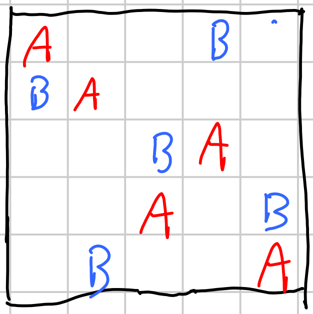
Senior 2016 - C2 Medium (Anér)

Note Title 9/6/2016



$n \times n$, vogliamo mettere n lettere A nelle caselle, una per ogni riga e una per colonna

Si può fare! Sulla diagonale

Possiamo aggiungere anche n lettere B con le stesse condizioni, ma in caselle diverse

Si può fare! (Una B sotto ogni A, per esempio)

Possiamo ora aggiungere n lettere C ?

Lemma dei matrimoni Abbiamo un insieme A di ragazzi, e un insieme B di ragazze. $\forall$ ragazzo $x \in A$ ad x piace un sottoinsieme $\Gamma(x) \subseteq B$. Vogliamo organizzare dei matrimoni, assegnando ad ogni ragazzo una moglie tra le ragazze che gli piacciono.

È possibile? Non sempre. Per $X \subseteq A$ chiamiamo

$$\Gamma(X) = \{\text{ragazze che piacciono ad almeno un ragazzo in } X\} = \bigcup_{x \in X} \Gamma(x)$$

Se esiste $X \subseteq A$ con $|X| > |\Gamma(X)|$, non si può

Tesi del lemma Se $\forall X \subseteq A$ $|X| \leq |\Gamma(X)|$ allora si può fare

DIM. Per induzione estesa su $n = |A|$

PASSO BASE $n=0$ tutto va bene

facciamo anche $n=1$ tutto va bene ✓

PASSO INDUTTIVO Ci sono due possibilità:

(1) $\forall X \subseteq A$ con $X \neq \emptyset$, $X \neq A$, vale $|X| < |\Gamma(X)|$

(2) $\exists X \subseteq A$ con $X \neq \emptyset$, $X \neq A$, per cui $|X| = |\Gamma(X)|$

Nel caso (1) possiamo scegliere un ragazzo $\bar{x} \in A$ e gli assegniamo una moglie $\bar{y} \in B$ (in qualche modo).

Rimangono i ragazzi in $A \setminus \{\bar{x}\}$ e le ragazze in $B \setminus \{\bar{y}\}$. Verifichiamo le ip. del lemma per gli insiemi $A \setminus \{\bar{x}\}$, $B \setminus \{\bar{y}\}$

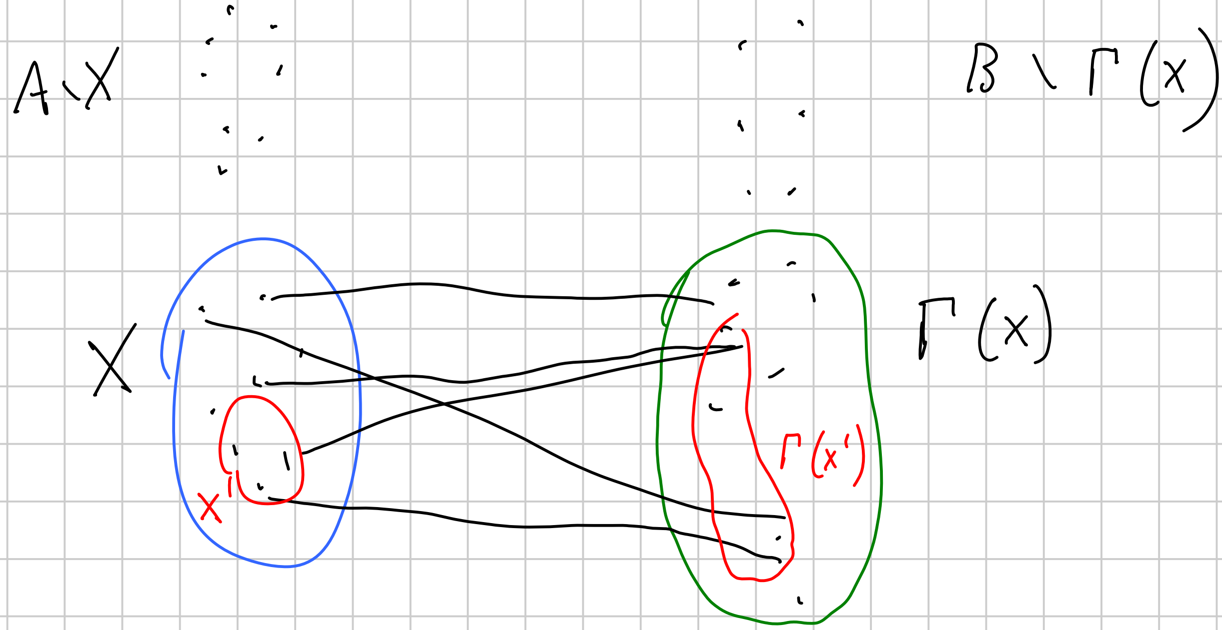
$X \subseteq A \setminus \{\bar{x}\}$, $\quad |\Gamma(X) \setminus \{\bar{y}\}| \overset{?}{\geq} |X|$

$X = \emptyset$ è ovvio; $|X| > 0$ comunque $X \neq A \Rightarrow |X| \leq |\Gamma(X)| - 1$

$$\underset{|\Gamma(X) \setminus \{\bar{y}\}|}{\wedge|}$$

(2) Prendo $X \neq \emptyset, A$ $\quad |X| = |\Gamma(X)|$

A



Vorrei spezzare il problema in 2 problemi più piccoli, con le coppie $(X, \Gamma(X))$ e $(A \setminus X, B \setminus \Gamma(X))$

Devo verificare:

- $\forall X' \subseteq X \quad |\underbrace{\Gamma(X')}_{\text{so già che è incluso in } \Gamma(X)}| \geq |X'|$ parte dell'ipotesi originale

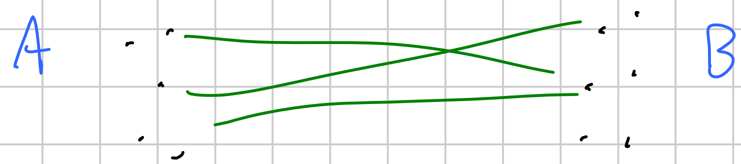
- $\forall X'' \subseteq A \setminus X \quad |\Gamma(X'') \setminus \Gamma(X)| \geq |X''|$

Considero l'insieme $X \cup X''$

$$\cancel{|X|} + |X''| = |X \cup X''| \leq |\Gamma(X'' \cup X)| = \cancel{|\Gamma(X)|} + |\Gamma(X'') \setminus \Gamma(X)|$$

<u>OSS</u> Sembra un lemma difficilmente applicabile (l'ipotesi è difficile da verificare ...)

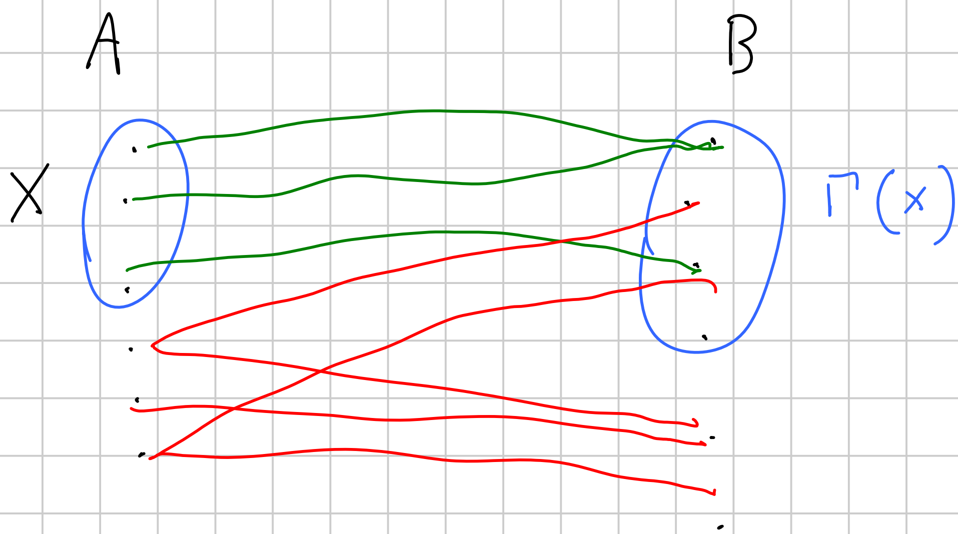
Def Un grafo si dice bipartito se i suoi vertici si possono dividere in due sottoinsiemi A e B disgiunti per cui tutti gli archi vanno da A a B



Lemma ausiliario dei matrimoni A ragazzi, B ragazze

Supponiamo che $\forall x \in A$ e $y \in B$ che si conoscono, $\deg x \geq \deg y$. Allora le ip. del lemma dei matrimoni sono verificate. (gradi dei ragazzi > 0, wlog gradi delle ragazze > 0)

DIM Assegniamo un peso 1 a ogni ragazzo e a ogni ragazza (in cioccolato). Ogni ragazzo distribuisce equamente il suo cioccolato alle sue vicine; ogni ragazza fa lo stesso (divide il suo cioccolato tra i ragazzi a cui piace)



Sia $p(x)$ il cioccolato ricevuto da un ragazzo, $p(y)$ quello ricevuto da una ragazza.

$$\overbrace{\sum_{x\in X} p(x)}^{\text{cioccolato ricevuto da } X} \le |\Gamma(X)|$$

$$\sum_{y\in\Gamma(X)} p(y) \ge |X| \quad \text{vera, ma non servirà}$$

$$\sum_{x\in X} p(x) = \sum_{\substack{x\in X\\ y\in\Gamma(x)\\ xy \text{ si conoscono}}} \frac{1}{\deg y} = \sum_{x\in X} \overbrace{\sum_{\substack{y\in\Gamma(x)\\ xy \text{ si conoscono}}} \frac{1}{\deg(y)}}^{p(x)}$$

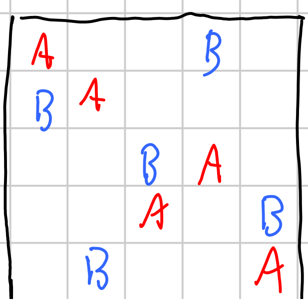
V| vale per ipotesi $\deg x \ge \deg y$ se x e y si conoscono

vera ma non servirà

$$\sum_{y\in\Gamma(X)} p(y) \ge \sum_{\substack{y\in\Gamma(X)\\ x\in X\\ xy \text{ si conoscono}}} \frac{1}{\deg x} = |X|$$

Corollario Se per ogni $x\in A$ e per ogni $y\in B$ $\deg(x) \ge \deg(y)$, a maggior ragione posso organizzare i matrimoni.

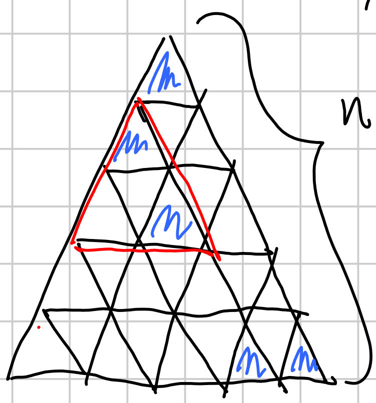
Torniamo alle scacchiere

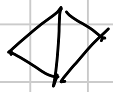


Aggiungere le C vuol dire far sposare ogni riga con una colonna. Usando il lemma ausiliario e il corollario, basta verificare $\deg(\text{riga}) \ge \deg(\text{colonna})$ $\forall$ riga e colonna

dove deg(riga r) = # caselle libere su r
deg(colonna c) = // // / c

IMO SL 2006/C6



Rimuovete n triangolini con la punta in alto; rimane una figura che volete tassellare con dei rombi 

Tesi ciò è possibile se e solo se in ogni sottotriangolo con la punta in alto di lato K $(1 \leq K \leq n)$ ci sono al massimo K triangolini rimossi.

Verso il teorema di König. Supponiamo di avere

A ragazzi, B ragazze, alcuni si conoscono.

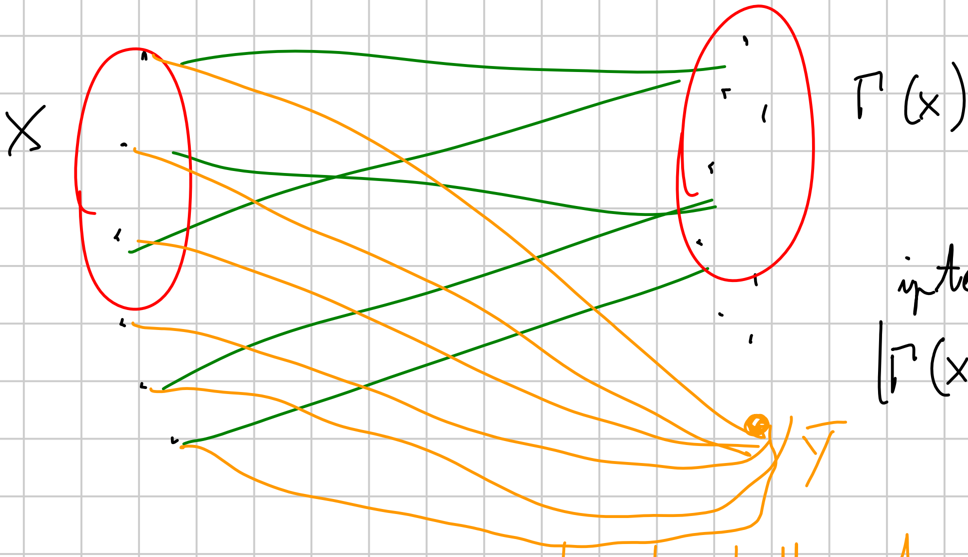
Per $X \subseteq A$, definisco $\delta(X) = |X| - |\Gamma(X)|$

Il lemma dei matrimoni dice che se $\delta(X) \leq 0$ sempre, allora posso effettuare tutti i matrimoni.

Cerchiamo di generalizzare. Supponiamo $\delta(X) \leq 1$ sempre. Cosa possiamo dire? Riusciremo a combinare tutti i matrimoni, tranne al max uno.

DIM

A B



ipotesi: per ogni $X \subseteq A$ $|\Gamma(X)| \geq |X| - 1$

aggiungiamo una ragazza conosciuta da tutto A

Chiamo $\tilde{B} = B \cup \{\bar{y}\}$. La coppia $(A, \tilde{B})$ soddisfa l'ipotesi del lemma dei matrimoni!!!

Ora posso creare tutti i matrimoni, ma alla fine, eventualmente, devo eliminare al massimo un matrimonio, quello di $\bar{y}$.

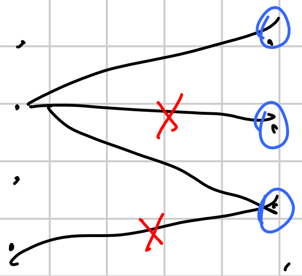
Generalizzando $\delta = \max \{ \delta(X) \mid X \subseteq A \}$

allora posso creare tutti i matrimoni, salvo al più δ.

Def Un matching o accoppiamento in un grafo bipartito è un sottoinsieme M degli archi per cui due archi in M non hanno estremi in comune

Def Un covering o ricoprimento // // è un sottoinsieme C dei vertici (di tutti i vertici), per cui ogni arco ha almeno un estremo in C

OSS M matching, C covering $\quad |M| \leq |C|$

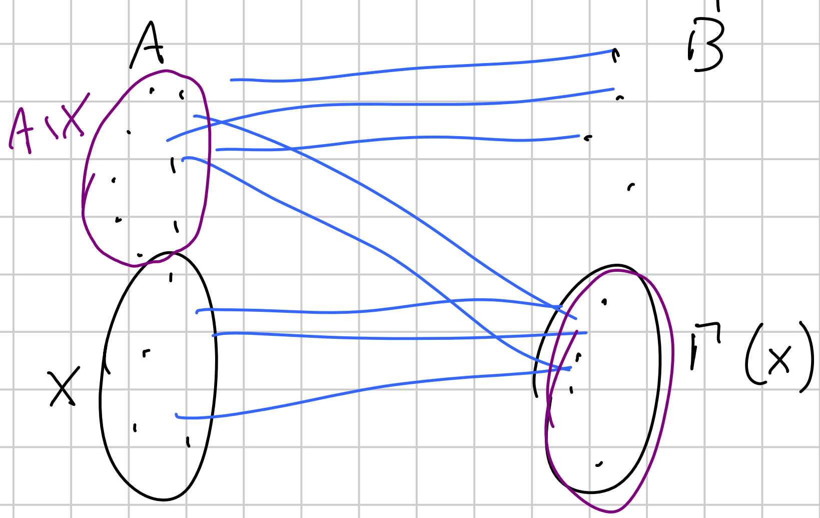


Teorema di König: Esistono un accoppiamento e un ricoprimento con la stessa cardinalità.

DIM Sia $a = |A|$. Sia $\delta = \max\{\delta(X) \mid X \subseteq A\}$.

- Se $\delta \leq 0$ allora sono nell'ip. del lemma dei matrimoni classico, per cui c'è un a-matching. È chiaro anche che A è un a-covering
- $\delta > 0$. Esiste un $(a-\delta)$-matching.

Sia $X \subseteq A$ tale che $\delta = |X| - |\Gamma(X)|$



Cerco un $(a-\delta)$-covering

$a - \delta =$

$= a - |X| + |\Gamma(X)|$

Provo $(A \setminus X) \cup \Gamma(X)$. È un covering? Sì $\square$

Problema di Turán

G grafo generico, con n vertici, e archi, senza triangoli (cicli lunghi 3).

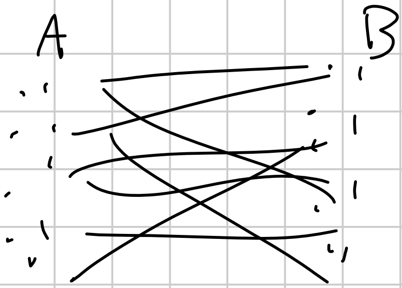
- albero $\quad e = n-1 \quad$ (il totale delle coppie di vertici è $\frac{n(n-1)}{2}$)

- vertice centrale + tanti cicli da 4

$$4\left\lfloor \frac{n-1}{3} \right\rfloor \sim \frac{4}{3} n$$

un po' meglio ...

- grafo bipartito completo (i cicli hanno tutti lunghezza pari)



$$e = |A| \cdot |B| \quad \text{con } |A| + |B| = n$$

$$e = \frac{n^2}{4} \text{ per } n \text{ pari} \qquad e = \frac{(n+1)}{2} \cdot \frac{(n-1)}{2} = \frac{n^2-1}{4} = \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

questa stima è di secondo grado

Teo (Turán) Non si può fare di meglio

DIM Parto con un peso 1 su ogni vertice. Cerco di spostare i pesi e massimizzare

$$\sum_{\substack{v_i \text{ e } v_j \text{ sono collegati} \\ i<j}} x_i \cdot x_j = x$$

$v_1, \dots, v_n$ sono i vertici di un grafo senza triangoli

x_i è il peso assegnato a v_i

All'inizio $x_i = 1$ per ogni i, quindi $x = e$

Ad ogni passaggio

1) Prendo due vertici x_i e x_j non collegati e tali che

$x_i > 0$, $x_j > 0$ (se ci sono)

2) $$x = \sum_{\substack{v_k, v_h \text{ collegati} \\ k, h \neq i, j}} x_k \cdot x_h + x_i \cdot \sum_{v_\ell, v_i \text{ collegati}} x_\ell + x_j \cdot \sum_{v_m, v_j \text{ collegati}} x_m$$

Cerco di modificare i valori $x_i \rightsquigarrow 0$ $\quad x_j \rightsquigarrow x_j + x_i$

oppure $x_j \rightsquigarrow 0$ $\quad x_i \rightsquigarrow x_i + x_j$

Vorremo che x aumenti (debolmente)

Scelgo opportunamente quale modifica fare

3) x aumenta o rimane invariato. Il numero di vertici con peso nullo aumenta di 1 $\Rightarrow$ prima o poi l'algoritmo finisce

---

Cosa vediamo alla fine dell'algoritmo? Alla fine tutti i vertici con peso > 0 sono collegati in tutti i modi possibili tra loro. Il nostro grafo non ha Δ $\Rightarrow$ ci sono al massimo due vertici con peso positivo. OSS: x non si annulla mai, quindi ho esattamente due vertici v_a, v_b per cui $x_a > 0$ $x_b > 0$ v_a e v_b sono collegati

$$X = x_a \cdot x_b \text{ alla fine ; inoltre } x_a + x_b = n$$

$$X \leq \frac{n^2}{4} \text{ per AM-GM } \Rightarrow e \leq \frac{n^2}{4} \overset{\text{è intero}}{\Rightarrow} e \leq \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$$

(all'inizio $X = e$)

ORDINI PARZIALI

Nella vita, capita di trovarsi di fronte a un insieme S, e di avere una regola infallibile per confrontare due el. di S, s e t, e dire quale dei due è "maggiore" e quale è "minore" in un opportuno senso. (esempio: un sottoinsieme di $\mathbb{R}$)

A volte invece capita un S sprovvisto di questa proprietà (es. un sottoinsieme di $\mathbb{C}$, un insieme di colori, un sottoinsieme di punti in $\mathbb{R}^3$ ...)

A volte ci sono situazioni intermedie, cioè in S alcune coppie s,t sono confrontabili, altre no.

(esempio: $\mathbb{N} = S$, $n \prec m$ se $n \mid m$)

comunque deve valere la proprietà transitiva:

se $s \preceq t$ e $t \preceq u$ $s \preceq u$

Altro non-esempio $S = \mathbb{R}^2 = \{(x,y) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$

$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ se $x_1 < x_2$, oppure $x_1 = x_2$ e $y_1 < y_2$

questo è un ordine totale

Altro esempio $S = \mathbb{R}^2$ $(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2)$ se

$x_1 < x_2$ e $y_1 < y_2$

Formulazione (vedendola) ho una funzione da $S^2 \to \{\preceq, \succeq, boh\}$

che dice $\forall (s,t)$ se $s \preceq t$, $s \succeq t$ oppure non si sa

Ora ci interessano gli ordini parziali finiti

Def Una catena $C \subseteq S$ è un sottoinsieme totalmente ordinato: ogni coppia di el. di C sono confrontabili

Def Una anticatena $A \subseteq S$ è un sottoinsieme totalmente disordinato: due el. di A sono sempre inconfrontabili.

Def $m \in S$ si dice "minimale" se $\forall s \in S$, $s \neq m$

vale $m \preceq s$, oppure m e s non sono confrontabili

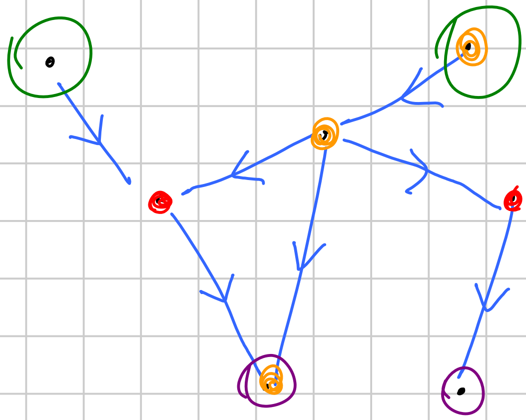
Def $M \in S$ // "massimale" se //

// $M \succeq s$, // / / / / /

Disegno

○ massimali

○ minimali



• sono una catena

• sono un'anticatena

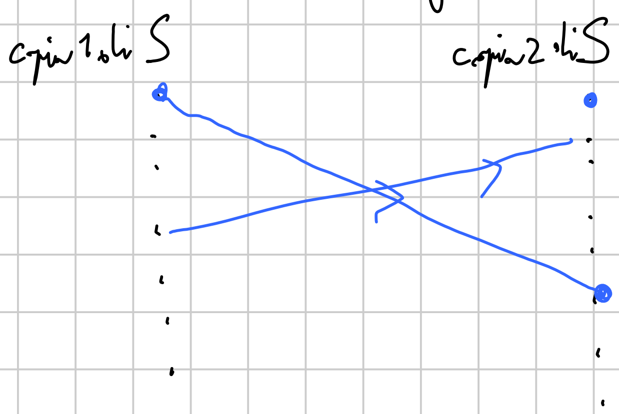
Lemma L'insieme dei minimali è un'anticatena.
Idem per i massimali.

Teorema (Dilworth) Sia S un ordine parziale finito.

① Sia K la massima cardin. di una catena in S; allora S si può scrivere come unione di K anticatene (disgiunte)

② Sia h la massima $|\text{anticatena}|$; allora S è unione di h catene (disgiunte).

DIM ② Applichiamo König su questo grafo bipartito

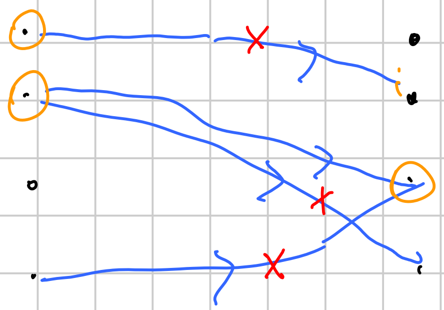


Vertici = due copie di S

archi: collego s a sinistra con t a destra se $s > t$

In particolare non collega s a s

Applico König: ottengo un matching e un covering della stessa cardinalità c.

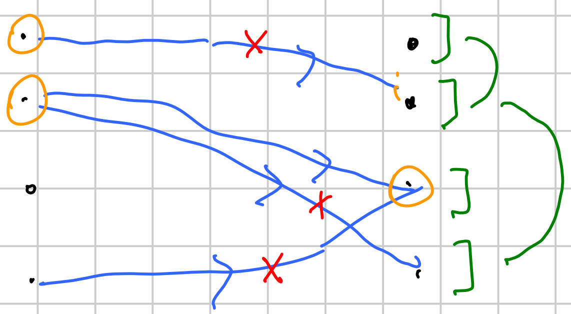


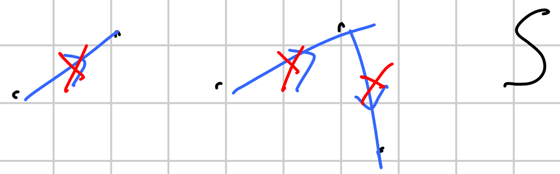
$\exists$ almeno $|S| - c$ elementi di S che non sono dentro al covering né nella loro copia a sx, né in quella a dx.

Questi elementi formano un'anticatena: infatti se s, t sono fra questi e $s > t$, allora nel grafo ho un arco

non coperto dal covering

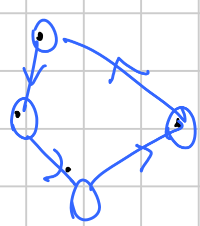
Come divido ora S in $|S| - c$ catene?





c frecce: scompongo S in "serpenti" e cicli

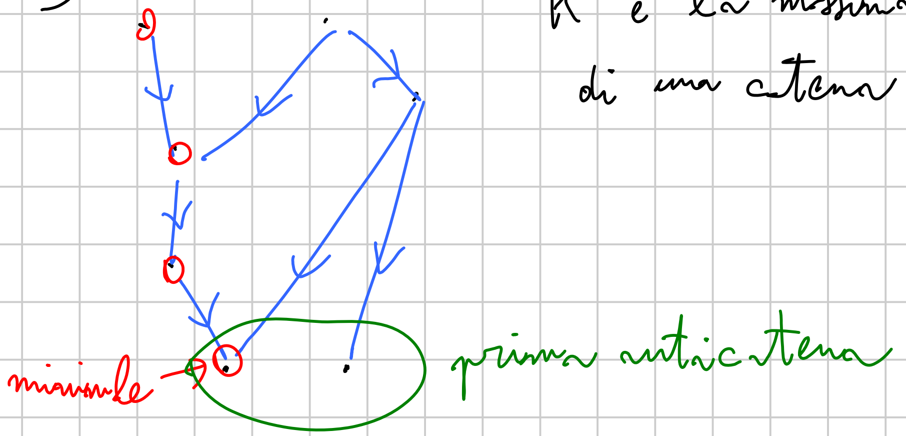
(ma i cicli in realtà non capitano)



Ho $|S| - c$ catene

(1)

S



K è la massima lunghezza di una catena

<u>OSS</u> Una catena di lunghezza massima finisce con un minimale

<u>Idea</u> La prima anticatena della partizione in anticatene saranno i minimali $A_m = \{\text{minimali}\}$

- ho ancora a disposizione $K-1$ anticatene per partizionare $S \setminus A_m$
- la max lunghezza di una catena in $S \setminus A_m$ è $K-1$ $\Rightarrow$ induzione

---

$m, n > 0$; abbiamo un insieme di $mn+1$ persone, tutte di età diversa e tutte di altezza diversa. Allora almeno una delle seguenti vale:

- esistono $m+1$ persone che, in ordine di età crescente, sono anche in ordine di altezza crescente
- esistono $n+1$ persone " " — " sono in ordine decrescente di altezza

(poi c'è l'altro enunciato, scambiando m e n)

Definisco un ordine parziale tra le persone:

$p_1 < p_2$ se p_1 è meno anziana e meno alta di p_2

Stiamo chiedendo che esista una catena lunga $m+1$, oppure una anticatena lunga $n+1$.

Supponiamo che ogni catena sia lunga al massimo m; allora Dilworth (1) mi dice che le persone si possono raggruppare in $\leq m$ anticatene. Per pigeonhole una di queste anticatene ha almeno $n+1$ persone.