftarrow$ se fosse pari

$f(f(z))$

$\parallel$

$f(0)+f(z)^2$

$y=-f(x)$: $f(x)^2 - 2f(x)^2 + f(-f(x)) = f(0)$

$$\boxed{f(-f(x)) = f(0)+f(x)^2}$$

— o — o —

Aggiunto dopo video: BACK to esercizio 1 (più difficile del previsto)

1. $P(1,y) \Rightarrow$ iniettiva e surgettiva. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_0)=1$
2. $P(x_0,0) \Rightarrow f(x_0 f(0)) = 0 \Rightarrow$ per iniettività $x_0 f(0) = x_0 \Rightarrow$ $f(0)=1$ / $x_0=0$
3. Se $x_0=0$, allora $f(x)=2x$, ma questa non verifica, quindi $f(0)=1$
4. $P(x_0,x_0) \Rightarrow x_0^2 = 1 \Rightarrow x_0 = \pm 1$
5. $P(0,y) \Rightarrow f(1)=2$, quindi $x_0=-1$
6. Dovrebbe potersi dimostrare che $f(z)=z+1$ per ogni $z\in\mathbb{Z}$.
7. $P(x,-1) \Rightarrow f(f(x)) = 2f(x)-x$
8. $P(x,-2) \Rightarrow f(f(x)-x) = 2(f(x)-x)$
9. Scelto z t.c. $f(z) = f(x)-x$, confrontando 7 e 8 ottengo che $z=0$, quindi $f(x)=x+1$.