Senior 2016 - C1 Medium (Anér)

Note Title 9/2/2016

Permutazioni

<u>Def</u> Una perm. è una funzione bigettiva

$$\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$$

<u>Composizione</u> Se σ e τ sono permutazioni su $\{1, \ldots, n\}$, anche $\sigma \circ \tau$ lo è

$$\sigma \circ \tau : \{1, \ldots n\} \to \{1, \ldots n\}$$

$$\sigma \circ \tau (i) = \sigma(\tau(i))$$

S_n = insieme delle perm. su $\{1, \ldots n\}$

In S_n c'è l'identità, $\forall \sigma \in S_n$ c'è l'inversa di σ, vale a dire $\sigma^{-1} \in S_n$

$$\sigma^{-1}(\sigma(i)) = i \qquad \forall i \in \{1, \ldots n\}$$

<u>Esempio</u> $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ $n=5$

Decomposizione in cicli

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (2\ 6\ 4\ 5\ 3)(1)$$

$$\sigma(2) = 6 \qquad \sigma(6) = 4 \qquad \sigma(4) = 5 \qquad \sigma(5) = 3$$

Composizione di trasposizioni

Una trasposizione è una perm. che fissa tutti gli elementi di $\{1, \dots n\}$ tranne due, i e j, che vengono scambiati

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

<u>Fatto</u> Ogni permutaz. si può ottenere componendo alcune trasposizioni

Segno di una perm

Data $\sigma \in S_n$

poniamo
$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j} = \pm 1$$

<u>OSS</u>
$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma \circ \tau(i) - \sigma \circ \tau(j)}{i - j} =$$

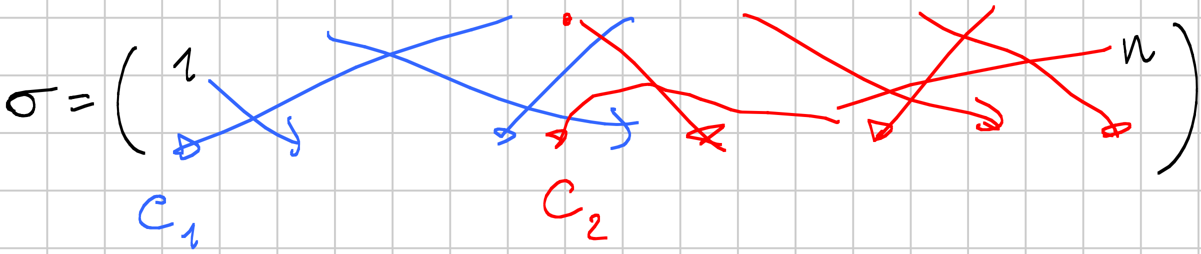
$$= \prod_{1\le i<j\le n} \left(\frac{\sigma\circ\tau(i) - \sigma\circ\tau(j)}{\tau(i)-\tau(j)} \cdot \frac{\tau(i)-\tau(j)}{i-j} \right) =$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n} \Bigg(\underbrace{\frac{\sigma(\tau(i)) - \sigma(\tau(j))}{\tau(i)-\tau(j)}}_{\parallel \atop \frac{\sigma(j')-\sigma(i')}{j'-i'}} \Bigg) \cdot \operatorname{sgn}(\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot \operatorname{sgn}(\tau)$$

con $i' = \tau(i)$ $\quad j' = \tau(j)$

non importa quale tra i' e j' è maggiore

Sia ora $\sigma = C_1 \circ C_2 \circ C_3 \circ \dots \circ C_k$



$|C_i|$ = lunghezza del ciclo C_i

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{i=1}^{k} \operatorname{sgn}(C_i) = \prod_{i=1}^{k} (-1)^{|C_i|-1} =$$

$$= (-1)^{\left(\text{parità del numero di cicli di lungh. pari nella decomposizione}\right)}$$

Se $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_h$ trasposizioni

Allora $(-1)^h = \operatorname{sgn}(\sigma)$

Segno di un ciclo

1 2 3 4 5 6 7

è un ciclo di lunghezza dispari

1 2 3 4 5 6 =

$$= (1\ 2)(2\ 4)(4\ 5)(5\ 3)(3\ 6)$$

$$\left((2\ 4)(1\ 2) \right)$$

GIOCO DEL 15

12	13	4	5
11	1	3	$\boxed{6}$
14	10	$\boxed{2}$	$\boxed{7}$
15	9	8	

$\longrightarrow$

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	

$\downarrow$ 1ª mossa

–	–	–	
		3	6
		2	$\downarrow$
		8	7

2ª mossa $\longrightarrow$

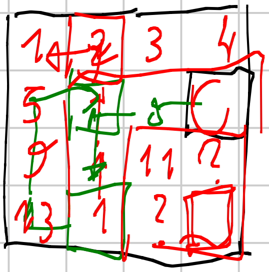
–	–	–	
	1	3	6
	10		$\rightarrow$ 2
	9	8	7

Ogni mossa è una trasposizione

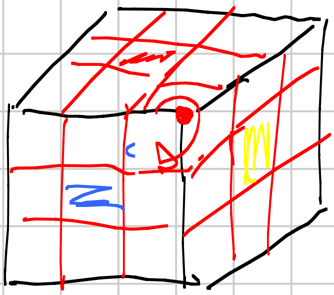
⇒ Il segno della permutazione iniziale determina la parità del n° di mosse di una strategia

La posizione vuota cambia "colore" B/N ad ogni mossa ⇒ il colore iniziale determina // // / /

Se i due invarianti mod 2 concordano, esiste una strategia

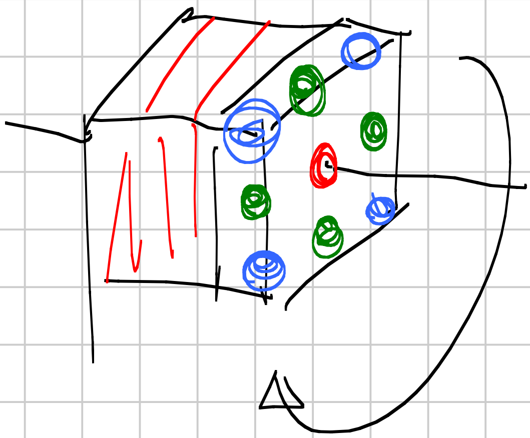


CUBO DI RUBIK



- Definire un invariante facilmente calcolabile
- verificare che non varia durante le mosse

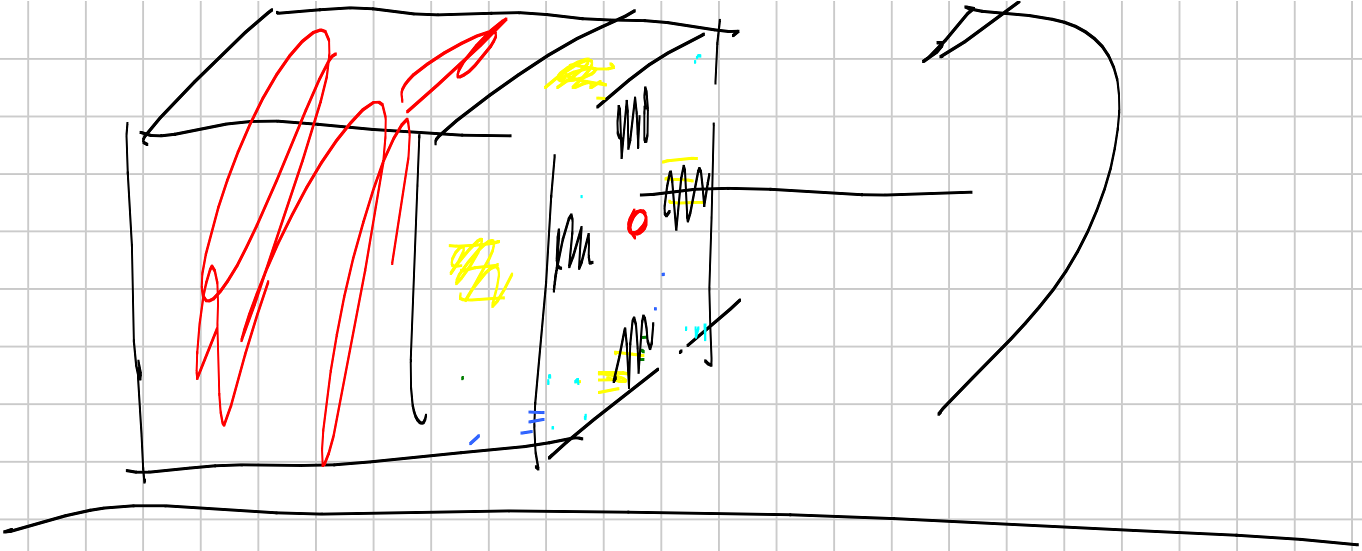
Una mossa del cubo di Rubik permuta i cubetti permuta anche le facce

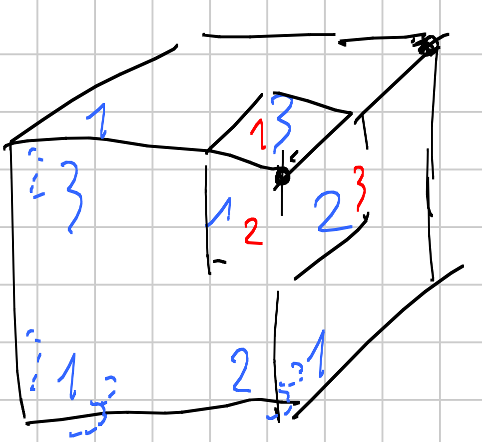


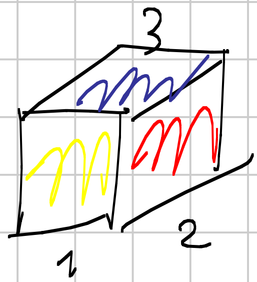
90°

Il segno di una mossa come perm. dei (27) cubetti è +1.
i invarianti Sono rispettare questo segno.

Permutazione sulle facce degli spigoli   La permutazione è pari (ha due cicli length 4)

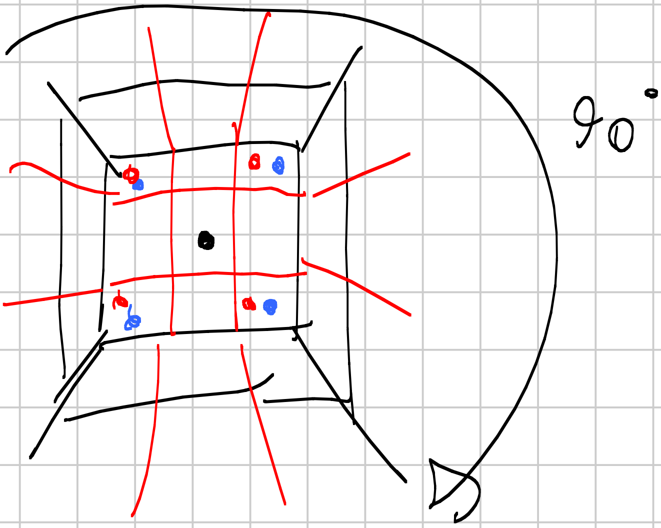






Numero le facce di ogni cubetto d'angolo da 1 a 3 in senso antiorario. Numero gli angoli intorno ai vertici del cubo "fantasma" da 1 a 3 in senso antiorario

In ogni vertice, − (mod 3) non dipende da quale delle 3 facce uso per il calcolo



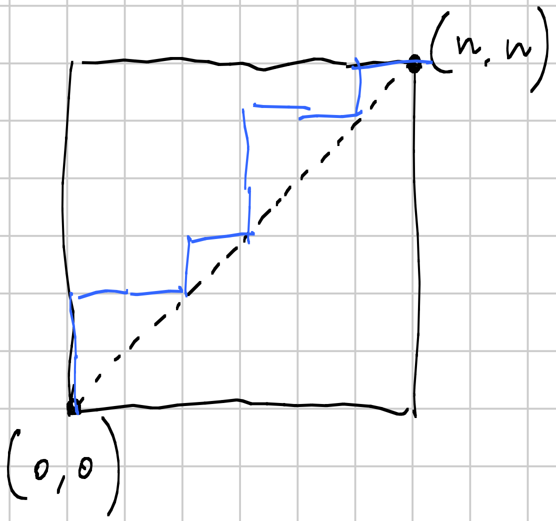
NUMERI DI CATALAN

① Ho n parentesi aperte e chiuse e voglio disporle in modo che, a partire da sinistra, non ci siano mai più parentesi chiuse che aperte

$n=4$ ()(()()) ok ())()(() NO

In quanti modi posso disporre le parentesi?

② Formulazione 2



Quadrato $n \times n$

Andare da $(0,0)$

a (n,n)

con $n \uparrow$

e $n \rightarrow$ (fin qui $\binom{2n}{n}$ modi), con l'ulteriore condizione di non scendere mai sotto la diagonale.

Chiamiamo C_n il numero cercato nei problemi (equivalenti) ① e ②.

RICORSIONE

Lavoriamo con le parentesi

La prima parentesi è necessariamente aperta.

$$\Big(\ \underbrace{(\ )\quad\quad(\ )}\ \Big)\ \underbrace{((\,))\,(\ )}$$

prima aperta

qui ci sono i coppie complete di parentesi, i compresa tra 0 e $n-1$

chiusura della prima aperta

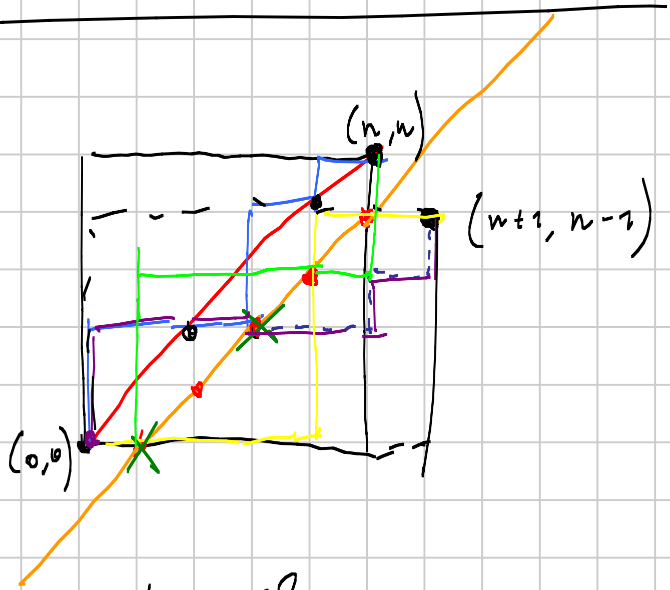
qui ci sono $n-i-1$ coppie di parentesi

Quante possibilità ho con un certo i?

$$C_i \cdot C_{n-i-1}$$

Quante in tutto? $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-i-1}$

Altro approccio



In tutto (potendo passare sotto la diagonale) ho $\binom{2n}{n}$ possibilità.

Quante di queste sono "cattive"?

Dato un percorso cattivo, scegliamo il suo primo punto rosso (×), riflettiamo il tratto dopo × rispetto alla retta ╱╱╱, e arriviamo in $(n+1, n-1)$ in uno dei

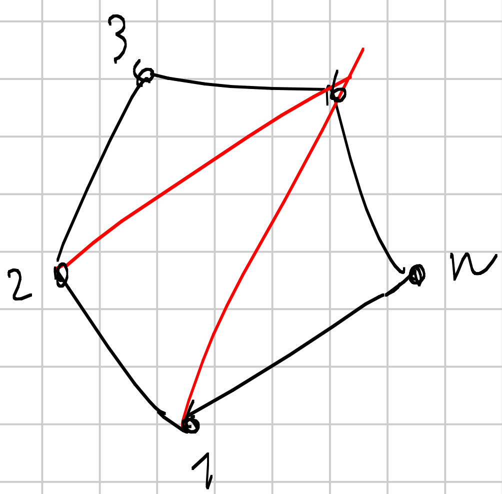
$\binom{2n}{n-1}$ modi possibili con $n+1 \to$ e $n-1$ ↑

$$\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

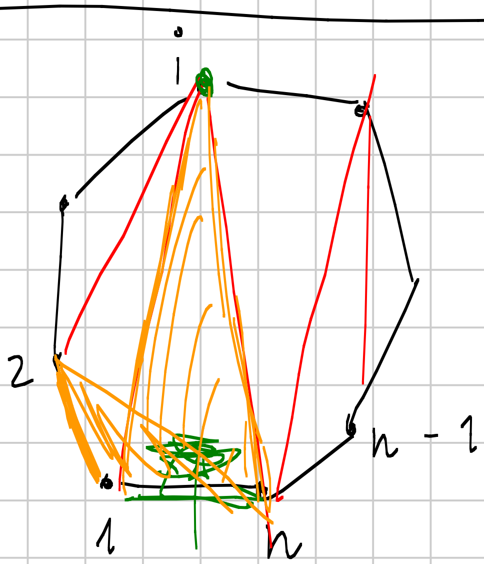
$$\binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n-1)!\,(n+1)!} = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{n!\cdot n!}\cdot\frac{n}{n+1}$$

TRIANGOLAZIONI

Abbiamo un n-agono convesso ($n \geq 3$) e vogliamo triangolarlo, cioè tracciare $n-3$ diagonali che non si intersechino intern. tra loro e lo dividano in $n-2$ triangoli. Quanti modi?



Sia T_n la risposta



Data una Triangolazione, il triangolo contenente il lato $1 - n$ contiene un terzo vertice i, per un certo i tra 2 e $n-1$

Se voglio il triangolo $\widehat{1-i-n}$, ho $T_i \cdot T_{n-i+1}$

$T_3 = 1$ $\quad T_2 = 1$ per convenzione

$$T_n = \sum_{i=2}^{n-1} T_i \cdot T_{n-i+1}$$

$i = j+2$

j va da 0 a $n-3$

$$T_n = \sum_{j=0}^{n-3} T_{j+2} \cdot T_{n-j-1}$$

$T_n = C_{n-2}$ per induzione (controllare valori piccoli + stessa ricorsione).

Stirling (di nuovo sulle permutazioni)

Quante sono le permutazioni su n elementi con esattamente K cicli? La risposta è $\begin{bmatrix} n \\ K \end{bmatrix}$, cioè il n° di Stirling di prima specie di indici n e K.

$\begin{bmatrix} n+1 \\ K \end{bmatrix}$ = qualcosa che coinvolge i valori precedenti

Data una perm. $\sigma \in S_{n+1}$ σ con K cicli

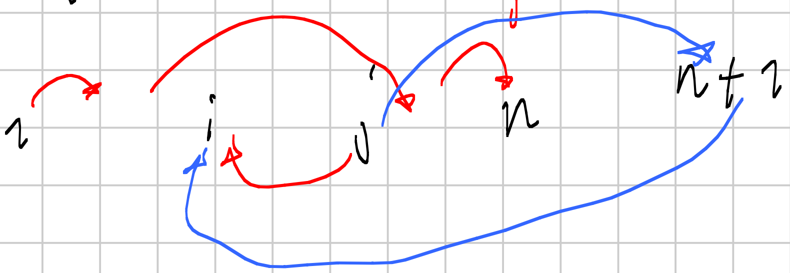
Come è fatto il ciclo di σ che contiene $n+1$?

1° caso | $n+1$ è un punto fisso di σ. Allora $(n+1)$ è uno dei k cicli, $\{1, \dots n\}$ si permutano tra loro tramite $k-1$ cicli.

$$\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \text{ possibilità.}$$

2° caso | $\sigma(n+1) = i < n+1$ $\quad \sigma^{-1}(n+1) = j < n+1$

Definisco $\tilde{\sigma}$ come σ su tutto $\{1, \dots n\}$ tranne j, e $\sigma(j) = i$. $\tilde{\sigma} \in S_n$. σ ha k cicli (sostanzialmente gli stessi di prima). Viceversa, data una $\tau \in S_n$ con k cicli, posso definire $\tilde{\tau}$ assegnando a $n+1$ un'immagine $\tilde{\tau}(n+1) = i < n+1$ e poi modifico $\tilde{\tau}(\underbrace{\tau^{-1}(i)}_{j}) = n+1$



$$n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \text{ possibilità}$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

Magia $\quad sym_\ell^h(x_1, \dots x_\ell) = \sum_{1 \le i_1 < \dots < i_h < \ell} x_{i_1} \cdot \ldots \cdot x_{i_h}$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \mathrm{sym}^{n-k}_{n-1}(1, 2, \dots, n-1)$$

Numeri di Stirling di 2ª specie.

Abbiamo un insieme con n elementi $\{1, \dots n\}$

In quanti modi possiamo partizionarlo in k sottoinsiemi (non vuoti)? In $\left\{ {n \atop k} \right\}$ modi

Prendo $\{1, \dots, n+1\}$. Ci sono 2 casi.

1° caso | $n+1$ sta da solo, gli altri n stanno in $k-1$ insiemi.

$$\left\{ {n \atop k-1} \right\}$$

2° caso | $n+1$ non è solo. Lo tolgo e ottengo una partizione in k parti $\overbrace{\text{di}}^{\text{non vuote}}$ $\{1, \dots n\}$.

Viceversa, se divido $\{1, \dots n\}$ in k parti, e scelgo in quale mettere $n+1$, ottengo una partizione in k parti di $\{1, \dots n+1\}$

$$k \cdot \left\{ {n \atop k} \right\}$$

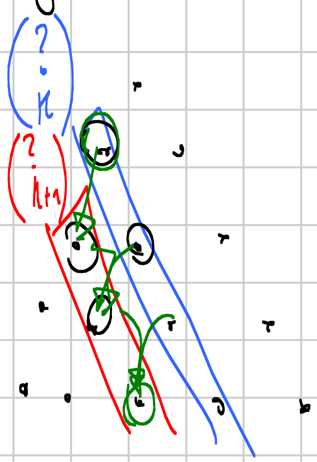
IN TOTALE

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = \left\{ {n \atop k-1} \right\} + k \cdot \left\{ {n \atop k} \right\}$$

Curiosità $\sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} = B_n$ l'n-esimo numero di Bell.

Calcolare "cose del tipo $\sum_{i=1}^{n} i^k$". $k \geq 0$, $n \geq 0$

Sarebbe più facile calcolare $\sum_{i=1}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$



OSS I binomiali sono polinomi (nel numeratore, fissato il denominatore)

Es $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}$ è un pol. in n di grado K.

Scrivo anche $\binom{x}{k} \in \mathbb{Q}[x]$. Se riesco a scrivere

$$x^k = a_0 \cdot \binom{x}{0} + a_1 \binom{x}{1} + \ldots + a_k \binom{x}{k}$$

Con opportuni numeri $a_0 \dots a_K$,

$$\sum_{x=1}^{n} x^K = \sum_{x=1}^{n} \sum_{h=0}^{K} a_h \binom{x}{h} = \underbrace{\sum_{h=0}^{K} a_h \binom{n+1}{h+1}}$$

è un polinomio di grado $K+1$ in n

$$x^3 = a \cdot x + b \cdot (x+1) + c \cdot 1 + d(x^3 + x^2)$$

$\underline{K=1}$ $$x = \binom{x}{1} = 1 \cdot \binom{x}{1} + 0 \cdot \binom{x}{0}$$

$\underline{K=3}$ $$x^3 = 6\binom{x}{3} + 3 \cdot 2! \binom{x}{2} + 3\binom{x}{1}$$

$$6\binom{x}{3} = \frac{x(x-1)(x-2)}{\cancel{3!}} = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{\cancel{6}}$$

$a_K = K!$; $\boxed{K! \cdot \binom{x}{K}} + a_{K-1} \binom{x}{K-1} + a_{K-3} ($

è a coeff. interi

contiene $b_{K-1} \cdot x^{K-1}$

deve essere $(K-1)! \cdot b_{K-1}$

è a coeff. interi

contiene $b_{k-2}\cdot x^{k-2}$

<u>Fatto generale</u> Se un polinomio $p(x)\in\mathbb{R}[x]$ di grado k a coeff. reali assume valori interi sugli interi (ma bastano i naturali (anche da un certo punto in poi ($k+1$ consecutivi?)))

Allora $\exists\, a_0, \dots, a_k$ interi per cui

$$p(x)=a_0\binom{x}{0}+\dots+a_k\binom{x}{k}$$

(Idea: $q(x)=p(x+1)-p(x)$ ha grado $k-1$, ed ha ancora la proprietà interi $\to$ interi

...)

Per ogni x intero >0

$$p(x)=p(1)+\underbrace{q(1)+\dots+q(x-1)}$$

$$q(x)=b_0\binom{x}{0}+\dots+b_{k-1}\binom{x}{k-1}$$

Allora $p(x)=p(1)\binom{x}{0}+b_0\binom{x}{1}+\dots+b_{k-1}\binom{x}{k}$