INDUZIONE & FRIENDS - MEDIUM

Note Title 9/1/2016

INDUZIONE
IND. FORTE
MINIMO INTERO
DISCESA INFINITA
PIGEONHOLE

→ Caso iniziale "a vuoto":

<u>Esempio</u>: il numero di coppie che posso fare con n oggetti è $1+2+\ldots+(n-1)$

$P(n)$

$n-1$ $\quad$ n

$P(n) \rightarrow P(n+1)$

$n+1$ oggetti → coppie tra i primi n oggetti
→ coppie con l'oggetto nuovo

<u>Caso base</u>: coppie di 0 oggetti

$$\sum_{i=1}^{0} i = 0$$

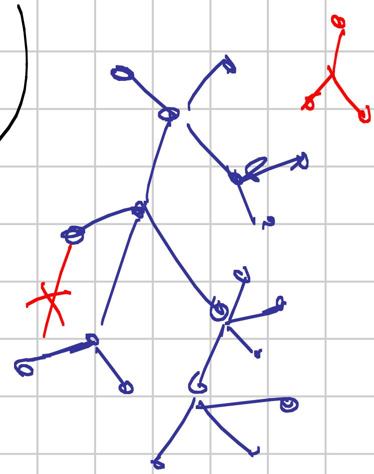
Sommatoria vuota $= 0$

produttoria vuota = 1

Classico esempio di induzione problematica:
"induzione su grafi aggiungendo"

Esempio: Teo: Ogni albero con n vertici
$P(n)$ ha $n-1$ archi

(albero = grafo connesso, senza cicli)



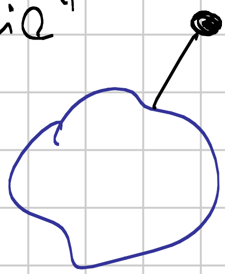
Dim: (sbagliata):
$P(n) \Rightarrow P(n+1)$
Prendo un albero con n vertici (e $n-1$ archi) Hp. ind.

Ho aggiunto 1 nodo $n \to n+1$
1 arco $n-1 \to n$

Problema: nessuno mi dice che "aggiungendo" posso raggiungere tutti gli alberi con $n+1$ nodi

Invece: devo partire da una configuraz. con $n+1$ nodi

Sia G un grafo con $\underline{n+1}$ nodi,
voglio mostrare che posso sempre togliere
una "foglia"

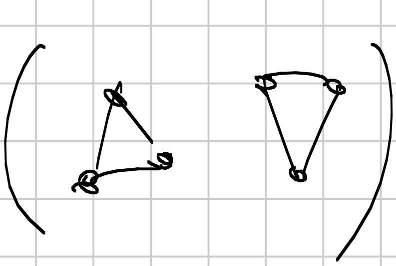


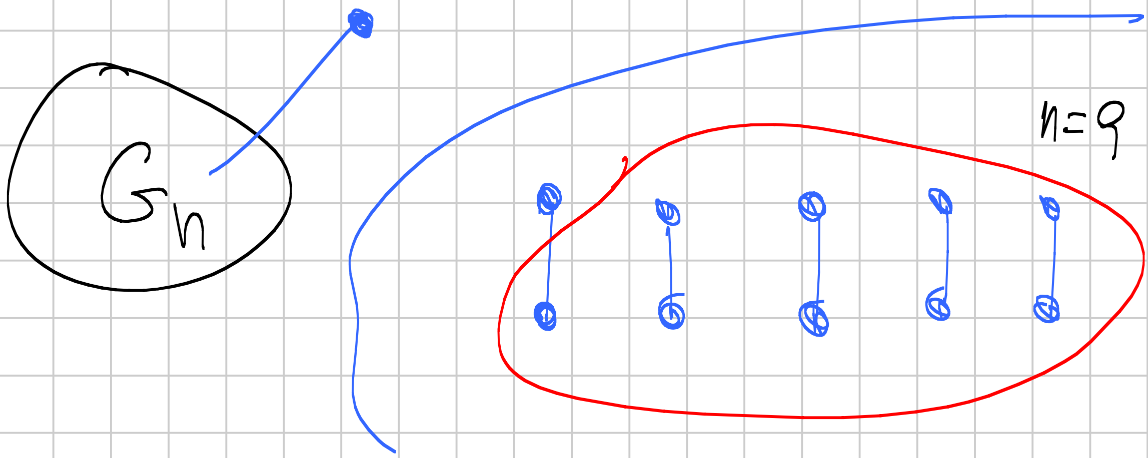
$n+1 \to n$ Hp.ind. albero con n nodi

$? \to n-1$

Mi serve dimostrare che ogni albero ha una
foglia: se per assurdo non ci fossero foglie,
parto da un vertice a caso, e "seguo la
strada": dopo al max n passi, devo
ripassare ~~da~~ un vertice già visto, assurdo,

Teo (falso): ogni grafo senza vertici isolati
è connesso





$P(1) \Rightarrow P(2) \Rightarrow P(3) \Rightarrow P(4) \rightarrow P(5) \rightarrow P(6) \ldots$

Esempi di "induzione non lineare":

Dimostrazione della disuguaglianza tra le medie AM-GM

$\boxed{n=2}$ $\quad \dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$

$P(2)$

$x^2 = a \quad y^2 = b$

$P(n)$: $\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$

$P(k), P(2) \Rightarrow P(2k)$

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{2k} = \frac{\frac{a_1+a_2+\ldots a_k}{k} + \frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}}{2}$$

$$\overset{P(2)}{\geq} \left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_k}{k}\right)^{1/2} \left(\frac{a_{k+1}+\ldots+a_{2k}}{k}\right)^{1/2} \overset{P(k)}{\geq}$$

$$\geq (a_1 a_2 \ldots a_k)^{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}} (a_{k+1} \ldots a_{2k})^{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{2}}$$

$P(k+1) \Rightarrow P(k)$

Applico AM-GM a

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_k+\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}}{k+1} \geq \left(a_1 a_2 \cdots \frac{a_1+\dots+a_k}{k}\right)^{\frac{1}{k+1}}$$

e semplifico

Come arrivo a $P(13)$?

$$P(2) \Rightarrow P(4) \Rightarrow P(8) \Rightarrow P(16) \Rightarrow P(15) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow P(14) \Rightarrow P(13)$$

Induzione su due variabili, es. m, n

Ad es. induzione su $m+n$ $\max(m,n)$

$$\begin{array}{ccccc}
P(0,0) & & P(0,1) & & P(0,2) \quad \dots \\
\Downarrow & \nearrow & & \nearrow & \\
P(1,0) & & P(1,1) & & P(1,2) \quad \dots \\
\Downarrow & \nearrow & & & \\
P(2,0) & & P(2,1) & & P(2,2) \\
\Downarrow & & & & \\
\vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Se dimostro $P(m,n) \Rightarrow P(m+1,n)$

$$P(m,n) \Rightarrow (m-1, n+1)$$

allora ho vinto...

Dimostrazione "visiva" che $1^2+2^2+3^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$

$$\begin{array}{ccc} \begin{matrix} & & & 1 & & & \\ & & 2 & & 2 & & \\ & 3 & & 3 & & 3 & \\ 4 & & 4 & & 4 & & 4 \end{matrix} & \xrightarrow{\text{ruoto}} & \begin{matrix} & & & 4 & & & \\ & & 3 & & 4 & & \\ & 2 & & 3 & & 4 & \\ 1 & & 2 & & 3 & & 4 \end{matrix} & \xrightarrow{\text{ruoto}} & \begin{matrix} & & & 4 & & & \\ & & 4 & & 3 & & \\ & 4 & & 3 & & 2 & \\ 4 & & 3 & & 2 & & 1 \end{matrix} \end{array}$$

se sommo tutti i numeri nella stessa posizione, viene sempre $2n+1$

$$3(1^2+2^2+\dots+n^2) = (2n+1)\frac{n(n+1)}{2}$$

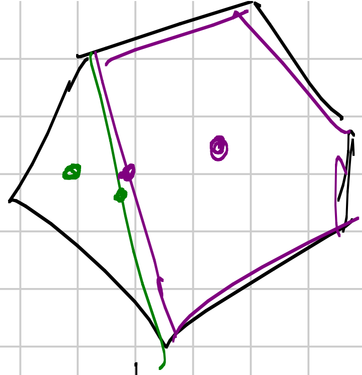
1) Se sommo quelli in cima, viene $2n+1$

$$\begin{matrix} 1 \\ / \ \backslash \end{matrix} \qquad \begin{matrix} n \\ / \ \backslash \end{matrix} \qquad \begin{matrix} n \\ / \ \backslash \end{matrix}$$

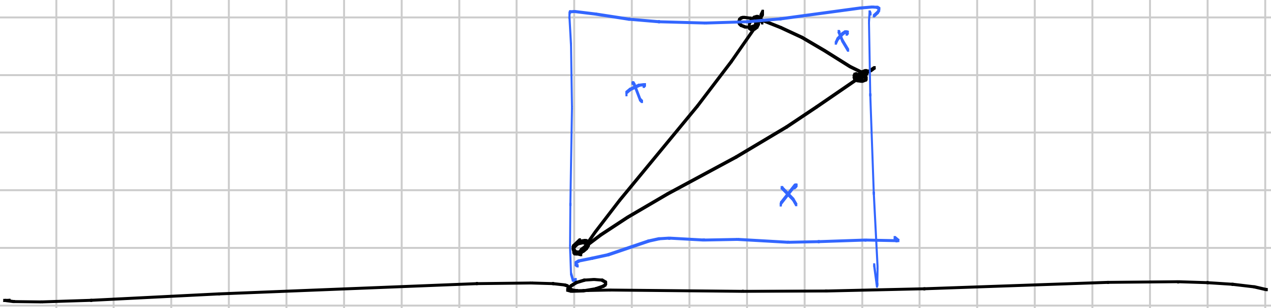
2) se mi sposto $\swarrow$, su un triangolo sale di 1, su uno scende di 1, su uno resta uguale

3) se mi sposto $\searrow$

~ Pick



Mi basta dimostrarlo sui triangoli



ES: Teo: $F_{n+1}^2 + F_n^2 = F_{2n+1}$ $P(n)$

$P(n+1)$: $F_{n+2}^2 + F_{n+1}^2 = (F_n + F_{n+1})^2 + F_{n+1}^2 =$

$= \underline{F_n^2} + 2F_nF_{n+1} + \underline{F_{n+1}^2} + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} + 2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2$

... $\stackrel{(HOPE)}{=} F_{2n+3}$

Mi manca di dire che $2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = F_{2n+2}$

Provo a dimostrarlo per induzione

$Q(n)$: $2F_{n-1}F_n + F_n^2 = F_{2n}$

$Q(n+1)$: $2F_nF_{n+1} + F_{n+1}^2 = 2F_n(F_{n-1} + F_n) + (F_{n-1} + F_n)^2$

$$= 2F_nF_{n-1} + 2F_n^2 + F_{n-1}^2 + F_n^2 + 2F_{n-1}F_n =$$

(HOPE) $\dots = F_{2n+2}$

$$= 2F_{2n} + F_{n-1}^2 + F_n^2$$

mi manca che $F_{n-1}^2 + F_n^2 \overset{?}{=} F_{2n-1}$ $\quad P(n-1)$

$$\begin{tikzcd}
P(1) \arrow[d] & Q(1) \arrow[dl] \arrow[d] \\
P(2) \arrow[r] & Q_2 \\
P(3) & Q(3) \\
P(4) & Q(4)
\end{tikzcd}$$

Induzione "dando via qualcosa"

ES: $\quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{k^2} < 2 \qquad \frac{\pi^2}{6}$

(speranza vana)

$$\frac{1}{1^2} + \dots + \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(k+1)^2} \overset{\text{IND}}{<} 2 + \frac{1}{(k+1)^2} \quad \dots \quad < 2$$

Invece, si riesce a dimostrare per induzione che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2 - \frac{1}{n} \qquad \text{(più forte)}$$

Facciamolo!

(x)

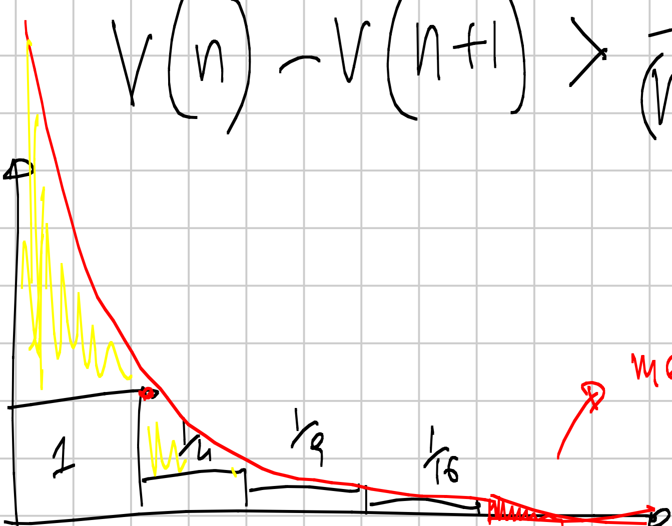
$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{HP IND}}{\le} \cancel{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \overset{\text{(HOPE)}}{<} \cancel{2} - \frac{1}{n+1}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}}_{} = \frac{\cancel{n}+1-\cancel{n}}{(n+1)\,n} = \underbrace{\frac{1}{n(n+1)}}_{} > \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \le 2 - V(n)$$

$$V(n) - V(n+1) > \frac{1}{(n+1)^2}$$



manca $\displaystyle\int_n^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{n}$

Funziona anche con altri esponenti: se devo sommare

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leq (\text{costante})$$

cerco un "potenziale" che si comporti

come $\displaystyle\int_n^{\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\, dx = 2\,\frac{1}{x^{1/2}}$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\dots \to \infty$$

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{\geq \frac{8}{16}=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{17}+\dots\frac{1}{32}}+\dots$$

"Frazioni egizie"

$$\frac{1}{2}, \quad \frac{1}{3}, \quad \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{6}$$

<u>Teo</u>: ogni razionale si scrive come somma di frazioni <u>distinte</u> con numeratore 1

$$\frac{17}{43} = \dots$$

<u>dim</u>: (sbagliata)

$$\frac{17}{43} = \frac{1}{43} + \frac{1}{43} + \dots \quad \frac{1}{43}$$

$$\frac{1}{43} = \frac{1}{44} + \frac{1}{43 \cdot 44} \qquad \frac{1}{43} = \frac{1}{44} + \frac{1}{43 \cdot 44} = \frac{1}{45} + \frac{1}{45 \cdot 46}$$

Finisce questo procedimento? Mah...

<u>dim</u> (giusta): "greedy": metto sempre il termine più grosso che ci sta

<u>Fase 1</u>: $\frac{42}{13} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{K}$

↑ tutti quelli che ci stanno

Arrivato al punto in cui non ci stanno più,

resto $= \dfrac{p_1}{q_1}$

ci metto il più grande $\frac{1}{n}$ che ci sta

$$\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1}{q_1} - \frac{1}{n_1}$$, dove n_1 è il più grande t.c. $\frac{1}{n_1} < \frac{p_2}{q_2}$

$\vdots$

<u>Lemma</u>: se faccio questo, la successione dei numeratori $p_1, p_2, p_3, \dots$ è decrescente

$$\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{1}{n_k} = \frac{n_k p_k - q_k}{q_k n_k}$$

$p_k > n_k p_k - q_k$ dev'essere vera altrimenti

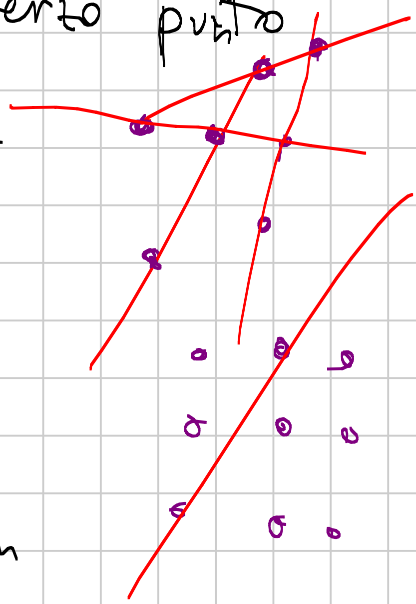
$(n_k - 1) p_k < q_k$ $\qquad \dfrac{p_k}{q_k} < \dfrac{1}{n_k - 1}$, impossibile

perché ho scelto $n_k =$ il minore che ci sta

RMM '09: variante con le arcotangenti (serve la formula della somma delle tg.)

Teo: Sylvester-Gallai

Dato un insieme S di n punti del piano, se $\forall\, A, B \in S$ esiste un terzo punto di S nella retta AB, allora sono tutti allineati.

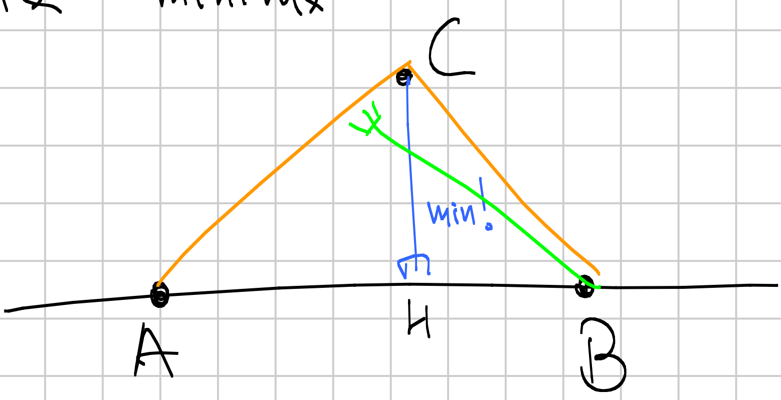


Dim:

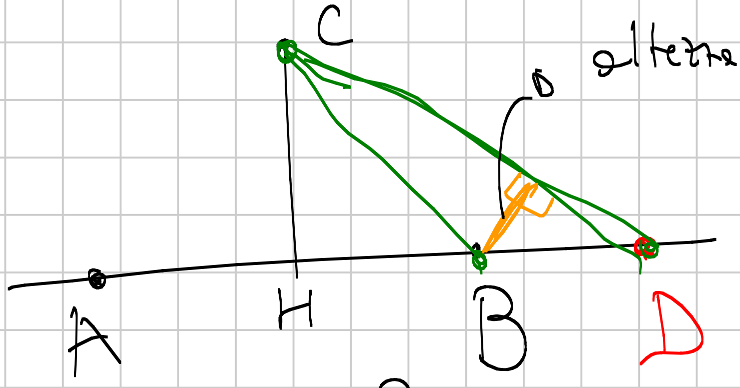
Per induzione non viene: $S_{n+1} \to S_n$ non si fa mantenendo l'ipotesi

Invece viene con il principio del minimo:

supponiamo non tutti allineati, e considero la terna A, B, C tale che $dist(C, AB) \neq 0$ sia minima



CH altezza più piccola $\Rightarrow$ AB lato più grande



altezza più piccola

$\Updownarrow$

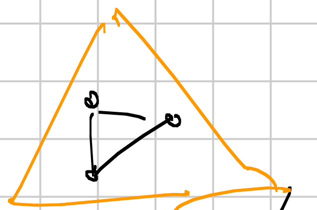
base più grande

$\Uparrow$

angolo ottuso

Variante.. Dato un insieme S_n di punti nel piano tali che $\forall A, B, C \in S$

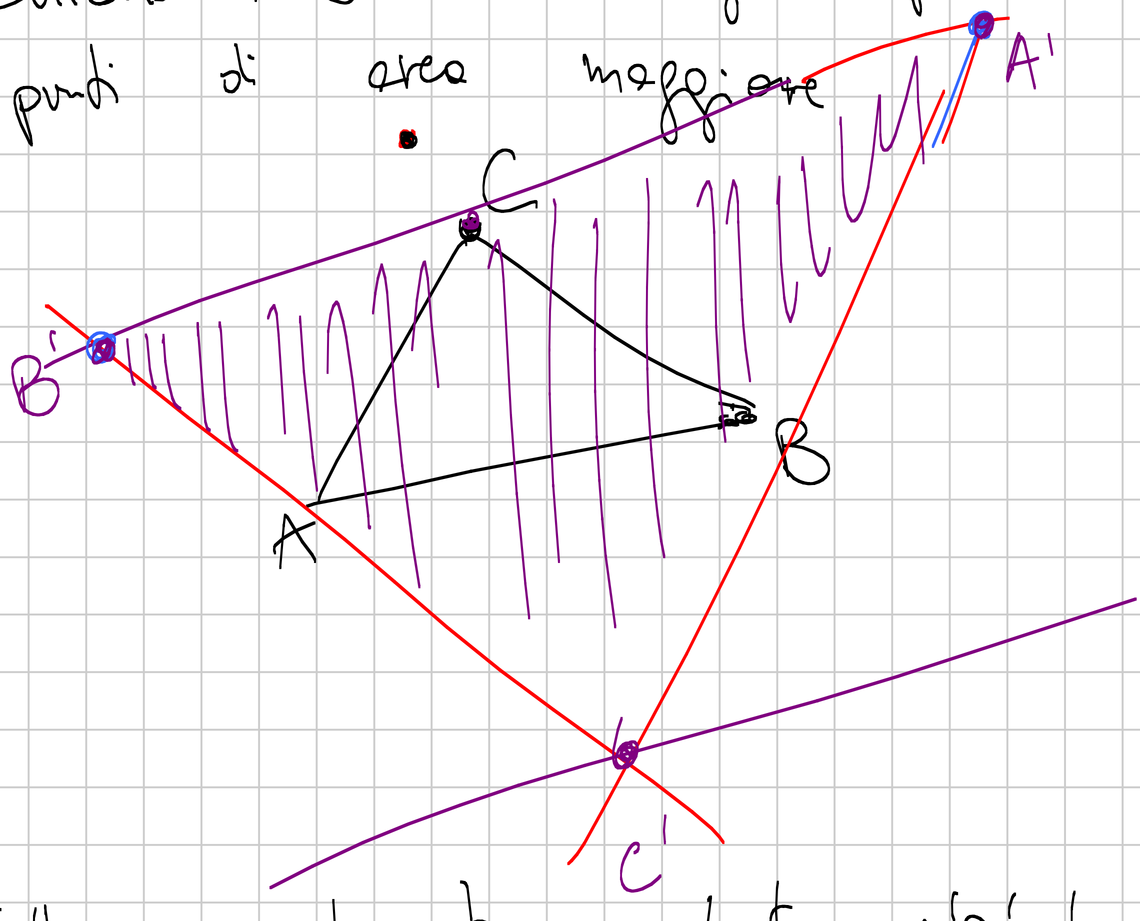
Area$(ABC) < 1$



Allora stanno dentro un triangolo di area < 4

dim: cerco qualcosa di estremale...

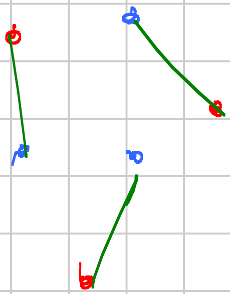
Chiamo ABC il triangolo fatto con questi punti di area maggiore



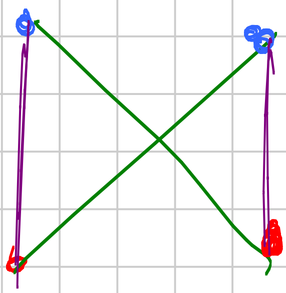
Tutti i punti stanno dentro $A'B'C'$

$\text{Area}(A'B'C') = 4\,\text{Area}(ABC) < 1.$

<u>Teo</u>: dati n punti rossi e n punti blu nel piano, esiste un modo di unirli a 2 a 2 (rosso-blu) in modo che non si intersechino.



<u>Dim</u> (giusta): prendo il modo di unirli con somma delle lunghezze dei segmenti <u>minima</u>. Se avessi



li rimpiazzo con i viola (rimpiazzo diagonali di un quadrilatero con lati).

<u>Dim</u> (sbagliata): parto da una configurazione a caso, se due si intersecano, li rimpiazzo, e continuo

---

<u>Teo</u> (sbagliato): 1 è il più grande

numero intero positivo.

Dim? : se il più grande fosse $M \neq 1$,

allora $M^2 > M$, assurdo

a, b, c $\qquad$ $a-\varepsilon \quad b+\varepsilon \quad c$

≥ 4 PISE : DM 1° PIANO

NUOVI ≥ 4 : MAGNA DM

ALTRI: INFORMATICA