G1 Medium

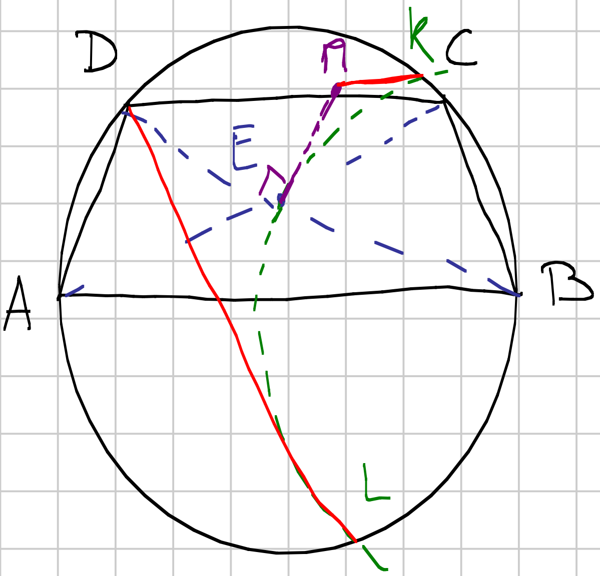
Sam

Note Title 9/2/2016

Complessi, vettori, coordinate

Es: ABCD trapezio inscritto in Γ con AB diametro
La cfr di centro B e raggio BE $(E = AC \cap BD)$ incontra Γ in K e L, con K dalla stessa parte di C risp. ad AB.
M su CD è t.c. $EM \perp BD$. Allora $KM \perp DL$. ?

[BMO 2014-3]



Per dopo

Ripasso misto su $\mathbb{C}$

Es: ABC tri, P punto generico. I simmetrici di P rispetto ai lati sono allineati se e solo se $P \in \Gamma_{ABC}$.

dim: Scriviamo P_c simm. di P risp. ad AB

$$p \xrightarrow[\text{origine in } A]{} p-a \xrightarrow[\text{porto } B \text{ in } 1]{} \frac{p-a}{b-a} \xrightarrow[\substack{\text{simmetria} \\ \text{risp ad } AB \\ = \text{asse Reale}}]{} \frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}} \xrightarrow[\text{rimetto le cose a posto}]{} \left(\frac{\bar{p}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{a}}\right)(b-a)+a$$

Suppongo che Γ_{ABC} sia la cfr. unitaria $(z\bar{z}=1)$

$\forall z \in \Gamma_{ABC} \quad \bar{z} = \frac{1}{z}$

$$P_c = \left(\frac{\bar{p} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{b} - \frac{1}{a}}\right)(b-a)+a = \left(\frac{a\bar{p}-1}{a-b}\,b\right)(b-a)+a =$$

$$= \boxed{a+b-ab\bar{p}}$$

$P_b = a+c-ac\bar{p} \qquad P_a = b+c-bc\bar{p}$

r, s, T allineati sse

$\measuredangle rst \equiv 0 \ (\pi)$ sse

$\arg\left(\frac{t-s}{r-s}\right) \equiv 0 \ (\pi)$ sse

$\frac{t-s}{r-s} \in \mathbb{R}$

$$\frac{P_a - P_b}{P_c - P_b} = \frac{b+\cancel{c}-bc\bar{p}-a-\cancel{c}+ac\bar{p}}{\cancel{a}+b-ab\bar{p}-\cancel{a}-c+ac\bar{p}} =$$

$$= \frac{\boxed{(b-a)}(1-c\bar{p})}{\boxed{(b-c)}(1-a\bar{p})}$$ voglio che stia in $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : z = \bar{z}\}$

$\Rightarrow$ Faccio il coniugato $\quad \frac{\bar{b}-\bar{a}}{\bar{b}-\bar{c}} \; \frac{1-\bar{c}p}{1-\bar{a}p} =$

$$= \frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} \cdot \frac{1-\frac{p}{c}}{1-\frac{p}{a}} = \frac{a-b}{c-b}\,\frac{\cancel{b}\cancel{c}}{\cancel{a}\cancel{b}} \cdot \frac{c-p}{a-p} \cdot \frac{\cancel{a}}{\cancel{c}} =$$

$$= \boxed{\frac{a-b}{c-b}} \cdot \frac{c-p}{a-p}$$

$P_a \; P_b \; P_c$ allineati sse $\quad \frac{1-c\bar{p}}{1-a\bar{p}} = \frac{c-p}{a-p} \iff$

$\iff a-\cancel{p}-\cancel{ac\bar{p}}+cp\bar{p} = c-\cancel{p}-\cancel{ca\bar{p}}+ap\bar{p}$

$\iff a-c = (a-c)p\bar{p} \iff p\bar{p} = 1. \iff p \in \Gamma_{ABC}$. $\square$

Oss: H sta sulla retta per P_a, P_b, P_c. (se $P \in \Gamma_{ABC}$)

dim: $h = a+b+c$

$$h - p_a = a+b+c - b - c + bc\bar{p} = a + bc\bar{p} = \frac{ap+bc}{p}$$

$$z = re^{i\theta} \qquad \frac{z}{\bar{z}} = \frac{re^{i\theta}}{re^{-i\theta}} = e^{i2\theta}$$

$$\frac{h-p_a}{\bar{h}-\bar{p_a}} = \frac{\frac{\cancel{ap+bc}}{\cancel{p}}}{\frac{\cancel{ap+bc}}{abc\cancel{p}}p} = \frac{abc}{p} \Rightarrow H \text{ sta sulla retta}$$

Cor: Le proiez di P sui lati sono allineate (retta di Simson) e tale retta passa per il pt. medio di PH.

Oss: Proiez di P su AB $\boxed{\frac{1}{2}(p+a+b-ab\bar{p})}$ per ogni P!! non solo su Γ_{ABC}

Oss 2: Il pt. medio di PH, $P \in \Gamma_{ABC}$, sta sulla cf. dei 9 punti.

dim: [omotetia, oppure] $l = \frac{a+b}{2}$, $m = \frac{b+c}{2}$, $n = \frac{a+c}{2}$

l, m, n, q sono conciclici sse $\qquad q = \frac{1}{2}(a+b+c+p)$

$$\sphericalangle lmn + \sphericalangle nql \equiv 0 \quad (\pi) \text{ sse}$$

$$\arg\left(\frac{n-m}{l-m} \cdot \frac{l-q}{n-q}\right) \equiv 0 \quad (\pi) \text{ sse}$$

$$\frac{n-m}{l-m} \cdot \frac{l-q}{n-q} \in \mathbb{R} \qquad \frac{\frac{a-b}{\cancel{2}}}{\frac{a-c}{\cancel{2}}} \cdot \frac{\frac{-c-p}{\cancel{2}}}{\frac{-b-p}{2}} = \frac{a-b}{a-c} \cdot \frac{c+p}{b+p} = \sigma$$

$$\bar{\sigma} = \frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}} \cdot \frac{\frac{1}{c}+\frac{1}{p}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{p}} = \frac{(b-a)(c+p)\frac{1}{\cancel{abcp}}}{(c-a)(b+p)\frac{1}{\cancel{abcp}}} = \frac{a-b}{a-c} \cdot \frac{c+p}{b+p} = \sigma$$

$\Rightarrow$ OK.

Oss 3: P, P' sono diam. opposti in Γ_{ABC} $\Rightarrow$ le rette di Simson sono perpendicolari.

dim: $p' = -p$ Considero le rette per i simm. di P e P'.

$$p_a = b + c - bc\bar{p} \qquad p_a' = b + c + bc\bar{p}$$

" simm di P' risp. a BC

$\sphericalangle rst \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ se $\arg\left(\frac{t-s}{r-s}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ (\pi)$ se $\frac{t-s}{r-s} \in i\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} : z = -\bar{z}\}$

$$\frac{h - p_a}{h - p_a'} = \frac{a + bc\bar{p}}{a - bc\bar{p}} = \tau$$

$$\bar{\tau} = \frac{\frac{1}{a} + \frac{p}{bc}}{\frac{1}{a} - \frac{p}{bc}} = \frac{bc + ap}{bc - ap} = \frac{bc\bar{p} + a}{bc\bar{p} - a} = -\tau$$

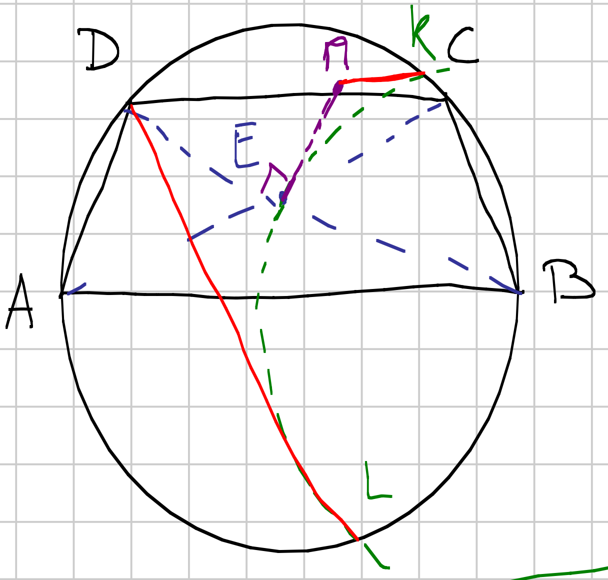
$\Rightarrow \tau \in i\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ le rette sono perpendicolari. $\square$

Es: $ABCD$ trapezio inscritto in Γ con AB diametro. La cfr di centro B e raggio BE ($E = AC \cap BD$) incontra Γ in K e L, con K dalla stessa parte di C risp. ad AB.

M su CD è t.c. $EM \perp BD$. Allora $KM \perp DL$. ?

[BMO 2014-3]



Strategia 1

Γ cfr. unitaria ✓

$B = 1$ $A = -1$ ✓

$D \to -\bar{c}$ ✓

$E = ix$ ✓ $x \in \mathbb{R}$ facile da calcolare

$k = \bar{e}$ ✓

1° problema: k dipende da $\sqrt{1+x^2}$ tramite funz. goniometriche inverse. ~✓

M = pt su CD [$\Leftrightarrow m = c + t(d-c)$ $t \in \mathbb{R}$]

t.c. proiezione su DB fa E $\quad ix = \frac{1}{2}\left(-\bar{c}+1 + \bar{c}\bar{m} + m\right)$ ✓

lineare in t

$\frac{k-m}{d-l} \in i\mathbb{R}$ ✓

↑ Hope

Oss sintetiche sparse:

DB bisett. di $L\hat{D}K$

$\Rightarrow$ E incentro di $\overset{\triangle}{DKL}$

Teo: Dati $a, b, c \in \Gamma = \{z\bar{z} = 1\}$ posso trovare tre numeri cplx u, v, w t.c. $a = u^2$, $b = v^2$, $c = w^2$ e quindi i punti medi degli archi

$\widehat{AB}$, $\widehat{BC}$, $\widehat{CA}$ sono $-uv$, $-vw$, $-uw$.

Da cui l'incentro è $-uv-vw-uw$.

Fisso Γ cfr unitaria ✓ Strategia n. 2

Pongo $d=u^2$, $k=v^2$, $l=w^2$ ✓

$\Rightarrow$ B è dato da $-vw$ $\Rightarrow$ A è vw ✓

C è t.c. $DC \parallel AB$ e $\underset{x}{C} \in \Gamma$
$$\frac{u^2-x}{2vw} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{u^2-x}{2vw} = \frac{\frac{x-u^2}{xu^2}}{\frac{2}{vw}}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-v^2w^2}{u^2} \text{ è } C. \checkmark$$

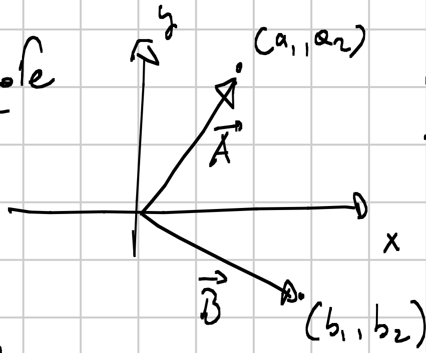
$E = -uv-vw-uw.$ ✓ Ω si trova come prima

Facendo i conti $\Omega = u^2+v^2+w^2$ è l'ortocentro di DKL $\Rightarrow$ fine.

Vettori e coordinate

Prodotto scalare: $\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\cos\widehat{AB}$

in 2 coordinate



$\vec{A}=(a_1,a_2)$

$\vec{B}=(b_1,b_2)$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_1b_1+a_2b_2$$

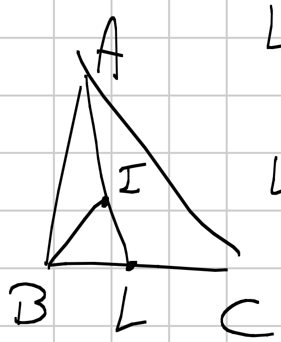
$\vec{e}_1,\vec{e}_2$ $\quad \vec{A}=a_1\vec{e}_1+a_2\vec{e}_2$ ...

$\vec{i}\,,\vec{j}$

calcolarlo con Carnot

Vale in n coordinate: $\vec{A}\cdot\vec{B}=\sum_{j=1}^{n} a_j b_j$

Espressione vett. dell'incentro: $\vec{I} = \dfrac{a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}}{a+b+c}$



$\dfrac{BL}{LC}=\dfrac{AB}{AC}$

$\Downarrow$

$L=\dfrac{c\vec{C}+b\vec{B}}{b+c}$

Prodotto vettore (in 3 dimensioni)

$\vec{A},\vec{B} \rightsquigarrow \vec{A}\times\vec{B}$

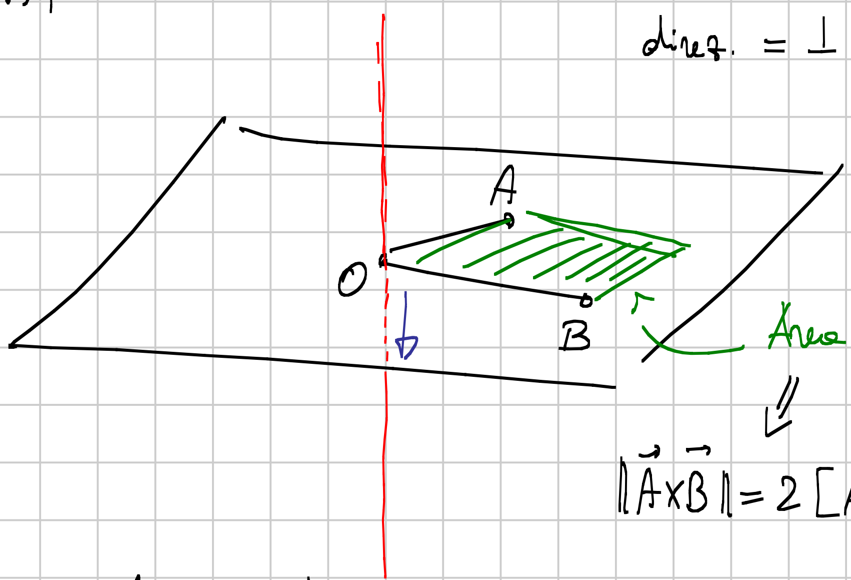
$\|A\times B\| = \|A\|\cdot\|B\|\cdot|\sin\widehat{AOB}|$

direz. = $\perp$ al piano per A,O,B

verso = regola mano dx

$\Downarrow$

$\vec{A}\times\vec{B}$
$\|$
$-\vec{B}\times\vec{A}$



Area $=\|A\|\cdot\|B\|\cdot|\sin\widehat{AOB}|$

$\Downarrow$

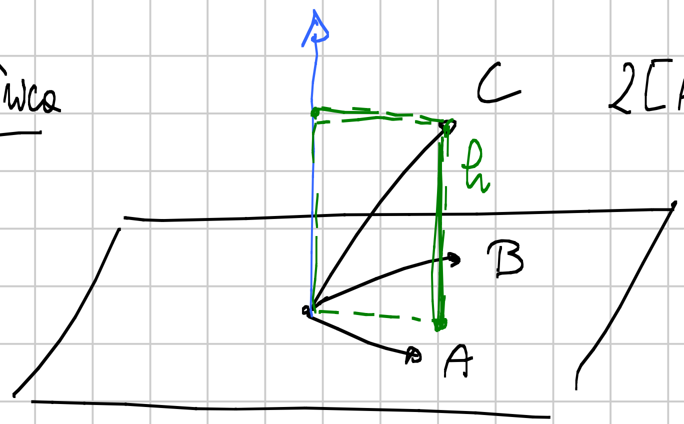
$\|\vec{A}\times\vec{B}\| = 2\,[\overset{\triangle}{AOB}]$

Es per gli annoiati $\quad A=(a_1,a_2,a_3) \quad B=(b_1,b_2,b_3)$

$$\vec{A}\times\vec{B} = (a_2b_3-a_3b_2,\ b_1a_3-a_1b_3,\ a_1b_2-a_2b_1)$$

Es fatality: $(\vec{A}\times\vec{B})\cdot\vec{C} = \det(A|B|C)$.

Idea geometrica



$2[\overset{\Delta}{AOB}]\cdot h =$

$= 6\,Vol(OABC)$

$\det(A|B|C) = c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 + c_2b_1a_3 - c_2a_1b_3 + c_3a_1b_2 - c_3a_2b_1$

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \underbrace{a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3}_{\text{diagonale alto Sx basso Dx}} \underbrace{- c_1b_2a_3 - c_2b_3a_1 - b_1a_2c_3}_{\text{diag alto Dx basso Sx}}$$

Regola di SARRUS.

$$\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$\{a_{ij}\}_{i,j=1}^{n}$

$$\boxed{\det(a_{ij}) = \sum_{\sigma\in S_n} (-1)^{|\sigma|}\cdot\prod_{j=1}^{n} a_{j\sigma(j)}}$$

Se $\det(A|B|C) = 0$

$\Rightarrow$ almeno una delle seguenti è vera

$A = \beta B + \gamma C$

$B = \alpha A + \gamma C$

$C = \alpha A + \beta B$

$\det(\lambda A|B|C) = ?$

$\det(A|C|B) = ?$

$\det(A+A'|B|C) = ?$

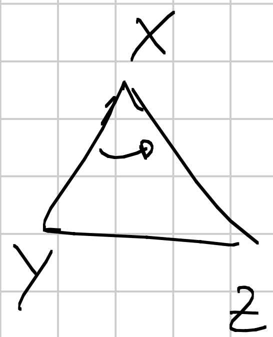
$\boxed{\text{Teo:}}$ ABC triangolo, P punto. Allora $\exists!\ \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ t.c.

1) $\alpha + \beta + \gamma = 1$

2) $\alpha \vec{A} + \beta \vec{B} + \gamma \vec{C} = \vec{P}$

$[XYZ] > 0$ se XYZ sono in senso antiorario.

<u>Dim</u>: $\alpha = \dfrac{[PBC]}{[ABC]}$, $\beta = \dfrac{[PAC]}{[BAC]}$, $\gamma = \dfrac{[PAB]}{[CAB]}$



Se $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$ $\quad [PBC] =$

$$= (C-B)\times(P-B) = k \cdot \underset{\underset{(B-A)\times(C-A)}{\parallel}}{[ABC]}$$

$(\vec{Y} - \vec{X}) \times (\vec{Z} - \vec{X})$

$- - -$ $\square$

<u>Oss</u>: $P = \alpha A + \beta B + \gamma C$

$Q = \rho A + \sigma B + \tau C$

pt. med tra P e Q

$\parallel$

$$\frac{P+Q}{2} = \left(\frac{\alpha+\rho}{2}\right) A + \left(\frac{\beta+\sigma}{2}\right) B + \left(\frac{\gamma+\tau}{2}\right) C$$

<u>Oss2</u>: Posso rinunciare alla condizione i), sostituendola con $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$

e $P = \dfrac{\alpha A + \beta B + \gamma C}{\alpha + \beta + \gamma}$

<u>Coord baricentriche rispetto ad $\overset{\triangle}{ABC}$</u>

$P = [p:q:r]$ sse $\vec{P} = \dfrac{p\vec{A} + q\vec{B} + r\vec{C}}{p+q+r}$

se $p+q+r = 1$ si dicono <u>normalizzate</u>

OSS: $p = k\cdot[PBC]$ $\quad q = k\cdot[APC]$ $\quad r = k\cdot[ABP]$ $\quad k \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

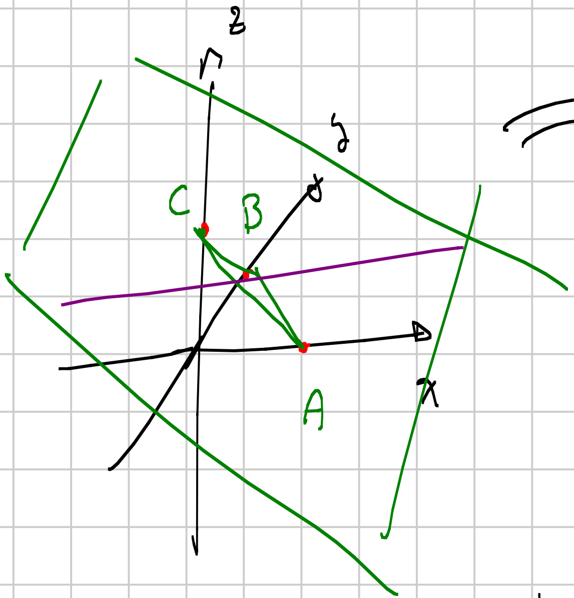
Es: $\{[x:y:z] \text{ t.c. } lx+my+nz=0\}$ $l,m,n \in \mathbb{R}$ non tutti nulli.

è una retta. $\qquad x=0,\ y=0,\ z=0$ lati di $\overset{\triangle}{ABC}$

Es: $A=[1:0:0]$ $\quad B=[0:1:0]$ $\quad C=[0:0:1]$

M = pt. medio di AB $= \left[\frac{1}{2}:\frac{1}{2}:0\right] = [1:1:0]$

Idea 3-dim:



$\Rightarrow$ P, Q, R sono allineati

$P = p_i$, $Q = q_i$, $R = r_i$

se i corrisp. vett. 3-dim sono complanari

se $\det(PQR)=0$

Condiz di allineamento in coord. baricentriche

$$\det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \\ p_3 & q_3 & r_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Es: Mediana: $M=[1:1:0]$, $C=[0:0:1]$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} = 0 \iff \boxed{x-y=0}$$

Rette parallele: Due piani per l'origine

$$xl + ym + zn = 0 \qquad\qquad \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$$
$$xl' + ym' + zn' = 0$$

danno due rette su $x+y+z=1$.

Questi due piani si intersecano in una retta r.

$$r \cap \{x+y+z=1\} = \mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 \qquad\qquad (A\cap C)\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$$

$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ sono $/\!/$ sse $r \subseteq \{x+y+z=0\}$

$\Leftrightarrow$ tutte le sol di $\begin{cases} xl + ym + zn = 0 \\ xl' + ym' + zn' = 0 \end{cases}$ sono t.c. $x+y+z=0$

Oss: $xl + ym + zn = 0$

$$(x,y,z)\cdot(l,m,n) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \{P \text{ t.c. } \overrightarrow{OP} \perp (l,m,n)\}$$

$$\{P : \vec{P} \perp (l,m,n)\} \cap \{P : \vec{P} \perp (l',m',n')\}$$
$$= \{P : \vec{P} = k\,(l,m,n)\times(l',m',n') \quad k \in \mathbb{R}\}$$

$\begin{cases} lx + my + nz = 0 \\ l'x + m'y + n'z = 0 \end{cases}$ in coord baricentriche

$$[(l,m,n)\times(l',m',n')] =$$
$$= [mn' - nm' : l'n - ln' : lm' - l'm]$$

Oss: $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ parallele sse $(l,m,n)\times(l',m',n') \in \{x+y+z=0\}$

se $\boxed{mn' - nm' + l'n - ln' + lm' - l'm = 0}$ sse

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} l & l' & 1 \\ m & m' & 1 \\ n & n' & 1 \end{pmatrix} = 0}$$ condizione di parallelismo.

1) retta per $[p_1 : p_2 : p_3]$ $[q_1 : q_2 : q_3]$

$$\det\begin{pmatrix} p_1 & q_1 & x \\ p_2 & q_2 & y \\ p_3 & q_3 & z \end{pmatrix} = 0$$

2) intersez. tra $lx + ym + nz = 0$ e $l'x + m'y + n'z = 0$

$$[(l, m, n) \times (l', m', n')]$$

3) rette parallele $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} l & l' & 1 \\ m & m' & 1 \\ n & n' & 1 \end{pmatrix} = 0$

<u>Alcuni punti</u>

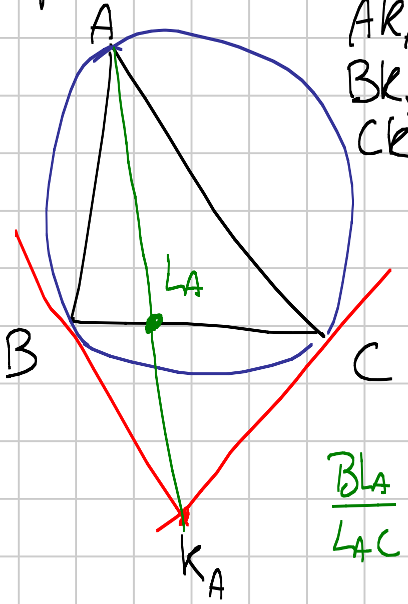
$G = [1:1:1]$

$I = [a:b:c]$ $\quad L = [0:b:c]$ piede bisett. da A

$I_A = [-a:b:c]$ e cicliche

$H = [\tan A : \tan B : \tan C]$

$O = [\sin 2A : \sin 2B : \sin 2C]$



AK_A
BK_B
CK_C
concorrono in K ← Lemoine

$$\frac{BL_A}{L_AC} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

Teo di Ceva+ : $[0:q_1:r_1]$, $[p_2:0:r_2]$, $[p_3:q_3:0]$
$D \in BC$ $\quad$ $E \in CA$ $\quad$ $F \in AB$

domanda: quando AD, BE, CF concorrono? e dove?

$$AD: \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & q_1 & y \\ 0 & r_1 & z \end{pmatrix} = \boxed{zq_1 - yr_1 = 0}$$

$$\begin{cases} -r_1 y + q_1 z = 0 \\ -r_2 x + p_2 z = 0 \\ -q_3 x + p_3 y = 0 \end{cases}$$

ha una sol. non banale se e solo se le rette concorrono $\Longleftrightarrow \det\begin{pmatrix} 0 & -r_1 & q_1 \\ -r_2 & 0 & p_2 \\ -q_3 & p_3 & 0 \end{pmatrix} = 0$

$$r_1 p_2 q_3 - q_1 r_2 p_3 = 0 \Longleftrightarrow p_2 q_3 r_1 = q_1 r_2 p_3 \Longleftrightarrow \frac{r_1}{q_1} \cdot \frac{q_3}{p_3} \cdot \frac{p_2}{r_2} = 1$$

[Ceva]

$$D = \frac{q_1 B + r_1 C}{q_1 + r_1} \Longleftrightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{r_1}{q_1}$$

P = punto di concorrenza $\quad (0, -r_1, q_1) \times (-r_2, 0, p_2) =$

$$= (-r_1 p_2, -r_2 q_1, -r_1 r_2)$$

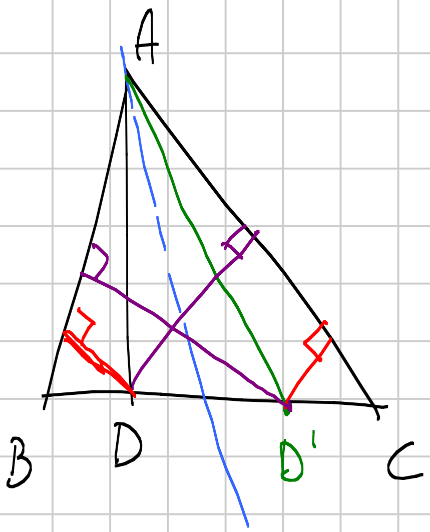
$P = [r_1 p_2 : r_2 q_1 : r_1 r_2] \rightsquigarrow$ c'è un modo di rendere ciclica l'espressione.

$P = [p:q:r]$ è piede delle ceviane $[0:q:r]$, $[p:0:r]$, $[p:q:0]$.

Punto di Lemoine: $L_A = [0 : b^2 : c^2] \rightsquigarrow K = [a^2 : b^2 : c^2]$

Esercizio per casa: $P = [p : q : r] \rightsquigarrow$ coniugato isogonale

$$P' = \left[\frac{a^2}{p} : \frac{b^2}{q} : \frac{c^2}{r}\right]$$



K è il coniug. isog di G

$$G_e = [(s-b)(s-c) : (s-c)(s-a) : (s-a)(s-b)]$$

Circoscritta: $a^2 yz + b^2 xz + c^2 xy = 0$

Es: ABC tri, K pt. dove la cf. inscritta è tg a BC

$IO \parallel BC \Rightarrow AO \parallel HK$

$$\det\begin{pmatrix} a & \text{sen}2A & x \\ b & \text{sen}2B & y \\ c & \text{sen}2C & z \end{pmatrix} = 0$$

$$x\big(\overbrace{b\,\text{sen}2C - c\,\text{sen}2B}^{\alpha_1}\big) - y\big(\overbrace{a\,\text{sen}2C - c\,\text{sen}2A}^{\alpha_2}\big) + z\big(\overbrace{a\,\text{sen}2B - b\,\text{sen}2A}^{\alpha_3}\big) = 0$$

$x = 0$

$$\det\begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 1 \\ \alpha_2 & 0 & 1 \\ \alpha_3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

il resto per casa (può essere comodo scrivere tutto con a, b, c)

BMO 2015 - 2 | ABC scaleno, ω circoscritta.

AI, BI, CI incontrano di nuovo ω in D, E, F.

Le parallele a BC, CA, AB per I incontrano EF, DF, DE in K, L, M.

$\Rightarrow$ K, L, M allineati.

$$D = [-a^2 : b(b+c) : c(b+c)]$$

Parallela a BC per I: $\quad lx + my + nz = 0$

1) passaggio per I $\quad la + mb + nc = 0$

2) parallele a BC $\quad \det\begin{pmatrix} 1 & l & 1 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & n & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff m - n = 0$

$$\begin{cases} la + mb + nc = 0 \\ m - n = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} la + m(b+c) = 0 \\ [b+c; -a; -a] \end{matrix}$$

$$\{(b+c)x - ay - az = 0\}$$