Algebra Advanced 2 - Senior 2017

Sino_the_Wolf

Titolo nota

05/09/2017

① (pb. di Hilbert avanzato) Dimostrare che se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e' tale che $p(x) \geq 0 \quad \forall\, x \geq 0$ allora $\exists\, a, b \in \mathbb{R}[x]$ tali che $p(x) = a(x)^2 + x\, b(x)^2$

China TST '17

omogenei di grado rispettivamente 2, 3, 4, 3.

② Dati $A, B, C, R \in \mathbb{R}[x,y]$ tali che $B^2 - 4AC = -R^2$.
Dimostrare che se $A(x,y)z^2 + B(x,y)z + C(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$
allora $A(x,y)z^2 + B(x,y)z + C(x,y) = F(x,y,z)^2 + G(x,y,z)^2$
per qualche $F, G \in \mathbb{R}[x,y,z]$.

③ IMO 16/5

④ IMO SL 16/8

⑤ Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ tale che $(2\lambda-1)(3\lambda-1) \cdots (n\lambda-1) = 1$. $(n \geq 3)$

Dimostrare che $\left(\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{3\lambda}{3\lambda-1}\right)^3 \cdots \left(\frac{n\lambda}{n\lambda-1}\right)^n > n^n$

Dimostrare che se $n \geq 7$ allora $\left(\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{3\lambda}{3\lambda-1}\right)^3 \cdots \left(\frac{n\lambda}{n\lambda-1}\right)^n > (n!)^2$.

Problema di Hilbert

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ t.c. $p(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$

Claim $\exists \; a, b \in \mathbb{R}[x]$ t.c. $p(x) = a(x)^2 + b(x)^2$.

Casi semplici

grado 1 o grado 2.

grado 1 non può esserlo perché il grado di p e' sicuramente pari (altrimenti $\lim_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} p(x) = -\infty$).

Di grado 2. se $p(x) \geq 0$.

- ho una radice doppia α $\quad p(x) = a(x-\alpha)^2 \quad$ ok.
- non ho radici reali $\quad a \geq 0$

$$p(x) = a \cdot (\underbrace{x-\alpha}-i\underbrace{\beta})(\underbrace{x-\alpha}+i\underbrace{\beta})$$

$$= a\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right] =$$

$$= \left[\sqrt{a}\,(x-\alpha)\right]^2 + \left(\sqrt{a}\,\beta\right)^2. \quad \text{ok.}$$

Fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$.

$$p(x) = a\, p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdot q_1 \cdots q_k$$

$p_i(x) = x - \alpha_i$

$q_i(x) =$ pol. di 2° grado senza radici reali

Lemma: Se α e' radice di $p(x)$ allora α ha molteplicita' pari

Dim. $p(x) = (x-\alpha)^n \cdot r(x) \qquad r(\alpha) \neq 0$

$r(\alpha) > 0$ per $x < \alpha$ ma abbastanza vicino ad α

avrò ancora $r(x) > 0$

[permanenza del segno: se f è continua e $f(x) > 0$ allora in un intorno di x ho $f(y) > 0 \quad \forall \, |y-x| < \varepsilon$]

$$p(x) = (x-\alpha)^n \, r(x)$$

$$\underset{0}{\overset{|\!\vee}{p(x)}} \qquad \underset{0}{\overset{\vee}{r(x)}}$$

$\leadsto \quad (x-\alpha)^n \geq 0 \quad \leadsto \quad n$ pari.

$$p(x) = \prod (x-\alpha_i)^{2n_i} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdots q_J$$

$$p(x) = \prod \left[\left((x-\alpha_i)^{n}\right)^2 + 0^2 \right] \cdot \left(\alpha_1^2(x) + \beta_1^2(x)\right) \cdot \left(\alpha_2^2(x) + \beta_2^2\right) \cdots$$

Identità di Fibonacci $\quad (a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$

(Valido in un anello qualsiasi)

Concludo per induzione.

Problema di Hilbert "positivo"

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ t.c. $p(x) \geq 0 \quad \forall \, x \geq 0$

$\leadsto \quad p(x) = a(x)^2 + x\, b(x)^2 \quad$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}[x]$

$$p(x) = \overbrace{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}^{\text{termini di 2° grado irr. in } \mathbb{R}} \cdot \underbrace{p_1 \cdot p_2 \cdots p_J}_{\text{lineari}}$$

per quelli lineari distinguiamo 2 casi

$p_i(x) = x - \alpha \quad \alpha > 0 \quad \leadsto$ stesso ragionamento di prima α ha molteplicità pari

$p_i(x) = x - \alpha \quad \alpha \leq 0$

$$(x-\alpha)^{2n} = \left((x-\alpha)^n\right)^2 + x \cdot 0^2 \qquad \Leftarrow \text{ radici positive ok.}$$

$$x-\alpha = (\sqrt{-\alpha})^2 + x \cdot 1^2 \qquad \alpha \leq 0 \qquad x+1 = 1^2 + x \cdot 1^2$$

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta) = (x-\alpha)^2 + \beta^2 \neq a(x)^2 + x \cdot b(x)^2$$

$$q_1(x) = x^2 + bx + c = (x-\sqrt{c})^2 + x \cdot (2\sqrt{c}+b) = (x-\sqrt{c})^2 + x \cdot \left(\sqrt{(2\sqrt{c}+b)}\right)^2$$

- $c > 0$
- $\frac{b^2}{4} < c \qquad \left|\frac{b}{2}\right| < \sqrt{c} \longrightarrow 2\sqrt{c}+b \geq 2\sqrt{c} - |b| > 0$

$$(a^2+xb^2)(c^2+xd^2) = a^2c^2 + x^2b^2d^2 + xb^2c^2 + xd^2a^2$$
$$= (ac \pm xbd)^2 + x(bc \mp da)^2$$

$$(a+\sqrt{3}b)(c+\sqrt{3}d) = ac + 3bd + \sqrt{3}(bc+ad)$$

$$N_{\mathbb{R}}(a+\sqrt{x}b) = a^2 + xb^2$$

$$N_{\mathbb{R}}\left((a+\sqrt{x}b)(c-\sqrt{x}d)\right) = (a^2+xb^2)(c^2+xd^2)$$
$$\quad\ ||$$
$$(\quad) + \sqrt{x}(\quad)$$

---- 0 ----

$A, B, C \in \mathbb{R}[x,y]$ omogenei di grado $2, 3, 4$

$$\boxed{B^2 - 4AC = -R^2} \qquad R \in \mathbb{R}[x,y]$$

$$Az^2 + Bz + C \geq 0 \qquad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$$

$$\rightarrow \quad Az^2 + Bz + C = F^2 + G^2 \qquad F, G \in \mathbb{R}[x,y,z]$$

$$a(x) \quad \text{t.c.} \quad A(x,y) = x^2 a\left(\frac{y}{x}\right).$$

$$az^2 + bz + c \geq 0 \qquad a \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$a(x) = (x-\alpha)^2$$
$$a(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$$

$$\frac{1}{a}\left[\left(az + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}\right] = az^2 + bz + c$$

$$\frac{1}{a}\left[\left(az + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{4}\right] = az^2 + bz + c$$

$$\boxed{r^2 + b^2 = 4ac}$$

caso 1 $\quad a(x) = (x-\alpha)^2 \qquad (x-\alpha) \mid r^2 + b^2 \geq 0$

$$r^2(\alpha) + b^2(\alpha) = 0 \Rightarrow r(\alpha) = 0,\ b(\alpha) = 0 \rightarrow \begin{array}{l} r(x) = (x-\alpha)r'(x) \\ b(x) = (x-\alpha)b'(x) \end{array}$$

$$\frac{1}{a}\left[\left(az + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{4}\right] = \frac{1}{\cancel{a}}\left[\left((x-\alpha)z + \frac{b'}{2}\right)^2 \cancel{(x-\alpha)^2} + r'^2 \cancel{(x-\alpha)^2}\right] \quad \text{ok.}$$

caso 2. $\quad a(x) = (x - \alpha - i\beta)(x - \alpha + i\beta) \ \Big| \ r^2 + b^2$

$$\rightsquigarrow \quad r(\alpha+i\beta)^2 = -b(\alpha+i\beta)^2$$

caso 2.1. se $r(\alpha+i\beta)=0 = b(\alpha+i\beta)$

$r(\alpha-i\beta)=0 = b(\alpha-i\beta)$

$a \mid r$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\left[\left[2a-\frac{b}{2}\right]^2+\frac{r^2}{4}\right] = a\left[\left(z-b'\right)^2+\frac{r'^2}{4}\right] \underset{\text{f.b.}}{=} \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]\left[\quad\right]$$

$=$ somma di q.

$\square$.

caso 2.2. $r(\alpha+i\beta)\neq 0 \qquad r(\alpha+i\beta) = i\, b(\alpha+i\beta)$

$$\rightsquigarrow \quad r(\alpha+i\beta) - i\, b(\alpha+i\beta) = 0$$

$q \in \mathbb{C}[x] \qquad q(x) = r - ib$

$q(\alpha+i\beta)=0 \qquad \bar{q}(\alpha-i\beta) = r(\alpha-i\beta)+i\,b(\alpha-i\beta)$

$= \overline{r(\alpha+i\beta)} + i\,\overline{b(\alpha+i\beta)}$

$i\bar{\alpha} = -\overline{i\alpha}$

$= \overline{r(\alpha+i\beta) - i\, b(\alpha+i\beta)}$

$$\tilde{q} = \frac{q}{x-\alpha-i\beta} = r'-ib'$$

$$\frac{r^2+b^2}{a} = \frac{q\cdot\bar{q}}{a} = \frac{\tilde{q}\cdot\cancel{(x-\alpha-i\beta)}\;\bar{\tilde{q}}\cdot\cancel{(x-\alpha+i\beta)}}{\cancel{a}} =$$

$$= \tilde{q}\cdot\bar{\tilde{q}} = (r'-ib')(r'+ib') = r'^2+b'^2$$

se a e' pol. di II° grado ≥ 0 e $a \mid A^2+B^2$

$\Rightarrow \dfrac{A^2+B^2}{a} = A'^2+B'^2$ per alcuni A', B'.

$\square$.

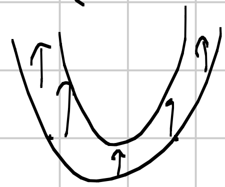
③ $(x-1)(x-2)\cdots(x-2016) = (x-1)(x-2)\cdots(x-2016)$

Qual è il minimo numero di fattori che devo elim. in modo tale che rimanga una eq. senza sol.?

Sicuramente $n \geq 2016$ perché devo cancellare ALMENO un $(x-i)$ da destra o sinistra.

Mostriamo che 2016 basta!

<u>Oss. 1</u> $\sum_{\text{destra}} \alpha_i = \sum_{\text{sinistra}} \alpha_i$.



Idea: bilanciamento locale

$$(x-1)(x-4) = (x-2)(x-3) - 2$$

Quindi se $(x-1)(x-4) > 0$ e $(x-2)(x-3) > 0$

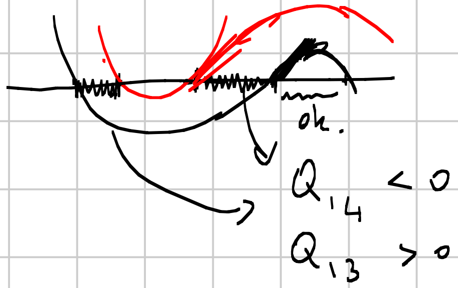
$$\Rightarrow |(x-1)(x-4)| < |(x-2)(x-3)|$$

$$\overbrace{(x-1)(x-4)(x-5)(x-8)\cdots(x-2016)}^{Q_{14}} = \overbrace{(x-2)(x-3)\cdots(x-2014)(x-2015)}^{Q_{23}}$$

Se sto fuori da tutto $(x-i)(x-(i+3)) > 0$ $(x-(i+1))(x-(i+2)) > 0$

$$|Q_{14}| < |Q_{13}|.$$

Se invece sto in un intervallo del tipo $[1,5)$



Rimane solo da controllare la zona $(2,3)$.

$$Q_{14} < 0 \qquad Q_{13} < 0$$

$$Q_{14}(2) = 0 = Q_{14}(3) \qquad |Q_{14}(x)| < |Q_{23}(x)|$$

$$\max_{x\in(2,3)} |Q_{14}(x)| \overset{?}{<} \min_{x\in(2,3)} |Q_{23}(x)|$$

$$\max |(x-2)(x-3)| = \frac{1}{4} \qquad \min |(x-1)(x-4)| = 2$$

$$\left|\frac{Q_{14}}{Q_{23}}\right| < \frac{1}{8} \prod_{i\neq j} \frac{(x-4i)(x-4i+3)}{(x-4i+2)(x-4i+1)} = \frac{1}{8}\prod_{i\neq j}\left(1 + \frac{2}{(x-4i+1)(-4i+3)}\right)$$

$$\left(\frac{3\cdot 4}{2\cdot 5}\cdot\frac{\cancel{7}\ 8}{6\ 9}\cdots\frac{1007\cdot 1008}{1006\cdot 1009}\right)$$

$$\left(1+\frac{2}{10}\right)\left(1+\frac{2}{6\cdot 9}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{1006\cdot 1009}\right)$$

(2,3) lo posso valutare come il caso precedente ma con perturbazioni al bordo prodotti [blu] > [giallo]

e poi $(x-1)(x-2016) < (x-2)(x-2015)$ ma poiché sono negativi $|(x-1)(x-2016)| > |(x-2)(x-2015)|$

$(1+\varepsilon) \leq e^{\varepsilon}$ vera $\forall \varepsilon \geq 0$

$\prod (\quad) < e^{\sum_i \frac{2}{10} + \frac{2}{6\cdot 5} + \dots + \frac{2}{1006\cdot 1009}}$

Digressione di Analisi e^x convessa

$$\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}} \quad \text{AM-GM}$$

retta tangente ad e^x in $(0,1)$ è $1+x$

$1+\alpha x \qquad \alpha = (e^x)'(0)$

$\left(f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x \right)$

$f(x) = 2^x \quad f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x$

$\longrightarrow \quad e^x \geq 1+x$

$e^{-x} \geq 1-x \qquad e^x \geq \frac{1}{1-x}$.

(4) Risp. $a = \frac{4}{9}$

$$\frac{9}{x_1} \ge \frac{9}{x_1}$$

$$\left(x_1 + (x_2 - x_1)\right)\left(\frac{1^2}{x_1} + \frac{3^2}{x_2 - x_1}\right) \ge (1+3)^2 \qquad = \frac{4^2}{x_2}$$

UGUAGLIANZA

$$\frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3 - x_2} \ge \frac{5^2}{x_3}$$

$$\frac{n-1}{x_{n-1}} = \frac{3}{x_n - x_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{3}{n-1}$$

$$\frac{(n-1)^2}{x_{n-1}} + \frac{3^2}{x_n - x_{n-1}} \ge \frac{(n+2)^2}{x_n}$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+2}{n-1}$$

$$x_n = (n+2)(n+1)n \cdot c \leftarrow \left(x_n = \frac{n+2}{n-1} x_{n-1}\right)$$

$$9\left(\quad LHS \quad \right) \ge \frac{9-1}{x_1} + \frac{16-4}{x_2} + \frac{25-9}{x_3} + \cdots + \frac{(n+2)^2}{x_n}$$

$$\ge \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+2)^2 - i^2}{x_i} = 4\left(RHS\right) \qquad \frac{n^2}{x_n} \to$$

$$LHS \ge \frac{4}{9} RHS.$$

$$LHS - \frac{4}{9} RHS \ge \frac{n^2}{x_n}$$

UGUAGLIANZA IN CS : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \ge (ac + bd)^2$

$$= \iff \frac{a}{c} = \frac{d}{d}$$

$$A(n,a) = \min_{x_n \le 1} \left\{ \frac{1}{x_1 - x_0} + \quad - \frac{1}{x_n - x_{n-1}} - a\left(\frac{2}{x_1} + \dots \frac{n+1}{x_n}\right) \right\}$$

$$A(n,a,t) = \min_{x_n \le t} \left\{ \quad \_ \quad - \quad — \quad - \quad \right\} = \frac{A(n,a)}{t}$$

$$A(n+1,a) = \min_{x_n} \left\{ \frac{A(n,a)}{x_n} + \frac{1}{1-x_n} - a(n+2) \right\}$$

$$= A(n,a) + 2\sqrt{A(n,a)} + 1 - a(n+2).$$

$$\begin{cases} A(1,a) = 1-2a \\ A(n+1,a) = A(n,a) + 2\sqrt{A(n,a)} + 1 - a(n+2) \end{cases}$$

Domanda eq. per quale a ho che $A(n,a)$ e' sempre > 0?