Stage Senior 2017 – Livello Advanced

Stampato integrale delle lezioni

Autori vari

Indice

A mista (Advanced)

Titolo nota 03/09/2017

Scambut!

SL 97/6 $n=100$ $v \in \mathbb{R}^n$ $\|v\|=1$

$$a_1^2+a_2^2+\dots+a_{100}^2=1 \Rightarrow \underbrace{a_1^2a_2+a_2^2a_3+\dots+a_{100}^2a_1}_{S} < \frac{12}{25}$$

a_i^2, a_{i+1}

$$S^2 \le \cancel{\left(\sum a_i^2\right)}^{1}\left(\sum a_i^4\right) \le 1 \qquad \boxed{S \le 1}$$

a_i, a_ia_{i+1}

$$S^2 \le \cancel{\left(\sum a_i^2\right)}^{1}\left(\sum a_i^2a_{i+1}^2\right) \le \Big(\sum_{i \text{ pari}} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i \text{ dispari}} a_i^2\Big) \le \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{S \le \frac{1}{2}}$$

$$\left(a_i,\ a_{i-1}^2+2a_ia_{i+1}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_i} = \lambda \frac{\partial g}{\partial a_i} \qquad \begin{aligned} f &= a_1^2+\dots+a_{100}^2 \\ g &= a_1^2a_2+\dots+a_{100}^2a_1 \end{aligned}$$

$$2a_i = \lambda\left(\underbrace{2a_ia_{i+1}+a_{i-1}^2}\right)$$

$$(3S)^2 \le \cancel{\left(\sum a_i^2\right)}^{1}\left(\sum (a_{i-1}^2+2a_ia_{i+1})^2\right)$$

$$= \sum a_i^4 + 4\sum a_i^2a_{i+1}a_{i+2} + 4\sum a_i^2a_{i+1}^2$$

$$\left[\sum a_i^4 \le \left(\sum a_i^2\right)^2\right] \qquad a_i^2 = x_i$$

$$\sum x_i = 1$$

$$\leq \sum a_i^4 + 2\sum a_i^2 a_{i+1}^2 + \cancel{2}\sum a_i^2 a_{i+2}^2$$

$$+4\sum a_i^2 a_{i+1}^2$$

$$\leq 1 + 4\sum a_i^2 a_{i+1}^2$$

$$\leq 1 + 4\Big(\sum_{i \text{ pari}} a_i^2\Big)\Big(\sum_{i \text{ dispari}} a_i^2\Big) \leq 2 = 1 + 4\cdot\frac{1}{4}$$

$$S \leq \frac{\sqrt{2}}{3} < \frac{12}{25}$$

Se $n \leq 4$ $\qquad a_i = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\sum a_i^2 = 1, \quad \sum b_i^2 = 1, \quad \sum a_i b_i = 0 \qquad \begin{array}{l} a_1, \dots, a_n \\ b_1, \dots, b_n \\ n \geq 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \Big(\sum a_i\Big)^2 + \Big(\sum b_i\Big)^2 \leq n$$

$$\|a\| = 1, \quad \|b\| = 1, \quad (a, b) = 0$$

$$u = (1, \dots, 1) \qquad (u, u) = n$$

$$\sum a_i \cdot 1$$

$$(a, u)^2 + (b, u)^2 \qquad \begin{array}{l} (a, u) = \alpha \\ (b, u) = \beta \end{array}$$

$$\vec{u} = \vec{r} + \mu_1 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} \qquad r_i = 1 - \mu_1 a_i - \mu_2 b_i$$

$$\mu_1 = \alpha, \quad \mu_2 = \beta$$

$$\alpha = (u,a) = (r + \alpha a + \beta b, a) = \underbrace{(r,a)}_{0} + \underbrace{\alpha(a,a)}_{\alpha} + \underbrace{\beta(b,a)}_{0}$$

$$(r,a) = 0$$

$$(u,a)^2 = \alpha^2$$

$$(u,a)^2 + (u,b)^2 \overset{?}{\leq} (u,u)$$

$$(u,u) = \alpha^2 + \beta^2 + (r,r) + 2\alpha\cancel{(a,r)} + 2\beta\cancel{(b,r)} + 2\alpha\beta\cancel{(a,b)}$$

$$\geq \alpha^2 + \beta^2$$

Algebra lineare....

$$abc = 1$$

$$\sum_c \frac{a}{b} \geq \sum_c a$$

1) Saggio

$$\sum a^2 c \overset{!}{\geq} \sum a^{5/3} b^{2/3} c^{2/3}$$

2) Artistica

$$\sum_c \frac{a^2}{ab} \implies \boxed{\sum a \geq \sum ab}$$

IMO SL 16/A7

TST 08/6

$f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$\boxed{f(x+y) \geq f(x) + y f(f(x))} \Rightarrow \nexists f$$

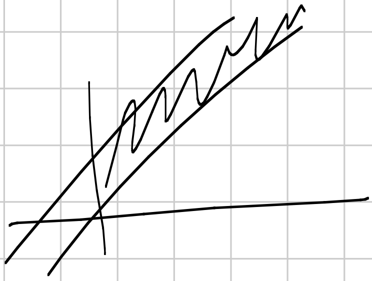
1) $\boxed{f(x+y) \geq y f(f(x))}$ $\qquad x = \varepsilon$ $\qquad$?

$x+y = f(x)$ $\qquad y = f(x) - x$

$$\underbrace{f(f(x))}_{\in \mathbb{R}^+}\left(f(x) - x - 1\right) \leq 0$$

$$f(x) \leq x+1$$

– Se $f(x) > x \Rightarrow f(x) \leq x+1$



$\lim_{x \to +\infty} f(x) \to +\infty$ $\qquad x = 1$

$$f(y+1) \geq \underbrace{y f(f(1))}$$

$y = f(z) - 1, \quad x = 1$

$$\underbrace{f(f(z))}_{+\infty} \geq \underbrace{(f(z)-1)\, f(f(1))}_{+\infty}$$

$$f(x+y) > y\,\underbrace{f(f(x))} > 5y \qquad f(f(x)) \geq 5$$

$$> 4(y+x)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(y) > 5y}$$

IMO 09/5 $\quad \boxed{f : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+}$

$$a, \; f(b), \; f(b + f(a) - 1)$$

$a = 1$ $\qquad\qquad 1, x, y \Rightarrow x = y$

$$f(b) = f(b + f(1) - 1) \qquad 1 + x > 1 \geq y + 1 > x$$

$$x+1$$

$\boxed{f(1) = 1}$

$$\boxed{a = f(f(a))} \Rightarrow f \text{ è iniettiva e surgettiva}$$

$$a + f(b) > f(b + f(a) - 1)$$

$$f(a)+f(b) > f(a+b-1)$$

$$a+b > f(f(a)+f(b)-1)$$

$a=b=2$

$$f(2f(2)-1) < 4$$

$$\overset{\shortparallel}{k} \qquad \boxed{k \le 3}$$

$$2f(2)-1 = f(k) \Rightarrow k=3$$

$a=2,\ b=3$ $\quad f(f(2)+f(3)-1) < 5$

$$f(3f(2)-2) = k \qquad k \le 4$$

$$3f(2)-2 = f(k)$$

$k=1,2,\dots$

$$f(3) = 2f(2)-1$$

$$f(4) = 3f(2)-2$$

$f(2)=1$

$\cancel{4}$ $k=4-$

$$\vdots$$

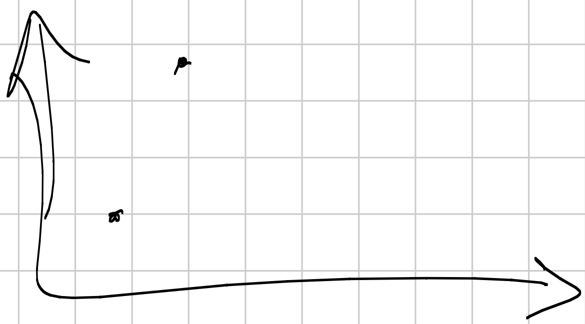
$a=2$ $\quad \boxed{f(n)=(n-1)f(2)-(n-2)} =$

$b=n$ $\quad f(f(2)+f(n)-1) = k$

$k \le n+1$

$$nf(2)-(n-1) = f(k)$$

Se $\underline{\overline{k} \le n}$ $\quad \boxed{n(\underbrace{f(2)-1}) + \cancel{c}} = (\cancel{k})(f(2)-1) + \cancel{c}$



IMO 13/5

i) $f(x)f(y) \geq f(xy)$

ii) $f(x+y) \geq f(x)+f(y)$ $\Rightarrow$ $f(x)=x$ $\quad f: \mathbb{Q}_{>0} \to \boxed{\mathbb{R}}$

iii) $\exists a>1 \quad f(a)=a \quad a \in \mathbb{Q}_{>0}$

ii) $\boxed{f(nx) \geq nf(x)}$ $\quad f(1)\geq 1$

$f(n) \geq nf(1) \geq n$

$f(n) \geq n$

$n \in \mathbb{N}^*$

$x=1, y=a$

i) $f\left(\frac{p}{q}\right) \overset{>0}{f(q)} \geq \overset{>0}{f(p)}$ $\Rightarrow f(r)>0$

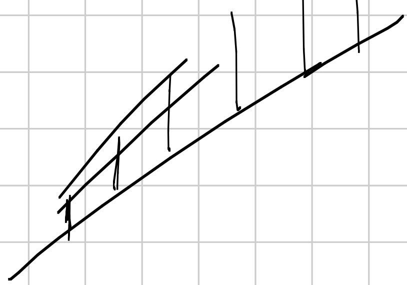
$f: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{R}^+$

ii) $f(x+y) \geq f(x)+f(y) > f(x)$

f è crescente

$\exists n : f(n) > n \qquad f(n) = n + \varepsilon$

$f(mn) \geq m f(n) = mn + m\varepsilon$



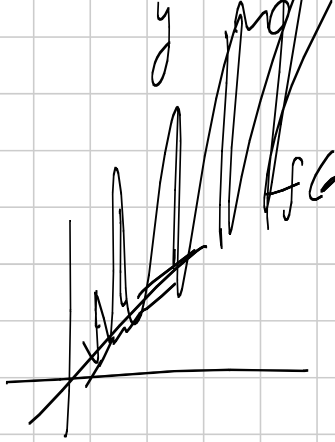
$f(n) = n$

$[f(x)]^n \geq f(x^n)$

$x = a \qquad f(a^n) \leq a^n$

i) $x = a \qquad a f(y) \geq f(ay)$

$y = a$



$f(a^2) \leq a^2$

$f(n) \geq n$

$f(a^n) \leq a^n$

$b_n = \lfloor a^n \rfloor$

$$\lfloor a^n \rfloor \le f(\lfloor a^n \rfloor) \le f(a^n) \le a^n < \lfloor a^n \rfloor + 1$$

$$\boxed{b_n \le f(b_n) \le b_n + 1}$$

Se ci fosse un n_0 t.c. $f(n_0) \ge n_0 + 1$ NO

$$f(x+n) \ge f(x) + f(n) \ge f(x) + n + 1$$

$$f(x+y) \ge x+y+1$$

$$\Rightarrow \quad f(n) \ge n+1 \qquad \text{con } n \ge n_0$$

$$f(n) < n+1$$

$$\boxed{f(n) \ge n + \frac{1}{m}}$$

$$f(nm) \ge nm + n \cdot \frac{1}{m} = nm + 1$$

$$\Rightarrow \quad f(n) = n + \varepsilon$$

$$\boxed{f(n) = n}$$

i) $f\left(\frac{p}{q}\right) f(q) \ge f(p)$

$$f\left(\frac{p}{q}\right) \ge \frac{p}{q}$$

ii) $f(nx) \ge n f(x)$ $\qquad x = \frac{m}{n}$

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \leq \frac{m}{n} \quad \checkmark$$

— o — o —

TST USA SL 2004 $\quad f: \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$

$$\begin{cases} \text{i)} & f(x) \leq 2(x+1) \\ \text{ii)} & x f(x+1) = f(x)^2 - 1 \end{cases}$$

IMO 2011/3

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad f(x+y) \leq y f(x) + f(f(x)) \implies \boxed{\forall x \leq 0 \quad f(x) = 0}$

— o — o —

TST USA SL 2004

i) $f(x) \leq 2(x+1)$

ii) $xf(x+1) = f(x)^2 - 1$! $\qquad f: \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$

$f(x) \leq 2(x+1) \rightsquigarrow \qquad f(x) \leq x+1$?

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \leq 2x^2 + 4x + 1$$
$$< 2(x+1)^2$$
$$\Rightarrow f(x) < \sqrt{2}(x+1) \qquad \smile$$

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \leq x\sqrt{2}(x+2) + 1$$
$$< \sqrt{2}(x+1)^2$$

$$f(x) \leq \sqrt[4]{2}(x+1)$$

$$\boxed{f(x) \leq \sqrt[2^n]{2}(x+1)} \rightsquigarrow$$

$\Rightarrow f(x) \leq x+1$

$f(x_0) = x_0 + 1 + \varepsilon$

$\boxed{f(x) \geq x+1}$

$$f(x)^2 = xf(x+1) + 1 \geq x+1 > x \qquad f: \mathbb{R}_{\geq 1} \to \mathbb{R}_{\geq 1}$$

!

$$f(x) > \sqrt{x}$$

$$f(x)^2 = \underbrace{x\sqrt{x+1}+1} > x^{\frac{3}{2}}$$

$$\boxed{f(x) > x^{\frac{3}{4}}} \Rightarrow f(x) \geq x^{1-\frac{1}{2^n}}$$

$$f(x) \geq x$$

$$f(x)^2 = xf(x+1)+1 \geq x(x+1)+1$$

$$> (x+1/2)^2$$

$$f(x) > x+\frac{1}{2}$$

$$f(x) > x+1-\frac{1}{2^n}$$

$$\boxed{\Rightarrow f(x) \geq x+1}$$

$\boxed{\text{IMO } 2011/3}$

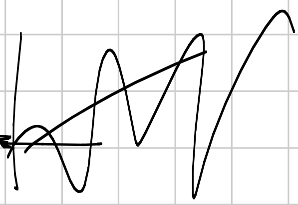
$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\qquad f(x+y) \le yf(x) + f(f(x))$

$\Longrightarrow \quad f(x)=0 \quad \forall x \le 0$

$f(x) \equiv 0$ ✓ $\qquad f(a) \neq 0$

$f(x)\left(f(x) - [illegible]\right) \geq 0$

$x \le 0$



$f(a) < 0$

$f(x) = f(a+x-a) \le (x-a)\underbrace{f(a)}_{<0} + \underbrace{f(f(a))}_{\text{boh}}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) \le +\infty$

$\boxed{f(a)>0}$ $\qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Longrightarrow \exists a' : f(a') < 0$

?

!

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

$f(x+y) \le yf(x) + f(f(x))$

$x \to +\infty \qquad f(x) \to -\infty$

$x \to -\infty \qquad f(x) \to -\infty$

$x \to +\infty \ \Downarrow \ f(f(x)) \to -\infty$

$$f(0) = f(-y+y) \leq y f(-y) + f(f(-y)) = -\infty$$

$$\lim_{y \to +\infty} f(0) = -\infty \quad !!!$$

$$\boxed{f(a) \leq 0} \quad \forall a \in \mathbb{R} \qquad f(a) = 0 \quad \forall a \leq 0$$

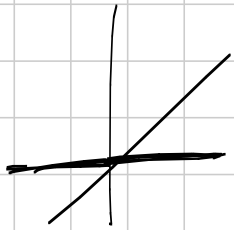
$x+y = f(x)$ $\qquad y = f(x) - x$

usiamo che $f(x) \neq 0$

$$(f(x) - x)\underbrace{f(x)}_{} \geq 0$$

Supponiamo per assurdo che $\boxed{f(x) < x}$

$f(b) = 0$



$$f(0) = f(x-x) \leq -x f(x) + f(f(x)) \leq -x^2$$

assurdo $\nexists b : f(b) = 0$

$x+y = b \quad \Downarrow \quad 0 = f(b) = f(b+0) \leq \cancel{f(b)} + f(f(b)) = f(0)$

$$f(0) \geq 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$x+y = 0$

$y = -x \quad \Downarrow \quad 0 = f(0) = f(x-x) \leq -x f(x) + f(f(x)) \leq -x f(x)$

$f(x) \geq 0 \to$ ok

TST Vietnam '03

IMO SL 09/5

Algebra Advanced 2 - Senior 2017

Sino_the_Wolf

Titolo nota 05/09/2017

1. (pb. di Hilbert avanzato) Dimostrare che se $p(x) \in \mathbb{R}[x]$ e' tale che $p(x) \geq 0 \quad \forall\, x \geq 0$ allora $\exists\, a, b \in \mathbb{R}[x]$ tali che $p(x) = a(x)^2 + x\, b(x)^2$

China TST '17

2. Dati $A, B, C, R \in \mathbb{R}[x,y]$ omogenei di grado rispettivamente $2, 3, 4, 3$. tali che $B^2 - 4AC = -R^2$. Dimostrare che se $A(x,y)z^2 + B(x,y)z + C(x,y) \geq 0 \quad \forall\, x, y, z \in \mathbb{R}$ allora $A(x,y)z^2 + B(x,y)z + C(x,y) = F(x,y,z)^2 + G(x,y,z)^2$ per qualche $F, G \in \mathbb{R}[x,y,z]$.

3. IMO 16/5

4. IMO SL 16/8

5. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{2} < \lambda < 1$ tale che $(2\lambda-1)(3\lambda-1) \cdots (n\lambda-1) = 1$. $(n \geq 3)$
Dimostrare che $\left(\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{3\lambda}{3\lambda-1}\right)^3 \cdots \left(\frac{n\lambda}{n\lambda-1}\right)^n > n^n$
Dimostrare che se $n \geq 7$ allora $\left(\frac{2\lambda}{2\lambda-1}\right)^2 \left(\frac{3\lambda}{3\lambda-1}\right)^3 \cdots \left(\frac{n\lambda}{n\lambda-1}\right)^n > (n!)^2$.

Problema di Hilbert

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ t.c. $p(x) \geq 0 \quad \forall \; x \in \mathbb{R}$

Claim $\exists$ $a, b \in \mathbb{R}[x]$ t.c. $p(x) = a(x)^2 + b(x)^2$.

Casi semplici

grado 1 o grado 2.

grado 1 non può essere perché il grado di p è sicuramente pari (altrimenti $\lim\limits_{\substack{x \to \infty \\ x \to -\infty}} p(x) = -\infty$).

Di grado 2. se $p(x) \geq 0$.

ho una radice doppia α: $p(x) = a(x-\alpha)^2$ ok.

non ho radici reali $a \geq 0$

$$p(x) = a \cdot (\underbrace{x-\alpha}-i\underbrace{\beta})(\underbrace{x-\alpha}+i\underbrace{\beta})$$

$$= a\left[(x-\alpha)^2 + \beta^2\right] =$$

$$= \left[\sqrt{a}(x-\alpha)\right]^2 + (\sqrt{a}\,\beta)^2. \quad \text{ok.}$$

Fattorizzazione in $\mathbb{R}[x]$.

$$p(x) = a\, p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdot q_1 \cdots q_k$$

$p_i(x) = x - \alpha_i$

$q_i(x) =$ pol. di 2° grado senza radici reali

Lemma Se α è radice di $p(x)$ allora α ha molteplicità pari

Dim. $p(x) = (x-\alpha)^n \cdot r(x) \qquad r(\alpha) \neq 0$

$r(\alpha) > 0$ per $x < \alpha$ ma abbastanza vicino ad α

avrò ancora $r(x) > 0$

[permanenza del segno: se f è continua e $f(x) > 0$ allora in un intorno di x ho $f(y) > 0 \quad \forall \ |y - x| < \varepsilon$]

$$p(x) = (x-\alpha)^n r(x)$$

$$\underbrace{p(x)}_{\geq 0} \qquad \underbrace{r(x)}_{> 0}$$

$$\rightsquigarrow (x-\alpha)^n \geq 0 \rightsquigarrow n \text{ pari}.$$

$$p(x) = \prod (x-\alpha_i)^{2n_i} \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_J$$

$$p(x) = \prod \left[\left((x-\alpha_i)^{n_i}\right)^2 + 0^2\right] \cdot \left(\alpha_1^2(x) + \beta_1^2\right) \cdot \left(\alpha_2^2(x) + \beta_2^2\right) \ldots$$

Identità di Fibonacci $(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$

(Valida in un anello qualsiasi)

Concludo per induzione.

Problema di Hilbert "positivo"

$p(x) \in \mathbb{R}[x]$ t.c. $p(x) \geq 0 \quad \forall \ x \geq 0$

$\rightsquigarrow \quad p(x) = a(x)^2 + x\, b(x)^2 \quad$ per qualche $a, b \in \mathbb{R}[x]$

$$p(x) = \underbrace{q_1 \cdot q_2 \cdots q_n}^{\text{termini di 2° grado irr. in } \mathbb{R}} \cdot \underbrace{p_1 \cdot p_2 \cdots p_J}_{\text{lineari}}$$

per quelli lineari distinguiamo 2 casi

$p_i(x) = x - \alpha \quad \alpha > 0 \rightsquigarrow$ stesso ragionamento di prima α ha molteplicità pari

$p_i(x) = x - \alpha \quad \alpha \leq 0$

$$(x-\alpha)^{2n} = \left((x-\alpha)^n\right)^2 + x\cdot 0^2 \qquad \Leftarrow \text{con radici positive ok.}$$

$$x-\alpha = \left(\sqrt{-\alpha}\right)^2 + x\cdot 1^2 \qquad \alpha \le 0 \qquad x+1 = 1^2 + x\cdot 1^2$$

$$(x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta) = (x-\alpha)^2 + \beta^2 \neq a(x)^2 + x\cdot b(x)^2$$

$$q_1(x) = x^2+bx+c = (x-\sqrt{c})^2 + x\cdot\left(2\sqrt{c}+b\right) = (x-\sqrt{c})^2 + x\cdot\left(\sqrt{2\sqrt{c}+b}\right)^2$$

- $c > 0$
- $\frac{b^2}{4} < c \qquad \left|\frac{b}{2}\right| < \sqrt{c} \longrightarrow 2\sqrt{c}+b \ge 2\sqrt{c} - |b| > 0$

$$(a^2+xb^2)(c^2+xd^2) = a^2c^2 + x^2b^2d^2 + xb^2c^2 + xd^2a^2$$
$$= (ac \pm xbd)^2 + x(bc \mp da)^2$$

$$(a+\sqrt{3}b)(c+\sqrt{3}d) = ac+3bd + \sqrt{3}(bc+ad)$$

$$N_{\mathbb{R}}\left(a+\sqrt{x}b\right) = a^2+xb^2$$

$$N_{\mathbb{R}}\left((a+\sqrt{x}b)(c-\sqrt{x}d)\right) = (a^2+xb^2)(c^2+xd^2)$$
$$\qquad \shortparallel$$
$$(\quad) + \sqrt{x}\,(\quad)$$

$A, B, C \in \mathbb{R}[x,y]$ omogenei di grado $2, 3, 4$

$\boxed{B^2 - 4AC = -R^2}$ $R \in \mathbb{R}[x,y]$

$Az^2 + Bz + C \geq 0 \quad \forall\, x,y,z \in \mathbb{R}$

$\rightsquigarrow \quad Az^2 + Bz + C = F^2 + G^2 \qquad F, G \in \mathbb{R}[x,y,z]$

$a(x)$ t.c. $A(x,y) = x^2 a\left(\frac{y}{x}\right)$.

$az^2 + bz + c \geq 0 \qquad a \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$a(x) = (x-\alpha)^2$

$a(x) = (x-\alpha)^2 + \beta^2$

$$\frac{1}{a}\left[\left(az + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4}\right] = az^2 + bz + c$$

$$\frac{1}{a}\left[\left(az + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{4}\right] = az^2 + bz + c$$

$\boxed{r^2 + b^2 = 4ac}$

caso 1 $\quad a(x) = (x-\alpha)^2 \qquad (x-\alpha) \mid r^2 + b^2 \geq 0$

$r^2(\alpha) + b^2(\alpha) = 0 \Rightarrow r(\alpha) = 0,\ b(\alpha) = 0 \rightsquigarrow r(x) = (x-\alpha)r'(x)$

$b(x) = (x-\alpha)b'(x)$

$$\frac{1}{a}\left[\left(az + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{r^2}{4}\right] = \frac{1}{\cancel{a}}\left[\left((x-\alpha)z + \frac{b'}{2}\right)^2 \cancel{(x-\alpha)^2} + r'^2 \cancel{(x-\alpha)^2}\right] \quad \text{ok.}$$

caso 2. $\quad a(x) = (x-\alpha-i\beta)(x-\alpha+i\beta) \mid r^2 + b^2$

$$\rightsquigarrow \quad r(\alpha+i\beta)^2 = -b(\alpha+i\beta)^2$$

caso 2.1. se $r(\alpha+i\beta)=0=b(\alpha+i\beta)$

$r(\alpha-i\beta)=0=b(\alpha-i\beta)$

$a \mid r$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\left[\left[2a-\frac{b}{2}\right]^2+\frac{r^2}{4}\right] = a\left[\left(z-b'\right)^2+\frac{r'^2}{4}\right] \underset{\text{i.p.}}{=} \left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]\left[\quad\right]$$

$=$ somma di q.

$\square$.

caso 2.2. $r(\alpha+i\beta)\neq 0 \qquad r(\alpha+i\beta) = i\, b(\alpha+i\beta)$

$$\rightsquigarrow \quad r(\alpha+i\beta) - i\, b(\alpha+i\beta) = 0$$

$q \in \mathbb{C}[x] \qquad q(x) = r - ib$

$q(\alpha+i\beta)=0 \qquad \bar{q}(\alpha-i\beta) = r(\alpha-i\beta)+i\,b(\alpha-i\beta)$

$= \overline{r(\alpha+i\beta)} + i\,\overline{b(\alpha+i\beta)}$

$i\bar{\alpha} = -\overline{i\alpha}$ $= \overline{r(\alpha+i\beta) - i\,b(\alpha+i\beta)}$

$$\tilde{q} = \frac{q}{x-\alpha-i\beta} = r' - ib'$$

$$\frac{r^2+b^2}{a} = \frac{q\cdot\bar{q}}{a} = \frac{\tilde{q}\cdot\cancel{(x-\alpha-i\beta)}\;\bar{\tilde{q}}\cdot\cancel{(x-\alpha+i\beta)}}{\cancel{a}} =$$

$$= \tilde{q}\cdot\bar{\tilde{q}} = (r'-ib')(r'+ib') = r'^2+b'^2$$

se a è pol. di II° grado ≥ 0 e $a \mid A^2+B^2$

$$\Rightarrow \frac{A^2+B^2}{a} = A'^2+B'^2 \quad \text{per alcuni } A', B'.$$

$\square$.

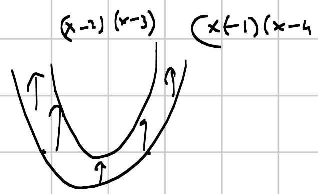
3) $(x-1)(x-2)\dots(x-2016) = (x-1)(x-2)\dots(x-2016)$

Qual è il minimo numero di fattori che devo eliminare in modo tale che rimanga un'eq. senza sol.?

Sicuramente $n \geq 2016$ perché devo cancellare ALMENO un $(x-i)$ da destra o sinistra.

Mostriamo che 2016 basta!

Oss. 1 $\displaystyle\sum_{\text{destra}} \alpha_i = \sum_{\text{sinistra}} \alpha_i$.



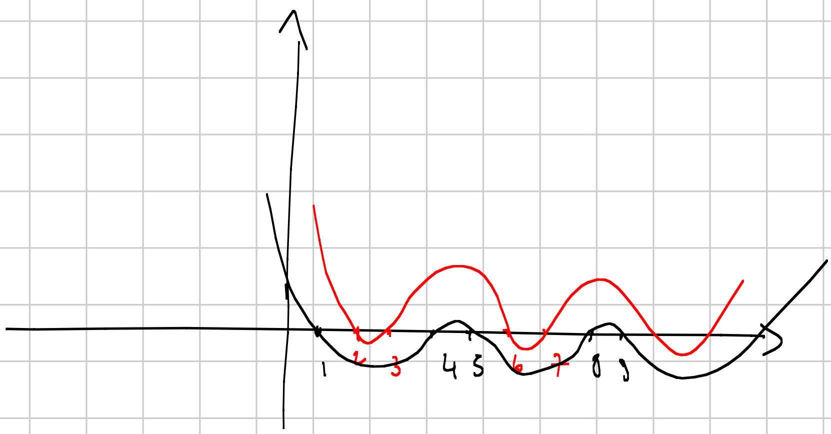
Idea: bilanciamento locale

$$(x-1)(x-4) = (x-2)(x-3) - 2$$

Quindi se $(x-1)(x-4) > 0$ e $(x-2)(x-3) > 0$

$$\Rightarrow |(x-1)(x-4)| < |(x-2)(x-3)|$$

$$\underbrace{(x-1)(x-4)}_{Q_{14}}(x-5)(x-8)\dots(x-2016) = \underbrace{(x-2)(x-3)}_{Q_{23}}\dots(x-2014)(x-2015)$$



Se sto fuori da tutto $(x-i)(x-(i+3)) > 0$ $(x-(i+1))(x-(i+2)) > 0$

$$|Q_{124}| < |Q_{13}|.$$

Se invece sto in un intervallo del tipo $[1,5)$

$Q_{14} < 0$

$Q_{13} > 0$

Rimane solo da controllare la zona $(2,3)$

$Q_{14} < 0 \qquad Q_{13} < 0$

$Q_{14}(2) = 0 = Q_{14}(3) \qquad |Q_{14}(x)| < |Q_{23}(x)|$

$$\max_{x\in(2,3)} |Q_{14}(x)| \overset{?}{<} \min_{x\in(2,3)} |Q_{23}(x)|$$

$$\max |(x-2)(x-3)| = \frac{1}{4} \qquad \min |(x-1)(x-4)| = 2$$

$$\left|\frac{Q_{14}}{Q_{23}}\right| < \frac{1}{8} \prod_{i\neq j} \frac{(x-4i)(x-4i+3)}{(x-4i+2)(x-4i+1)} = \frac{1}{8}\prod_{i\neq j}\left(1+\frac{2}{(x-4i+1)(-4i+3)}\right)$$

$$\left(\frac{3\cdot 4}{2\cdot 5}\cdot\frac{7\cdot 8}{6\cdot 9}\cdots\frac{1007\cdot 1008}{1006\cdot 1009}\right)$$

$$\left(1+\frac{2}{10}\right)\left(1+\frac{2}{6\cdot 9}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{1006\cdot 1009}\right)$$

$(2,3)$ lo posso valutare come il caso precedente ma con perturbazioni al bordo prodotti $[\text{blu}] > [\text{giallo}]$

e poi $(x-1)(x-2016) < (x-2)(x-2015)$ ma poiché sono negativi $|(x-1)(x-2016)| > |(x-2)(x-2015)|$

$(1+\varepsilon) \leq e^{\varepsilon}$ vera $\forall\, \varepsilon \geq 0$

$$\prod (\quad) < e^{\sum_i \frac{2}{1\cdot 4} + \frac{2}{6\cdot 9} + \dots + \frac{2}{1006\cdot 1009}}$$

Digressione di Analisi e^x convessa

$$\frac{e^x + e^y}{2} \geq e^{\frac{x+y}{2}} \qquad \text{AM-GM}$$

retta tangente ad e^x in $(0,1)$ è $1+x$

$1+\alpha x \qquad \alpha = (e^x)'(0) \qquad \left(\begin{array}{ll} f(x) = e^x & f'(x) = e^x \\ f(x) = 2^x & f'(x) = \ln 2 \cdot 2^x \end{array} \right)$

$\rightsquigarrow \quad e^x \geq 1+x$

$$e^{-x} \geq 1-x \qquad e^x \geq \frac{1}{1-x}.$$

(4) Risp. $a = \frac{4}{9}$

$$\frac{9}{x_1} \geq \frac{9}{x_1}$$

$$\left(x_1 + (x_2 - x_1)\right)\left(\frac{1^2}{x_1} + \frac{3^2}{x_2 - x_1}\right) \geq (1+3)^2 = \frac{4^2}{x_2}$$ UGUAGLIANZA

$$\frac{2^2}{x_2} + \frac{3^2}{x_3 - x_2} \geq \frac{5^2}{x_3}$$

$$\frac{n-1}{x_{n-1}} = \frac{3}{x_n - x_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_{n-1}} = \frac{3}{n-1}$$

$$\frac{(n-1)^2}{x_{n-1}} + \frac{3^2}{x_n - x_{n-1}} \geq \frac{(n+2)^2}{x_n}$$

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{n+2}{n-1}$$

$$x_n = (n+2)(n+1)n \cdot c \leftarrow \left(x_n = \frac{n+2}{n-1} x_{n-1}\right)$$

$$9\left(\quad LHS \quad\right) \geq \frac{9-1}{x_1} + \frac{16-4}{x_2} + \frac{25-9}{x_3} + \dots$$

$$+ \frac{(n+2)^2}{x_n}$$

$$\geq \sum_{i=1}^{n} \frac{(i+2)^2 - i^2}{x_i} = 4\,(RHS) \qquad \frac{n^2}{x_n} \to$$

$$LHS \geq \frac{4}{9} RHS.$$

$$LHS - \frac{4}{9} RHS \geq \frac{n^2}{x_n}$$

UGUAGLIANZA IN CS : $(a^2+b^2)(c^2+d^2) \geq (ac+bd)^2$

$$= \iff \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$A(n,a) = \min_{x_n \le 1} \left\{ \frac{1}{x_1 - x_0} + \quad - \quad \frac{1}{x_n - x_{n-1}} - a\left(\frac{2}{x_1} + \dots \frac{n+1}{x_n} \right) \right\}$$

$$A(n,a,t) = \min_{x_n \le t} \left\{ \quad \_ \quad \_ \quad \_ \quad \_ \quad \right\} = \frac{A(n,a)}{t}$$

$$A(n+1,a) = \min_{x_n} \left\{ \frac{A(n,a)}{x_n} + \frac{1}{1-x_n} - a(n+2) \right\}$$

$$= A(n,a) + 2\sqrt{A(n,a)} + 1 - a(n+2).$$

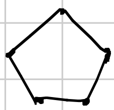
$$\begin{cases} A(1,a) = 1-2a \\ A(n+1,a) = A(n,a) + 2\sqrt{A(n,a)} + 1 - a(n+2) \end{cases}$$

Domanda eq. per quali a ho che $A(n,a)$ e' sempre > 0?

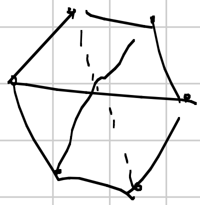
Titolo nota 03/09/2017

Qual è il minimo $n \geq 5$ per cui esiste un grafo (connesso) su n vertici senza triangoli in cui ogni coppia di vertici non adiacenti ha esattamente k punti adiacenti in comune?

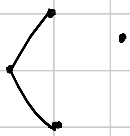
$k=1$



6?

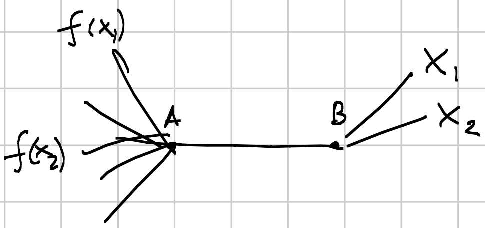


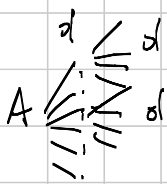
No



$k=2$ BMO 1994/4

Lemma tutti i vertici hanno lo stesso grado d





Contiamo gli amici degli amici di A

$$d^2-(d-1)-(n-d-1)=n-d$$

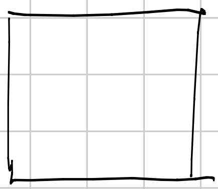
$d^2+d=2n-2$ $\quad d \geq 4$

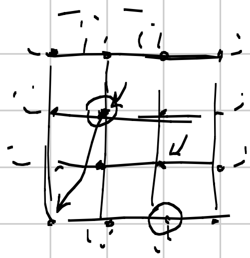
$2d \leq n$

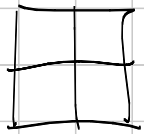
d n

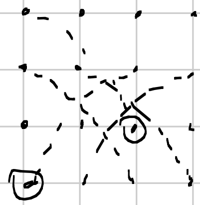
4, 11 ? si esclude a mano

5, 16









$\{0,1\}^4$

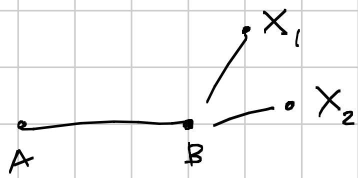
$a\ b\ c\ d$

$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}$

$k=3$?

$f(x)$

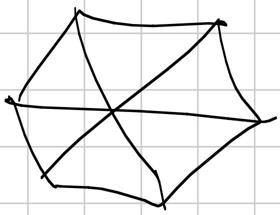
$g(x)$

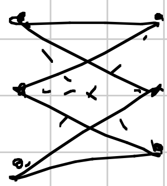


d $\qquad d^2-(d-1)-2(n-d-1)=n-d$

3, 6 funziona $\qquad d^2+2d=3n-3 \qquad d^2+(k-1)d=kn-k$

$2d\le n$





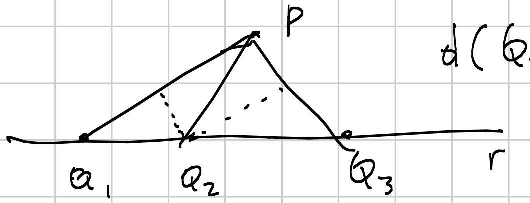
Combinatoria in
cui le configurazioni
possono variare con continuità.

Bulgaria 2013 min S t.c. se coloro di 3 colori
i punti di $\mathbb{Z}^2$ $\exists$ sempre un triangolo monocromatico
di area S?

Teorema di Sylvester: S insieme finito nel piano
di $n \geq 3$ punti t.c. $\forall$ coppia $P, Q \in S$ $\exists$ terzo punto di S
sulla retta di P e Q $\Rightarrow$ tutti i punti di S sono
allineati

Dim. $\min_{P,Q} \{ d(T, r(P,Q)) \mid T \in S, P, Q \in S \} = m$.

Se $m > 0$ si trova T' e $r(P', Q')$ t.c. $d(T', r(P',Q')) < m$.

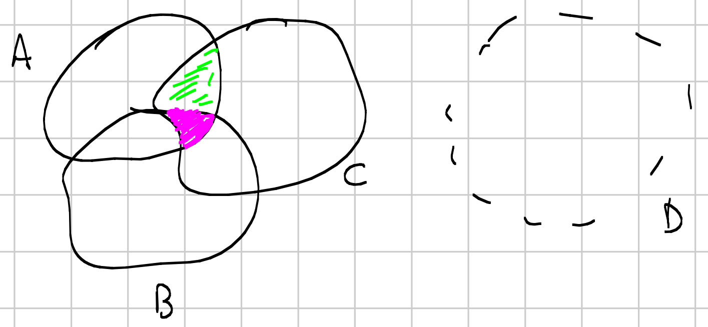


$d(Q_2, r(P,Q_1))$ o $d(Q_2, r(P,Q_3))$ o
$d(Q_3, r(P,Q_2))$ è $< m$.

Teorema di Helly Se in $\mathbb{R}^2$ c'è una famiglia di
convessi che si intersecano a 3 a 3, si intersecano
tutti

(Su $\mathbb{R}$ con intervalli che si inters. a 2 a 2,
in $\mathbb{R}^n$ con convessi " " a $n+1$ a $n+1$)

Dim.

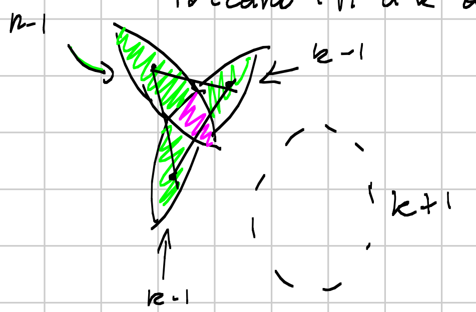


se

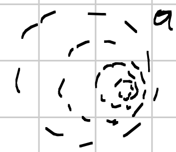
$C \supset A \cap B$ ok $D \cap A \cap B (\neq \emptyset) \cap C \neq 0$

se no, le interv. a 2 a 2 $\cap$ a 3 a 3 (o a k-1 a k-1 nel passo induttivo meno l'$\cap$ a k a k)

sono non vuote e toccano l'$\cap$ a k a k.

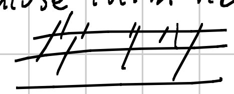


e con infinite regioni? chiuse o aperte?



aperte no

chiuse illim. no



semipiani con bordo $\to \infty$

Altro esempio: il Windmill Problem

IMO 2011/2

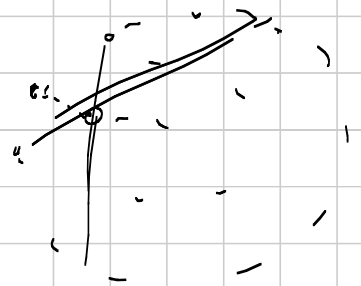
---

nel piano n punti bianchi mai all. a 3 a 3
n punti neri

E' poss. collegarli con n segmenti ciascuno con estremi dei due colori che non si intersecano a 2 a 2

BMO 2010/3 n punti t.c. ogni triangolo è $\subset$ in una striscia larga 1. Allora sono tutti $\subset$ in
" " " 2

Idea (forse) x gli n punti bianchi e n neri:



Se sul bordo dell'inviluppo ce ne sono 2 di colori diversi, induz.

Se no?

n punti P_i $d(P_i, P_j) \leq 1 \Rightarrow \exists$ cerchio di raggio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ che li contiene tutti.

IMO 2013/2 4027 punti non all. a 3 a 3 2014 blu 2013 rossi

Qual è il min numero di rette necessarie a dividere il piano in regioni monocromatiche ovvote?

RMM 2011/5 N punti t.c. $\forall$ 2 punti p, q $\exists$ permutazione σ per cui $d(p, P_i) = d(q, P_{\sigma(i)})$ $\forall i$. Quali sono le possibili configurazioni?

RUS 2013 n rette mai a 2 a 2 parallele (nel piano) e mai a 3 a 3 concorrenti; dim. che $\exists$ spezzata semplice aperta che ha un segm. per ogni retta

ROM TST 2012 Trovare gli $S \subset \mathbb{R}^2$ finiti t.c. se $A, B, C, D \in S$ e $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{Z\} \Rightarrow Z \in S$

IRN 2011 TST n punti non tutti allineati, ℓ retta sia <u>buona</u> se $\exists$ partiz. di $\{1, \dots, n\} = A \cup B$ t.c.

$$\sum_{i \in A} d(\ell, P_i) = \sum_{j \in B} d(\ell, P_j)$$

. Dim. che esistono infiniti punti per cui passano $n+1$ rette buone

HKG 2008 2008 circ. $C_1 \dots C_{2008}$ congruenti mai tangenti a 2 a 2 e ogni C_i interseca almeno 3 delle altre 2007. Qual è il min. numero di punti di intersezione?

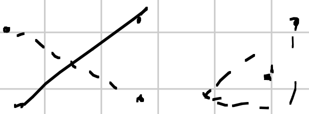
As-Pac 204 5 punti nel piano. Qual è il massimo del minimo degli angoli che possono definire?

Per induzione su $N = \#$ insiemi

$N = 4$ $\quad S_1 \dots S_4 \quad I_k = S_1 \cap S_2 \cap \overbrace{S_3}^{k} \cap S_4 = \bigcap_{i \neq k} S_i$

$I_k \neq \emptyset$ e convesso (ip. induttiva) $\quad P_k \in I_k$

l'inviluppo convesso è quadrilatero / triangolo



In ambedue i casi $\exists A, B$ t.c. $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ $\quad A \cap B = \emptyset$

t.c. $\mathrm{hull}(P_k, k \in A) \cap \mathrm{hull}(P_k, k \in B) \neq \emptyset$. Sia Q un punto di $\nearrow$. Dico che $Q \in \bigcap S_i$. Infatti

$P_k \in I_k \subset S_i \quad \forall k \neq i$ $\qquad i \in A$, $S_i \ni P_k$ $k \in B$

quindi $S_i \supset \mathrm{hull}(P_k, k \in B) \ni Q$

$i \in B$ . . . . $\Rightarrow S_i \ni Q$

Passo induttivo

S_i $\quad i = 1 \ldots N+1$

$T_i = S_i \quad i = 1 \ldots N-1$

$T_N = S_N \cap S_{N+1}$

$T_1 \ldots T_N$ rispettano le ipotesi

: convessi ovvio

$\cap$ a 3 a 3 se $i < N$ ok, se c'è anche T_N per il passo base.

$\Rightarrow \bigcap T_i \neq \emptyset$.

$\bigcap\limits_{i=1}^{N+1} S_i$

S17 - Combinatoria Advanced 3 ?

Titolo nota 07/09/2017

INVARIANTI

[Balli] [Miglio]

1) SU UNA CALCOLATRICE CON INFINITA MEMORIA CI SONO SOLO I TASTI.

[I NUMERI a, b POSSONO ESSERE RIPETUTI]

$+$, $-$, $^\wedge(-1)$ E LE PARENTESI.

L'INVERSO

DATI DUE NUMERI a E b ALLA CALCOLATRICE, È SEMPRE POSSIBILE TROVARE ab?

REALI

2) CI SONO n SEGMENTI IN POSIZIONE GENERALE, CHE SI INTERSECANO IN UN PUNTO INTERNO TUTTI A DUE A DUE. GEOFF DISPONE UNA RANA SU UNA ESTREMITÀ DI OGNI SEGMENTO E, OGNI SECONDO, LE RANE AVANZANO FINO ALLA SUCCESSIVA INTERSEZIONE. SE DUE RANE OCCUPANO LO STESSO PUNTO, GEOFF MUORE.

a) SI DIMOSTRI CHE, SE n È DISPARI, GEOFF PIÙ SALVARSI

b) SI DIMOSTRI CHE, SE n È PARI, GEOFF NON HA SCAMPO

[IMO 6, 2016]

3. SIANO DATI $n \geq 4$ PUNTI NEL PIANO IN POSIZIONE GENERALE, COLLEGATI IN QUALCHE MODO DA n SEGMENTI, IN MODO CHE DA OGNI VERTICE NE ESCANO DUE. UNA MOSSA CONSISTE NELLO SCEGLIERE 2 SEGMENTI AB E CD CHE SI INTERSECANO IN UN LORO PUNTO INTERNO E SOSTITUIRLI CON I SEGMENTI AC E BD. SI MOSTRI CHE IL GIOCO FINISCE PRIMA DI $\frac{1}{4}n^3$ MOSSE.

[IMO2014SL7]

4. SU UN $2n$-AGONO REGOLARE SONO DISPOSTE $2n$ MONETE. UNA MOSSA CONSISTE NELLO SCEGLIERE UN LATO E SCAMBIARE LE DUE MONETE SU QUEL LATO. SI SUPPONGA CHE, DOPO UN PO' DI MOSSE, OGNI COPPIA DI MONETE SIA STATA SCAMBIATA ESATTAMENTE UNA VOLTA. SI MOSTRI CHE UN LATO NON È MAI STATO SCELTO.

[RMM 6 2013]

5. IN $\mathbb{R}^3$ SONO SCELTI n PUNTI A 4 A 4 NON COMPLANARI E DIVISI IN DUE PARTI $\mathcal{A}$ E $\mathcal{B}$. GLI n PUNTI SONO COLLEGATI DA $n-1$ SEGMENTI, OGNUNO CON UN VERTICE IN $\mathcal{A}$ E UNO IN $\mathcal{B}$ IN MODO DA FORMARE UN ALBERO BIPARTITO. UNA MOSSA CONSISTE NELLO SCEGLIERE 2 SEGMENTI A_1B_1, B_2A_2, A_2B_2 TALI CHE $|A_1B_1|+|A_2B_2| > |A_1B_2|+|B_2A_1|$ E SOSTITUIRE

$A_1 B_1$ CON $A_1 B_2$. SI DIMOSTRI CHE SI POSSONO FARE SOLO UN NUMERO FINITO DI MOSSE.

[RMM 6 2016]

DOUBLE COUNTING

1. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{N} \tau(k) = \sum_{k=1}^{N} \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

dove $\tau(k)$ è il numero di divisori di k

2. Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{N} \varphi(k) \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = \binom{n+1}{2}$$

3. a. Dimostrare che, per α irrazionale,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor}}$$

b. Se $\alpha + \beta = 1$, α e β irrazionali positivi, allora gli insiemi

$$\left\{ \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \right\} \quad e \quad \left\{ \left\lfloor \frac{n}{\beta} \right\rfloor \right\}$$

partizionano $\mathbb{N}^+$

4. SIANO DATI n PUNTI IN POSIZIONE GENERALE NEL PIANO. UNA TRIANGOLAZIONE T CONSISTE IN UNA CONFIGURAZIONE DI SEGMENTI CON VERTICI SUGLI n PUNTI TALE CHE NESSUNA COPPIA DI SEGMENTI DI T SI INTERSECHI IN PUNTI INTERNI E OGNI SEGMENTO CON VERTICI SUGLI n PUNTI INTERSECHI UN SEGMENTO DI T. SI DIMOSTRI CHE T È FORMATO DA UN NUMERO DI TRIANGOLI CHE NON DIPENDE DA T

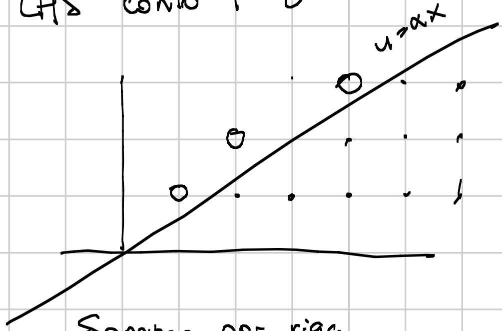
$$\sum_n^\infty \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{2^n} = \sum_n^\infty \frac{1}{2^{\lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor}}$$

LHS ho circa $k\alpha$ addendi 2^k

RHS ho circa α addendi 2^k

le claim di avere uguali 2^k fallisce miseramente

LHS conto i 2^k



per ogni (x,y) sotto ho $\frac{1}{2^x}$

Sommo per riga

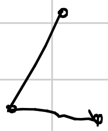
Ogni volta che $\lfloor \alpha(x+1) \rfloor > \lfloor \alpha(x) \rfloor$ ho un fattore $\frac{1}{2^x}$

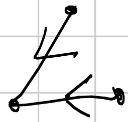
Senior 2017 - C3 Advanced Anér

Titolo nota 06/09/2017

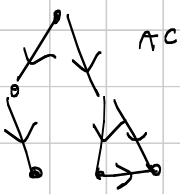
Verso il teorema MAX FLOW - MIN CUT

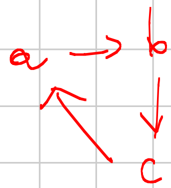
GRAFO ORIENTATO: grafo in cui ogni arco è orientato, ossia ogni arco ha una precisa direzione


GRAFO



GRAFO ORIENTATO ACICLICO se non esiste un cammino orientato che torna al vertice di partenza


ACICLICO

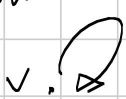


TORNEO: GRAFO orientato su n vertici, ogni coppia vertici è collegata da un arco

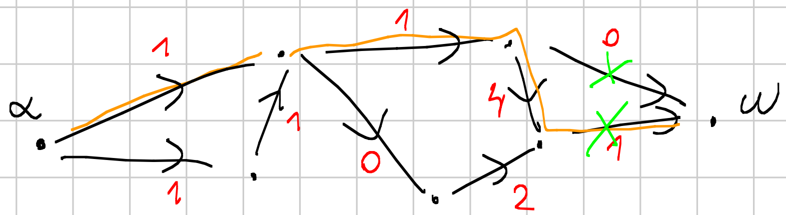
N.B.: tra due vertici v, w supponiamo ci sia

- o nessun arco
- o $v \to w$
- $w \to v$

; niente cappi



RETE Grafo orientato aciclico con una sorgente α e un pozzo ω (due vertici); supponiamo che dalla sorgente α si possa raggiungere ω con un cammino orientato. Ogni arco ha un peso, ossia un numero reale ≥ 0.



Domanda: qual è la massima portata di un flusso da α ad ω?

Flusso: scelgo una portata per ogni arco $\leq$ del suo peso, in modo che in ogni vertice il flusso entrante sia uguale a quello uscente.

La portata uscente da α è la portata del flusso

Es. Nel grafo sopra la portata max è 1:

- posso portare 1 lungo il cammino arancione
- la somma dei pesi degli archi verdi, che separano ω dal resto del grafo (da α in particolare) è 1

In generale se in una rete ho un sottoinsieme S di archi, rimuovendo i quali α viene separato da ω, allora $\max \text{flow} \leq \sum_{e \in S} p(e)$ dove $p(e)$ è il peso dell'arco e. Un tale S si chiama sezione della rete, $p(S) = \sum_{e \in S} p(e)$

Teo In una rete il massimo flusso è uguale al minimo peso di una sezione.

OSS Il $\leq$ segue dall'argomento sopra.

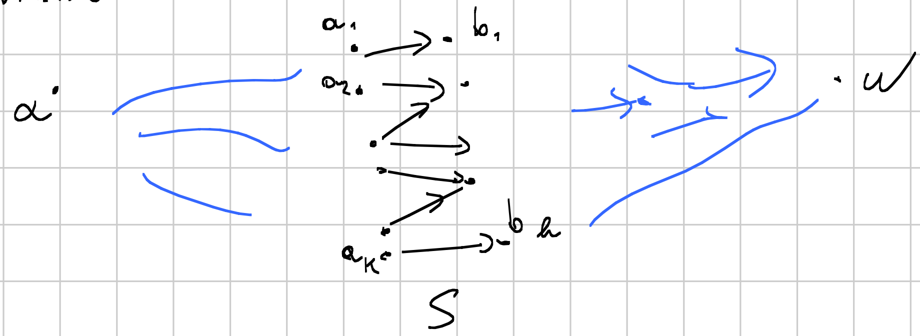
DIM Induzione su • num. di archi ? • num. vertici ?

ENTRAMBI! Passo base: $\alpha \bullet \xrightarrow{p(e)} \bullet\, \omega$

OSS Posso gettare subito via:

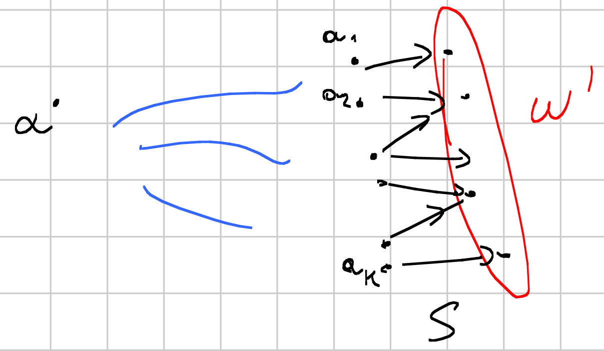
- gli archi di peso 0
- i vertici irraggiungibili da α
- i vertici da cui non si raggiunge ω

Disegniamo una rete con una sua minima sezione in evidenza



OSS Gli a_i sono le code di S e i b_j le punte di S; da ogni b_j si può raggiungere ω senza passare per S (altrimenti S non sarebbe la sez. minima); similmente da α si raggiunge ogni a_i senza passare per S; gli a_i sono diversi dai b_j

Costruiamo una nuova rete usando i vertici e gli archi a sinistra di S, e il nuovo pozzo si ottiene collassando a un solo vertice tutti i vertici a destra di S



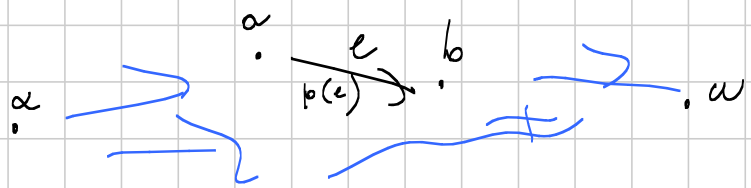
In questa nuova rete S è ancora una sez. minima. Se la nuova rete ha meno vertici e archi di prima, per induzione esiste un flusso di portata $p(S)$, in cui ogni arco di S sarà sfruttato al massimo...

Faccio lo stesso con la rete ottenuta collassando ciò che è a sinistra di S, di nuovo c'è un flusso di portata $p(S)$; i due flussi ora si possono incollare perché coincidono su S.

Non ho finito: può darsi che S sia l'insieme degli archi che entrano in ω, o che escono da α (altrimenti l'argomento induttivo funziona).

Possiamo assumere che tutte le sezioni minime siano del tipo $\{$archi entranti in $\omega\}$ o $\{$archi uscenti da $\alpha\}$.

In particolare ogni arco e che non incide né con α né con ω non appartiene a nessuna sezione minima.

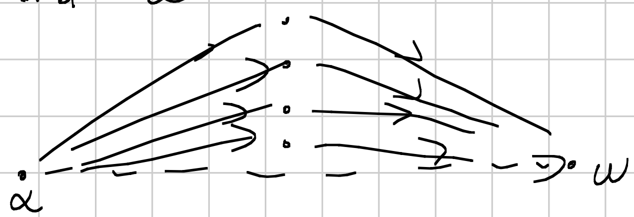


Prendiamo un arco e siffatto (disgiunto da α e ω) e riduciamo gradualmente il suo peso. A un certo punto dobbiamo smettere perché:

(1) Si è creata una sezione minima S che contiene e, il cui peso è lo stesso della sezione minima originale. Uso S nell'argomento di prima, trovo un flusso di portata $p(S)$ = sez. minima della rete originale, e quando riaumento $p(e)$ al valore iniziale il flusso appena trovato continua a essere buono.

(2) $p(e)$ raggiunge 0. Allora posso eliminare e, e ho un arco in meno $\rightsquigarrow$ per induzione.

Manca il caso in cui tutti gli archi entrano in w o escono da α



Ma questo caso è facile!

ORDINE PARZIALE Sia S un insieme. Un ord. parziale è una scelta di alcune coppie ordinate di elementi di S, della forma (x,y), con alcune proprietà. Notazione: $x \preccurlyeq y$ se $(x,y) \in I \subseteq S \times S$

- $x \preccurlyeq x \quad \forall x \in S$;
- $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq x$ allora $x = y$;
- $x \preccurlyeq y$ e $y \preccurlyeq z$, allora $x \preccurlyeq z$

- ordine totale se $\forall x \neq y \in S \quad x \preccurlyeq y$ o $y \preccurlyeq x$

Esempio Un insieme di persone (genericamente) sarà totalmente ordinato per altezza. Idem per l'età.

Se diciamo che a è più grande di b quando a è sia più alto che più vecchio, non è detto che ogni coppia di persone sia confrontabile.

Esempio $\mathbb{N}_0$ è parzialmente ordinato per divisibilità

$m \preceq n$ se $m \mid n$, ossia per ogni primo p

$$v_p(m) \leq v_p(n)$$

MINIMALE $x \in S$ per cui non esiste $y \leq x$ $y \neq x$

MASSIMALE analoga def.

CATENA $C \subseteq S$ catena se C è totalmente ordinato

ANTICATENA $A \subseteq S$ anticatena se ogni $x \neq y \in A$ sono inconfrontabili

Esempio J insieme (finito) $\mathcal{P}(J) = \{\text{sottoinsiemi di } J\}$

è un insieme parzialmente ordinato usando $\subseteq$

$A \preceq B$ se $A \subseteq B$ $\quad (A, B \subseteq J)$

Dilworth S poset finito

① Sia k la massima cardinalità di una catena. Allora è possibile partizionare S in k sottoinsiemi che sono anticatene

② Sia h la max card. di una anticatena. Allora S si può partizionare in h catene.

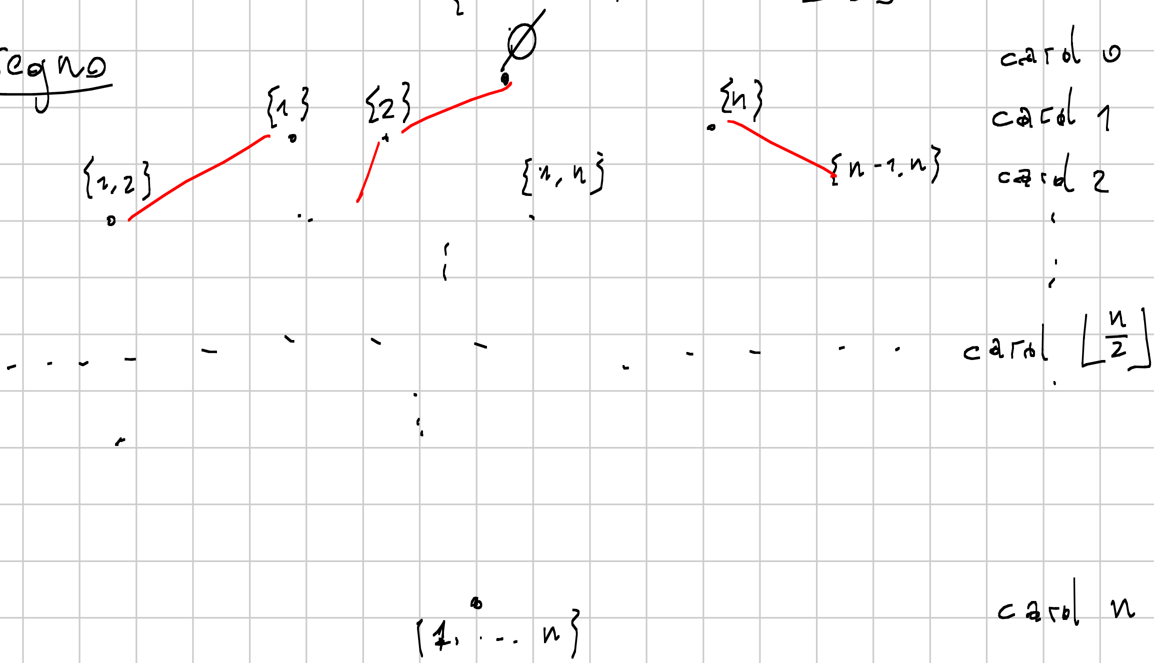
Esempio Determinare h nel caso di $S = \mathcal{P}(\{1, \ldots n\})$

Congettura: $h =$ binomiale centrale (il più grande $\binom{n}{\ell}$)

$$= \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Una anticatena con $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ elementi è data dai sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elementi.

Disegno

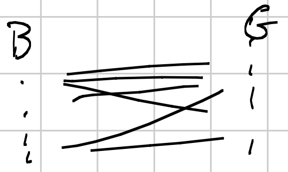


Per creare delle catene, cerco di associare a ogni sottoinsieme di i elementi ($i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$), un diverso sottoinsieme di $i+1$ elementi, e similmente per $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ un diverso sott. di $i-1$, in modo che l'insieme associato contenga/sia contenuto nel primo.

($i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$)

Lemma di Hall: posso farlo se $\forall$ famiglia $\mathcal{F}$ di sott. di i elementi, la famiglia $\Gamma(\mathcal{F})$ dei sott. di $i+1$ che includono almeno un sott. $\in \mathcal{F}$ soddisfa $|\Gamma(\mathcal{F})| \geq |\mathcal{F}|$

<u>Lemma</u> Basta la seguente condizione per applicare Hall: Se B insieme dei ragazzi e G ragazze



$\forall b - g$ basta assumere

$$\deg(b) \geq \deg(g)$$

(e ogni b conosce qualche g)

Nel nostro caso ogni b (insieme di i elementi) conosce $(n-i)$ g (insiemi di $i+1$ elementi), mentre ogni g ne conosce $i+1$, e $n-i \geq i+1$ perché $n-1 \geq 2i$ sia se n è pari $\left(i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)$ che se n è dispari $\left(i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)$

<u>Esercizio</u> ① È vero o no che ogni ordine parziale su un insieme finito si può ottenere combinando due ordini totali (come nel caso di età e altezze)?

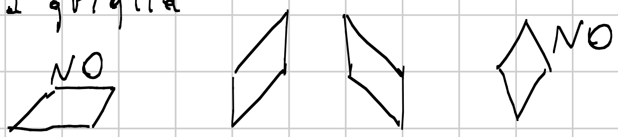
② $S = \{1, \ldots, 2014\}$ vogliamo selezionare alcune permutazioni di S con la proprietà che $\forall a \neq b$ in S esiste almeno una permutazione σ con $\sigma(a) = \sigma(b) + 1$. Quante permutazioni servono almeno?
IRAN TST '14

③ IRAN TST '15 σ permut. su $\{1, \ldots n\}$ con la proprietà che $\forall\ i < j < k$

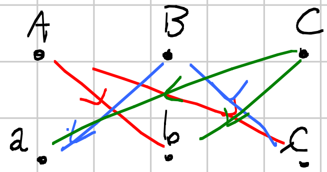
$$n \nmid [\sigma(i) + \sigma(k) - 2\sigma(j)]$$

Quando esiste una tale σ? Per quali n?

(4) IRAN TST '13 Tabella $n \times n$, vogliamo tassellarla con , senza sovrapposizioni. Quanta area rimane almeno scoperta? I tasselli si possono ruotare ma i vertici dei tasselli devono sovrapporsi a punti a coord. intere della griglia



(1) No! Controesempio:



Questo ordine parziale non viene da 2 ordini totali

[OSS Viene da 3 ordini totali: $\{0,1\}^3$ con gli ordini dati dalle coordinate, o (è la stessa cosa) i divisori di 30, togliendo max e min.

DIM Siano $\leq$ e $\leq$ i due ordini totali. Allora il max è uno dei massimali; tuttavia anche il 2° max è uno tra A, B, C, perché ognuno tra a, b, c è già battuto da 2 tra A, B, C nell'ordine parziale. Idem per max e 2° max

$\{\max, 2^\circ \max\} \cap \{\max, 2^\circ \max\}$ deve contenere un elemento, wlog A. Allora

$A \geq a \quad A \geq a \rightsquigarrow A \geq a$ assurdo

<u>X CASA</u> ① Ogni ordine parziale su un insieme finito si ottiene combinando alcuni (tanti) ordini totali (ad esempio, TUTTE le sue estensioni).

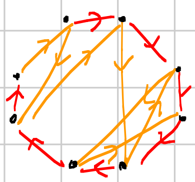
② Determinare se esiste $K \geq 3$ t.c. ogni ordine parziale su n elementi, $\forall n$, si ottiene combinando $\leq K$ ordini totali.

---

② Selezionare alcuni ordini totali su $\{1, \dots 2014\}$ in modo che ogni $i \neq j$ siano consecutivi (con i che precede j) in almeno un ordine. Quanti ne servono?

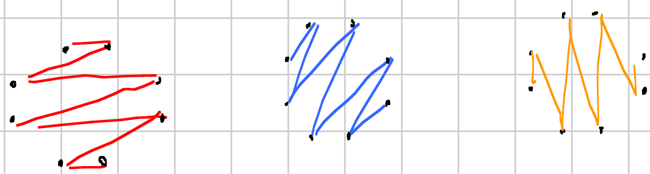
≥ 2014 | Ogni ordine dà 2013 coppie di consecutivi; a me ne servono $2014 \cdot 2013 \rightsquigarrow$ almeno 2014 ordini servono.

<u>Esempio</u>



Idea: posso provare a usare sia un ordine che l'opposto.

Il problema diventa: partizionare K_{2014} in 1007 serpenti lunghi 2014.



e l'ultimo ...

$n \geq 3$

3) <u>OSS</u> $\sigma(1) - 2\sigma(2) + \sigma(k) \not\equiv 0 \pmod n$

$\forall k \geq 3$ ma allora $\sigma(1) - 2\sigma(2) \equiv \begin{cases} -\sigma(1) \\ -\sigma(2) \end{cases} \mod n$

però $-\sigma(2)$ non va perché avrei $\sigma(1) \equiv \sigma(2) \mod n$

$\rightsquigarrow 2\sigma(1) \equiv 2\sigma(2) \mod n$

Allora n deve essere pari.

<u>Idea</u> considero la successione dei numeri pari nella lista $\sigma(1), \sigma(2), \ldots \sigma(n)$

Ottengo una lista lunga $\frac{n}{2}$. Prendo i primi due pari in questa lista, $2a$, $2b$,

$2a - 4b + \sigma(k) \not\equiv 0 \pmod n$ $\quad \forall k >$ l'indice per cui $\sigma = 2b$

E anche questi k sono tanti (perlomeno tutti quelli per cui $\sigma(k)$ è pari). Come prima troviamo $4a \equiv 4b \pmod n$.

<u>Formalmente</u> Definisco τ su $\{1, \ldots \frac{n}{2}\}$

$\tau(i) = \frac{1}{2}$ (l'i-esimo pari nella lista $\sigma(1) \ldots \sigma(n)$)

Allora τ (verificatelo!) è una buona permutazione per $\frac{n}{2}$.

Esempio Come mai le potenze di 2 vanno bene?

Cerchiamo una costruzione induttiva: supponiamo di avere una τ buona per $\frac{n}{2} = 2^{\ell-1}$. Vogliamo usare τ per costruire σ e vogliamo anche mettere prima i pari e poi i dispari.

$$2\tau(1),\ 2\tau(2),\ \dots,\ 2\tau\left(\tfrac{n}{2}\right),\ 2\tau(1)+1,\ \dots,\ 2\tau\left(\tfrac{n}{2}\right)+1$$

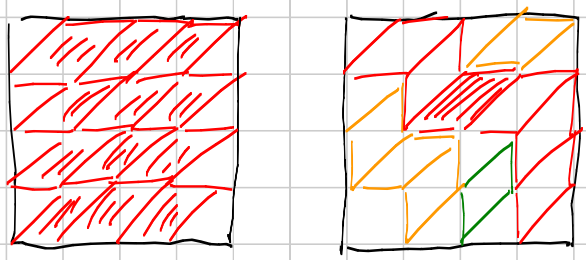
(Verificare che funziona!)

Controllare cosa succede in base 2

---

4) Rimane almeno un'area n scoperta

Esempio



X CASA FINIRE

G1 ADVANCED LucaMac

Titolo nota 04/09/2017

1) EGMO 2017.6

ABC triangolo $a \neq b \neq c \neq a$. Le riflessioni del baricentro G e del circocentro O rispetto ai lati sono $G_1, G_2, G_3, O_1, O_2, O_3$. Tes. è G_1G_2C e cyc, O_1O_2C e cyc concorrono con ABC.

Dim:

$XY \perp ZW \iff \dfrac{x-y}{\bar{x}-\bar{y}} = -\dfrac{z-w}{\bar{z}-\bar{w}}$

$XYZW$ ciclico $\iff \dfrac{\frac{x-y}{\bar{x}-\bar{y}}}{\frac{x-z}{\bar{x}-\bar{z}}} = \dfrac{\frac{w-y}{\bar{w}-\bar{y}}}{\frac{w-z}{\bar{w}-\bar{z}}}$

P e costruiamo P_1, P_2, P_3.

Complessi con $a\bar{a}=1$ $b\bar{b}=1$ $c\bar{c}=1$ $o=0$ $g=\frac{a+b+c}{3}$.

X : $X \in BC$ $PX \perp BC$

$\dfrac{x-b}{\bar{x}-\bar{b}} = \dfrac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}} = -bc \qquad x = b+c-bc\bar{x}$

$\dfrac{p-x}{\bar{p}-\bar{x}} = -\dfrac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}} = bc \qquad p-x = bc\bar{p} - bc\bar{x}$

$p_1 = 2x - p = b+c-bc\bar{p}$

$CP_1P_2 \qquad p_2 = a+c-ac\bar{p}$

$\dfrac{\frac{z-p_1}{\bar{z}-\bar{p}_1}}{\frac{c-p_1}{\bar{c}-\bar{p}_1}} = \_\_\_$

$\Downarrow$

$c - p_1 = bc\bar{p} - b$

$\bar{c} - \bar{p}_1 = \dfrac{p-c}{bc}$

$\dfrac{\frac{z-p_1}{\bar{z}-\bar{p}_1}}{b^2\cancel{c}\,\frac{c\bar{p}-1}{p-c}} = \_\_\_$

$$\left(\frac{z-p_1}{\bar z-\bar p_1}\right)a^2 = b^2\frac{z-p_2}{\bar z-\bar p_2}$$

$$a^2(z-p_1)(\bar z-\bar p_2) = \text{sym}$$

$$a^2(z-b-c+\bar p bc)\left(\bar z-\frac{a+c-p}{ac}\right) = \text{sym}$$

Questo intersecato con $z\bar z=1$. Si ha un'equazione di II grado in z, ma c è soluzione, quindi calcolo facilmente l'altra, che è $t=\dfrac{ab+ac+bc-abc\bar p}{a+b+c-p}$

Quindi è ovvio che CP_1P_2 e cyc concorrono con ABC perché t è simmetrico in A,B,C.

Quindi la tesi equivale a ($o=0$ $g=\frac{a+b+c}{3}$)

$$\frac{\sum_{cyc} ab}{\sum_{cyc} a} = \frac{\sum_{cyc} ab - \frac{1}{3}\sum_{cyc} ab}{\sum_{cyc} a - \frac{1}{3}\sum_{cyc} a}$$ e questo è ovvio.

2) IMO SL 2015 G5

ABC triangolo con $AC \neq BC$. D,F,G pt medi di AB, AC, BC. Γ è un cerchio che passa per C e tange AB in D. Γ incontra AF in H e BG in I. H' e I' sono i simmetrici di H ed I rispetto ad F e G, rispettivamente. $H'I'$ incontra CD in Q ed FG in M. $CM \cap \Gamma = \{C, P\}$. Provare che $CQ = QP$.

cerchio Γ: $a^2yz+b^2xz+c^2xy=(x+y+z)(ux+vy+wz)$ u,v,w

Dim: riferimento ABC in baricentriche

$C\in\Gamma \Rightarrow w=0$

$D\in\Gamma \Rightarrow c^2=2(u+v)$

$D=(1,1,0)$

$|\Gamma\cap AB|=1 \Rightarrow c^2xy=(x+y)(ux+vy)$ ha $\Delta=0$

$$4uv=(u+v-c^2)^2$$

$$4uv=\frac{c^4}{4} \qquad u=v=\frac{c^2}{4}$$

$\Gamma \cap AC = \{C, H\}$ $\quad AC: y = 0$

$b^2 xz = (x+z)\frac{c^2}{4}x$

$H \neq C \Rightarrow x \neq 0$ $\quad 4b^2 z = (x+z)c^2$

$H = (4b^2 - c^2, 0, c^2)$ $\quad I = (0, 4a^2 - c^2, c^2)$

$H' = (c^2, 0, 4b^2 - c^2)$ $\quad I' = (0, c^2, 4a^2 - c^2)$

$H'I': \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ c^2 & 0 & 4b^2 - c^2 \\ 0 & c^2 & 4a^2 - c^2 \end{pmatrix} = 0$

$H'I': x(4b^2 - c^2) + y(4a^2 - c^2) - zc^2 = 0$

$CD: x = y$

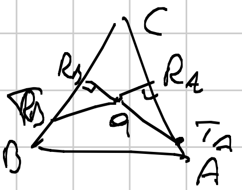
$Q = (c^2, c^2, 4a^2 + 4b^2 - 2c^2)$

$FG: z = x + y$

$M \in x(4b^2 - c^2) + y(4a^2 - c^2) - (x+y)c^2 = 0$

$C, M \in x(2b^2 - c^2) + y(2a^2 - c^2) = 0$

Tesi $\iff$ la circonferenza di centro Q che passa per C (ω) passa per P, ovvero che l'asse radicale tra ω e Γ è $CP \equiv CM: x(2b^2 - c^2) + y(2a^2 - c^2) = 0$



$\omega = \odot(CT_AT_B)$

$QR_B \parallel AH$

$H_{A\infty} = (-a^2, S_C, S_B)$

$QR_B: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ -a^2 & S_C & S_B \\ c^2 & c^2 & 2(2a^2 + 2b^2 - c^2) \end{pmatrix} = 0$

$BC: x = 0$

$R_B \in y(c^2 S_B + 2a^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)) = c^2 z(a^2 + S_C)$

$R_B = (0, c^2(a^2 + S_C), c^2 S_B + 2a^2(2a^2 + 2b^2 - c^2))$ $\quad \Sigma R_B = 4a^2(a^2 b^2 c^2)$

$T_B = 2R_B - C$

$T_B = (0, c^2(a^2 + S_C), c^2 S_B + 4a^2 S_C)$

w: $\sum_{cyc} a^2yz = (\sum_{cyc} x)(ux+vy)$ u,v

$\cancel{a^2}(c^2\cancel{(a^2+S_c)})(c^2S_B+4a^2S_c) = 2\cancel{a^2}(a^2+b^2)v\, \cancel{c^2(a^2+S_c)}$

$$v = \frac{c^2S_B+4a^2S_c}{2(a^2+b^2)} \qquad u = \frac{c^2S_A+4b^2S_c}{2(a^2+b^2)}$$

Fatto: Γ_1: $\sum_{cyc} a^2yz = (\sum_{cyc} x)(\sum_{cyc} u_1 x)$ Γ_2: $\sum_{cyc} a^2yz = (\sum_{cyc} x)(\sum_{cyc} u_2 x)$

l'asse radicale è $\sum_{cyc}(u_1-u_2)x = 0$

Quindi l'asse radicale tra w e Γ è

$$y\,\frac{c^2S_B+4a^2S_c - c^2(a^2+b^2)}{\cancel{2}(a^2+b^2)} + \cancel{x}\left(\qquad \right) = 0$$

$c^2(a^2+c^2-b^2)+4a^2(a^2+b^2-c^2) - c^2(a^2+b^2) =$

$= -4a^2c^2+c^4-2b^2c^2+4a^4+4a^2b^2 = (2a^2-c^2)(2a^2+2b^2-c^2)$

$\Rightarrow$ Tesi.

3) EGMO 2015.6

ABC acutangolo e $b \neq c$. G baricentro e Γ circoscritta. $AG \cap \Gamma = \{A, P\}$. H ortocentro. P' simmetrico di P risp a BC. $GP' = GH \iff \hat{A} = 60°$

Dim: $P = (-a^2, b^2+c^2, b^2+c^2)$ $x = S_A$ e cyc

$X = (0, b^2+c^2-z, b^2+c^2-y)$

Si verifica che $X \in BC$ e $PX \perp BC$.

Quindi X è il pt medio di PP'

$P' = (y+z, 2x+y-z, 2x+z-y)$

$H = (yz, xz, xy)$

M pt medio di $P'H$

$M = (6xyz+2y^2z+2yz^2+xy^2+xz^2, (\sum_{cyc} xy)(2x+y-z)+xz(4x+y+z),$
$(\sum xy)(2x+z-y)+xy(4x+y+z))$

$BCHP'$ ciclico di centro O', simmetrico di O risp a BC

$O' = (-xy-xz, 2xz+xy+yz, 2xy+xz+yz)$

$\alpha = \sum xy$

Tesi $\iff M, G, O'$ allineati

$\iff$

$$0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -xy - xz & \alpha + xz & \alpha + xy \\ \beta & \alpha(2x+z-y) + xy(4x+y+z) & \_\_\_ \end{pmatrix}$$

$$\beta(x)(y-z) + \left(\alpha(2x+z-y) + xy(4x+y+z)\right)\left(-2xy - xz - \alpha\right) - \left(\alpha(2x+y-z) + xz(4x+y+z)\right)\left(-2xz - xy - \alpha\right) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\beta x(y-z) + \left(\alpha(2x+z-y) + xy(4x+y+z)\right)(yz - xy - 2\alpha) - \text{sym} \stackrel{?}{=} 0$$

$$\alpha\left[4\alpha(z-y) + 2x(4x+y+z)(y-z) + (2x+z-y)z(x-y) - (2x+y-z)y(x-z)\right] + \beta x(y-z) + xyz(4x+y+z)(z-y) \stackrel{?}{=} 0$$

$$\alpha(y-z)\left[x(y+z) - 4\alpha + 2x(4x+y+z) - 2x^2 - xy - xz + 2yz\right] \stackrel{?}{=} 0$$

perché $\beta x - xyz(4x+y+z) = x\alpha(y+z)$

$$2\alpha(y-z)\left[3x^2 - xy - xz - yz\right] \stackrel{?}{=} 0$$

$y \neq z$ cosi $b \neq c$

$\alpha > 0$

$3x^2 = xy + xz + yz \stackrel{?}{\iff} \hat{A} = 60°$

$(2x)^2 = (x+y)(x+z) \stackrel{?}{\iff} \hat{A} = 60°$

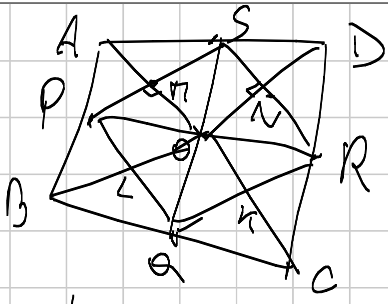
$\underbrace{(b^2+c^2-a^2)}_{>0}{}^2 = b^2c^2 \stackrel{?}{\iff} \hat{A} = 60°$

$b^2+c^2-a^2 = bc \stackrel{!}{\iff} \hat{A} = 60°$ CARNOT

4) RMM 2017.6

ABCD quadrilatero convesso. P, Q, R, S punti su AB, BC, CD, AD rispettivamente. PR e QS dividono ABCD in 4 quadrilateri con diagonali perpendicolari. Dim che PQRS ciclico.

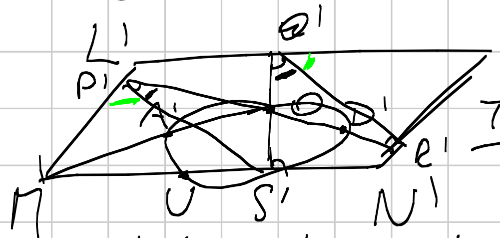
<u>Dim:</u>



SMON ciclico di diametro OS

$\odot(SMON)$ tange $\odot(KQLO)$

Invertiamo in O



Th: $OS' \cdot OQ' = OP' \cdot OR'$

$M'P'S' \sim K'Q'R'$

$$\frac{M'P'}{M'S'} \overset{!}{=} \frac{K'Q'}{K'R'}$$

$$x(l_1+l_2\cos\theta - x) = y(l_2+l_1\cos\theta - y)$$

Sappiamo $A'OD'S'$ ciclico

$M'N' = l_1$, $N'K' = l_2$, $\hat{M}' = \theta$

$x = M'S'$ $\quad y = M'P'$

$l_1 + l_2\cos\theta - x = K'Q'$

$l_2 + l_1\cos\theta - y = K'R'$

Pot M: $M'U \cdot M'S' = M'A' \cdot M'O = \alpha$ $\quad$ analoghi β, γ, δ

$M'U = \alpha/x$

Pot N: $\delta = (l_1 - x)\left(l_1 - \frac{\alpha}{x}\right)$

$$\delta = (y - l_1\cos\theta)\left(l_2 - \frac{\gamma}{l_2 + l_1\cos\theta - y}\right)$$

$$(l_1 - x)\left(l_1 - \frac{\alpha}{x}\right) = (y - l_1\cos\theta)\left(l_2 - \frac{\gamma}{l_2 + l_1\cos\theta - y}\right)$$

e le sym

$$(l_1-x)(l_2+l_1\cos\theta-y)(xl_1-\alpha) = x(y-l_1\cos\theta)\big(l_2(l_2+l_1\cos\theta-y)-\gamma\big)$$

$$(l_2-y)(l_1+l_2\cos\theta-x)(yl_2-\beta) = y(x-l_2\cos\theta)\big(l_1(l_1+l_2\cos\theta-x)-\gamma\big)$$

$$y(x-l_2\cos\theta)(l_2+l_1\cos\theta-y)\big[(l_1-x)(xl_1-\alpha) - x(y-l_1\cos\theta)l_2\big] \underset{\text{sym}}{=}$$

coeff α: $-y(x-l_2\cos\theta)(l_2+l_1\cos\theta-y)(l_1-x)$ $-$ sym

$-\underline{x^2y^2} + \underline{x^2y(l_2+l_1\cos\theta)} + \underline{xy^2(l_1+l_2\cos\theta)} - y^2 l_1 l_2\cos\theta$

$-xy(l_2+l_1\cos\theta)(l_1+l_2\cos\theta) + y l_1 l_2\cos\theta(l_2+l_1\cos\theta)$

$l_1 l_2\cos\theta\left[y(l_2+l_1\cos\theta-y) - x(l_1+l_2\cos\theta-x)\right]$

termine noto: $xy(x-l_2\cos\theta)(l_2+l_1\cos\theta-y)(l_1(l_1-x)-l_2(y-l_1\cos\theta))$ $-$ sym

$xy\cdot\Big[x^2y[l_1]+xy^2l_2 - x^2l_1(l_2+l_1\cos\theta)$

$+xy(-l_1^2-2l_1l_2\cos\theta-l_2^2) \quad -y^2l_2^2\cos\theta$

$l_1x(l_2+l_1\cos\theta)(l_1+l_2\cos\theta) + xl_1l_2\cos\theta(l_2+l_1\cos\theta)$

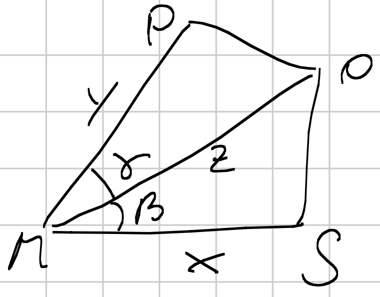
$yl_2\cos\theta\, l_1(l_1+l_2\cos\theta) + yl_2^2\cos\theta(l_2+l_1\cos\theta)$

$-l_1l_2\cos\theta(l_2+l_1\cos\theta)(l_1+l_2\cos\theta)$

$$xy[l_1l_2]\Big[\underbrace{x(l_1+l_2\cos\theta-x)-y(l_2+l_1\cos\theta-y)}_{R}\Big]$$

$$R(xyl_1l_2 - \alpha l_1l_2\cos\theta)=0$$

se $R=0$ fine!



$\alpha\le z^2$

$\alpha\cos\theta = xy$

$xy\le z^2\cos\theta \qquad \frac{x}{z}=\cos\beta \qquad \frac{y}{z}=\cos\gamma$

$\cos\beta\cos\gamma\le\cos\beta\cos\gamma-\sin\beta\sin\gamma$

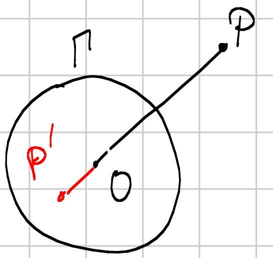
$\sin\beta\sin\gamma\le 0$ ASSURDO!

Quindi tesi.

G2 - Advanced

Titolo nota 05/09/2017

Inversione "negativa"



$OP \cdot OP' = R^2$ (inversione solita)

$OP \cdot OP' = -R^2$

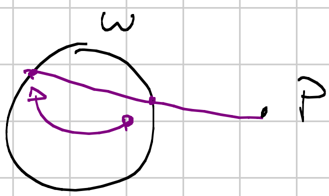
$\parallel$

inversione solita di raggio R e centro O

$+$

simmetria di centro O

es:



P esterno ad ω

$\Rightarrow \exists!$ inversione di centro P che fissa ω

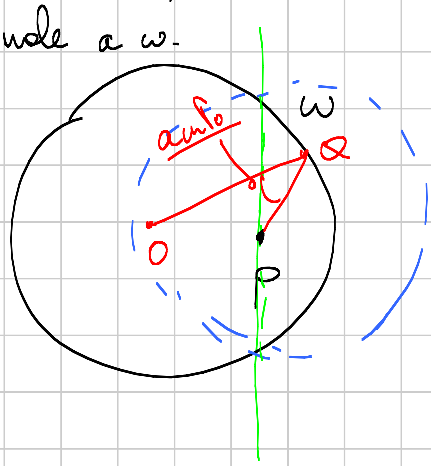
↳ (come insieme e non i singoli punti)

inversione di centro P e raggio $\sqrt{pow_\omega(P)}$

$\Updownarrow$

inversione in Γ, cf. di centro P ortogonale a ω.

es:

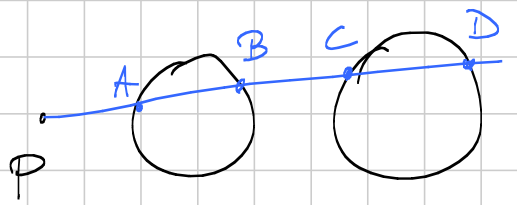


Posso fare lo stesso?

Sì, con un'inversione di parametro $pow_\omega(P)$

$\Rightarrow$ inversione negativa

es:



$A \to D$
$B \to C$
$\Downarrow$
$PA \cdot PD = PB \cdot PC$

$\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{PC}{PD} \iff$ P centro di similitudine esterno

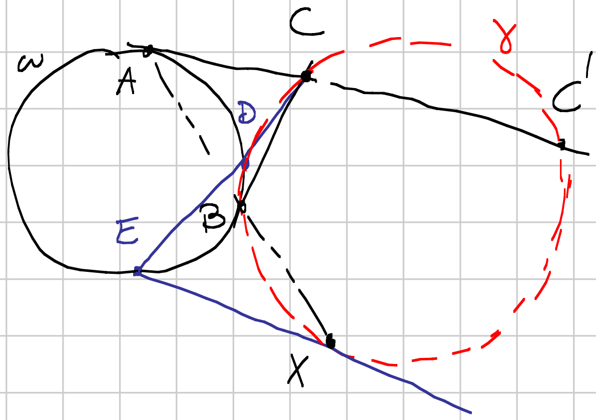
P = centro di simil. est. $\Rightarrow$ inv. pos.
P = centro di simil. int $\Rightarrow$ inv. neg.
scambiano le circonferenze

Oss: Centri di simil tra circoscritta e Feuerbach

P_1, P_2 t.c. $\dfrac{OP_1}{P_1N} = 2 \qquad \dfrac{OP_2}{P_2N} = -2$

$\Rightarrow P_1 = G$
$P_2 = H$

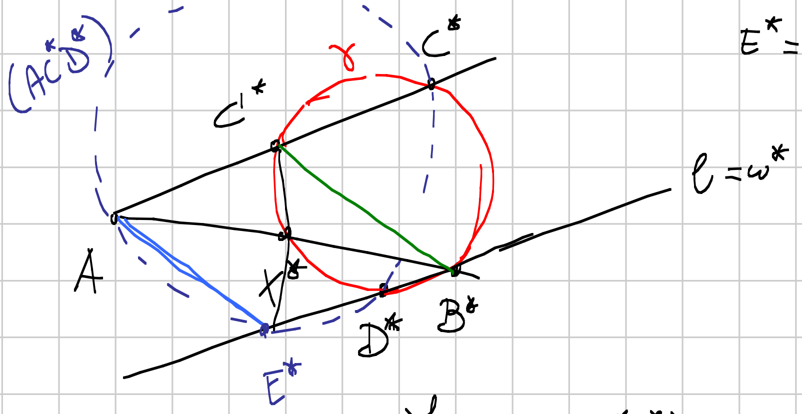
Esercizio (ELMO 2015 p3)



Th: EX tg. γ

Sol "inversiva": inverto in A fissando γ ($\Rightarrow AP \cdot AP' = pow_\gamma(A)$)

$\gamma \to \gamma \qquad C \to C'$
$B \to X \qquad \omega \to \ell \parallel AC$ che passa per $X = B^*$



$E^* =$ la seconda intersezione di (C^*D^*A) con ℓ

$\Downarrow$

$AC^*D^*E^*$ è un trapezio isoscele

$\underline{Th} \iff (AX^*E^*)$ tg γ

Anche $B^*D^*C'^*C^*$ è un trapezio isoscele

$\Rightarrow D^*C^*$ è simmetrico di C'^*B^* risp. all'asse di C'^*C^*

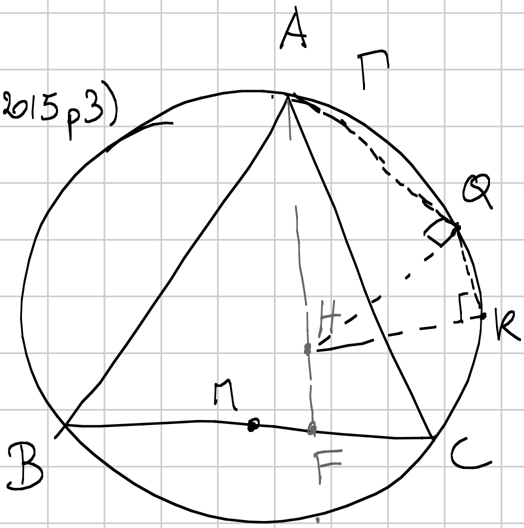
ma C^*D^* è simm di AE^* risp. all'asse di AE^*

$\Rightarrow C'^*B^* \parallel AE^* \Rightarrow X^*$ è il centro del parallelogramma

$\Rightarrow (AX^*E^*)$ tg. a $(C'^*B^*X^*) = \gamma$. $\blacksquare$

<u>Es per voi</u> (IMO 2017 p.4) uguale al precedente

<u>Es</u>: (IMO 2015 p3)



$AB > AC$

Q pt in Γ t.c. $H\hat{Q}A = \frac{\pi}{2}$

K pt in Γ t.c. $H\hat{K}Q = \frac{\pi}{2}$

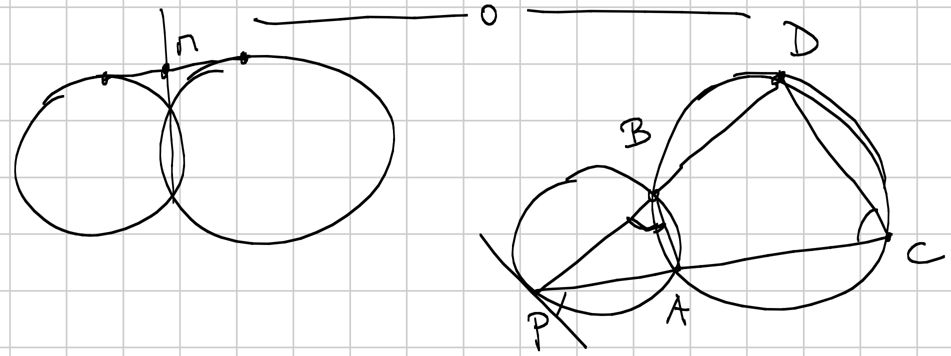
<u>dim che</u> (KQH) e (FKM) sono tangenti.

Strada I: inversione di centro H che fissa Γ

Strada II: inversione di centro H che scambia Γ e la Feuerbach

Oss: il simm. di H rispetto a M, sia E, è il diam. opp. di A in Γ

$\Rightarrow$ M, H, E, Q allineati.

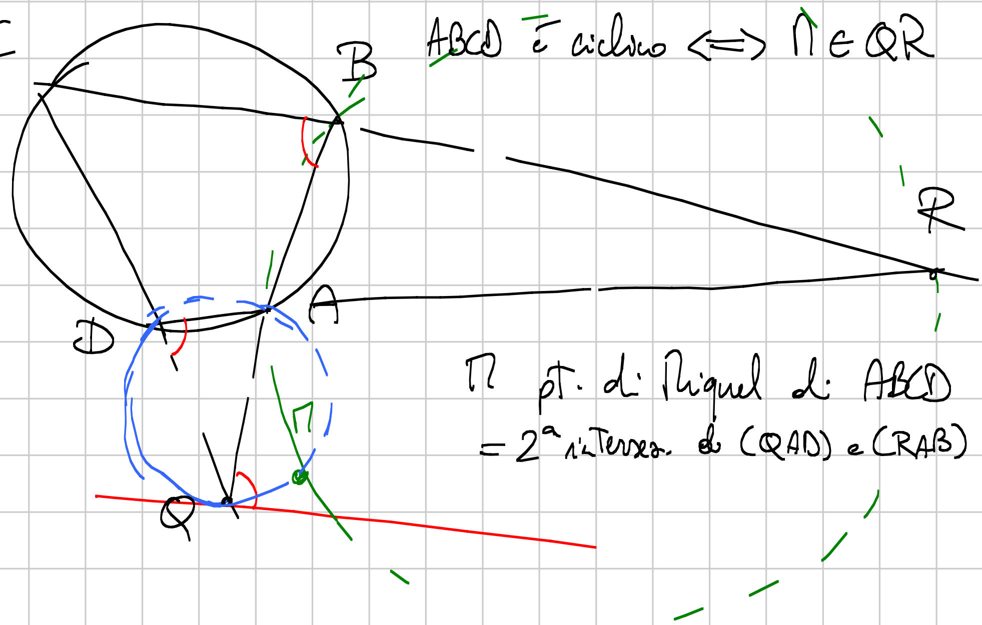


$$\boxed{P, B, D \text{ allineati} \Longleftrightarrow tg \text{ in } P \parallel DC}$$

Teo di REIM(S)

Pt. di Miquel di un quadrilatero ciclico

ABCD è ciclico $\Longleftrightarrow$ M $\in$ QR



M pt. di Miquel di ABCD

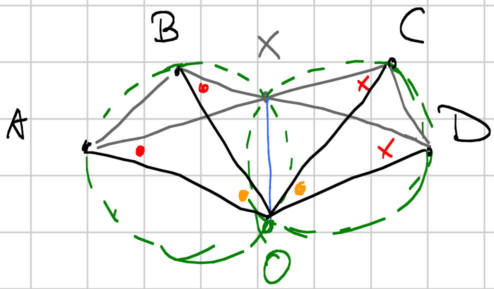
= 2ª intersez. di (QAD) e (RAB)

Q, N, R allineati $\iff$ tg in $Q \parallel BR \iff ABCD$ ciclico

—— o ——

Spiral similarity $\qquad z \to \alpha(z-z_0)+z_0$

Lemma base: $ABCD$ non un parallelogramma
$\Rightarrow \exists!$ sp. sim. che manda $A \to B$, $C \to D$

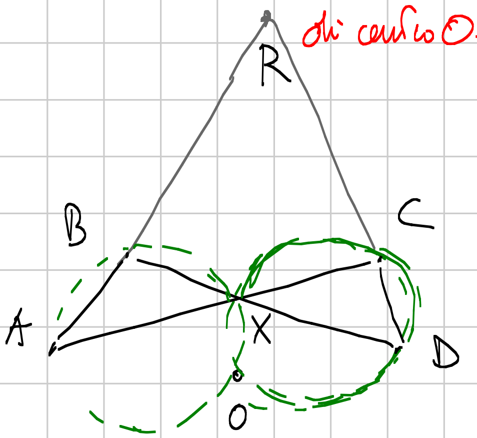


dim: la SS richiesta è di centro O e manda $A \to B$ funziona perché $\overset{\triangle}{AOB} \simeq \overset{\triangle}{COD}$ $\left(\overset{\triangle}{AOC} \simeq \overset{\triangle}{BOD}\right)$ $(*)$

Se esistono f_1 e f_2 SS che mandano A in B e C in D

$$g = \left(f_2^{-1} \circ f_1\right) \qquad g(A)=A \quad g(C)=C$$
$$g(B)=B \quad g(D)=D \quad g(O)=O$$
$$\Rightarrow g = \text{identità} \Rightarrow f_1 = f_2$$

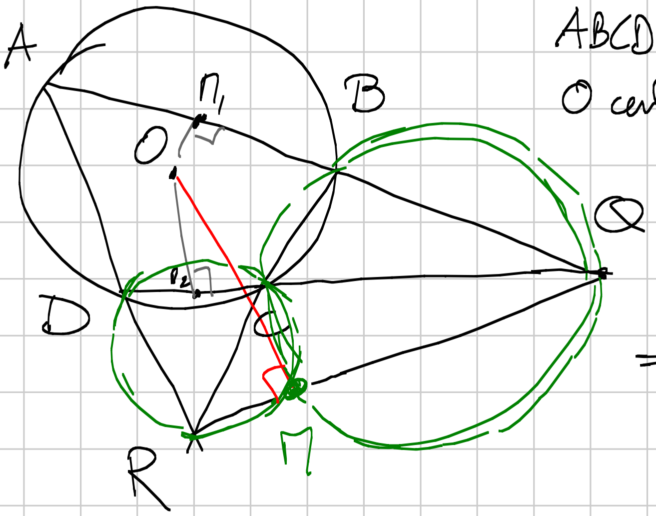
Oss: $(*) \Rightarrow$ se esiste una SS che manda $A \to B$ e $C \to D$ di centro O
allora esiste una SS che manda $A \to C$, $B \to D$ di centro O.



O = pt di Miquel di $RBXC$

Esercizio:

Hint: Considerare M_1, M_2 punti medi di AB e CD



$ABCD$ inscritto in Γ
O centro di Γ
R, Q intersez. dei lati opposti
M pt. di Miquel
$\Longrightarrow OM \perp QR$

dim SS di centro M che manda AB in CD, manda M_1 in M_2

$\Longrightarrow$ M centro di SS che manda A in D e M_1 in M_2

$\Longrightarrow$ $AM_1 \cap DM_2 = Q$, M, M_1, M_2 sono conciclici

O, M_1, M_2, Q sono conciclici

$\Longrightarrow$ O, M, M_1, M_2, Q conciclici, OQ diametro $\Longrightarrow$ $O\hat{M}Q = \frac{\pi}{2}$. ∎

dim con la potenza: $\rho = OA$

$$QO^2 - \rho^2 = QA \cdot QB = QM \cdot QR = QM \cdot MR + QM^2$$

$$RO^2 - \rho^2 = RA \cdot RD = RM \cdot RQ = QM \cdot RM + RM^2$$

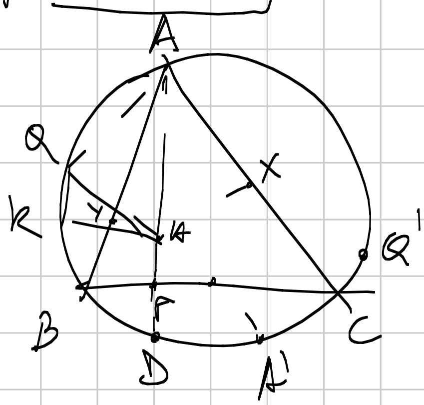
$$QO^2 - RO^2 = QM^2 - RM^2 \Longrightarrow OM \perp QR$$ ∎

Oss: R centro radicale di $(ABCD)$, $(ADQM)$, $(BCQM)$

Oss: $ACMO$, $BDMO$ ciclici.

Oss: $P = AC \cap BD \Rightarrow M$ è l'inverso di P in Γ

|IMO 15 p3 - di nuovo|



Q punto di Miquel di BCXY

$\Downarrow$

Q, H, M allineati

Q' diam. opp a Q

$\Downarrow$

Q', H, K allineati

A' diam opp ad A

la tg a (KDH) in $H \parallel AQ' \parallel A'Q \ni H \Rightarrow A'Q$ la tg in H a (KDH)

$P \in BC$ t.c. $PH \perp A'Q$

dico che PK tangente comune alle due cfr della tesi.

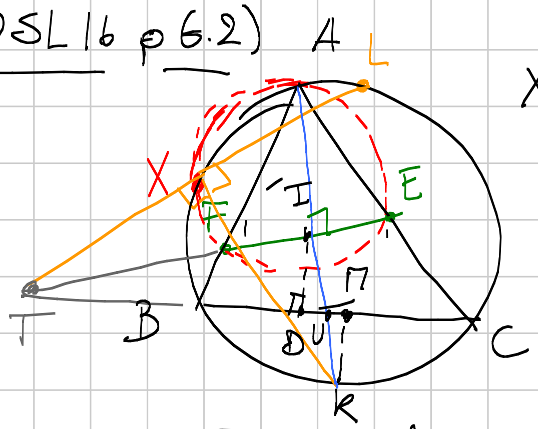
x bb

$PK^2 = PH^2 = PF \cdot PM \Rightarrow PK$ tange (KFM)

PH tange (KQH) ovvio

$PK = PH \Rightarrow PK$ tange (KQH)

Es (IMO SL 16 p G.2)



XD, AM si intersecano su Γ

Oss: X centro SS

$E \to C$

$F \to B$

$FI \to BM$

$TXIM$ ciclico

$TI\Pi K$ ciclico (angoli retti) con TK

$\Rightarrow TXK = \frac{\pi}{2}$ $\qquad TX \cap \Gamma = \{X, L\}$

L punto medio di $\overset{\frown}{BAC}$

(BIC) tg EF

(DUI) tg a circ in IU

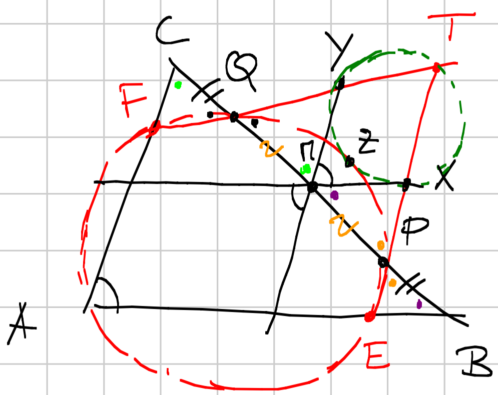
$TX \cdot TL = TB \cdot TC = TI^2 \overset{?}{=} TD \cdot TU$

$Y = A\Pi \cap XD$ voglio A, X, Y, L ciclico

$L\hat{A}Y = L\hat{U}\Pi = L\hat{X}D = L\hat{X}Y \Rightarrow$ fine

———— o ————

Iran TST '17 – day 2 – p 5



$CQ = BP$

$\Pi Y \parallel AC$

$\Pi X \parallel AB$

Th: $(TXY), (APQ)$ Tangenti.

Hint 1: $\overset{Z}{\overset{\parallel}{\text{pt.}}}$ di Miquel di ΠXY in TPQ sta su (APQ)

(angle chasing $Q\hat{Z}P = \ldots = \pi - Q\hat{A}P$)

se la tesi è vera, Z è il pt. di Tangenza $\Longleftrightarrow X\hat{Z}P = P\hat{Q}Z + Z\hat{T}X$

A caso

1) $\overset{\triangle}{\Pi XY} \simeq \overset{\triangle}{ABC}$

Backwards

1) Se T, Z, D (D t.c. $ABCD$ trapezio isoscele) sono allineati, ho finito.

1) $\overset{\triangle}{\Pi XY} \simeq \overset{\triangle}{ABC}$

$$\left(\begin{array}{l} BB \cdot BQ = BE \cdot BA \\ CQ \cdot CP = CF \cdot CA \end{array}\right. \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{CA}{BA}$$

$\Downarrow$

OK similitudine

$$P\hat{Z}X = P\hat{\Pi}X = \hat{B}$$

$$P\hat{Q}Z = \Pi\hat{Q}Z = \Pi\hat{Y}Z$$
$$Z\hat{T}X = Z\hat{Y}X$$
$$\Rightarrow P\hat{Q}Z + Z\hat{T}X = \Pi\hat{Y}X = \hat{B}.$$

fine.

1) (IMO 1985) Cfr di centro O passa per i vertici A e C del triangolo ABC e interseca i lati BA e BC in K, N risp.
$(ABC) \cap (KBN) = \{B, M\}$. Dim che $O\hat{M}B = \frac{\pi}{2}$

2) (USA TST 2007) Il triangolo ABC è inscritto in ω. Le tangenti a B e C si incontrano in T. S sta su BC ed è tale che $AS \perp AT$. B_1, C_1 stanno su ST (C_1 tra B_1 e S) tali che
$B_1T = BT = C_1T$.
Dim che ABC e AB_1C_1 sono simili

3) (IMO 2005) $ABCD$ convesso con $BC = AD$ ma non paralleli.
E, F punti sui segmenti BC, AD t.c. $BE = DF$.
$AC \cap BD = P$, $BD \cap EF = Q$, $EF \cap AC = R$.
Si considerino tutti i triangoli PQR al variare di E, F.
Dim che le cfr. circo di questi triangoli passano per uno stesso pt.

G3 - Advanced

Titolo nota 06/09/2017

IMO 2015 SL G8

Due triangolazioni di un poligono convesso con triangoli della stessa area differiscono al più per una coppia di triangoli.

Sol: Idea: $\boxed{\text{parallelogramma}}$

parallela al lato

$\Downarrow$

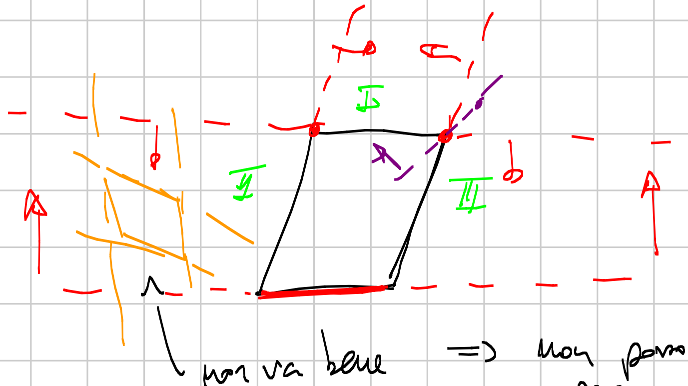
Trapezio

Claim: ogni triangolo contiene un lato del poligono

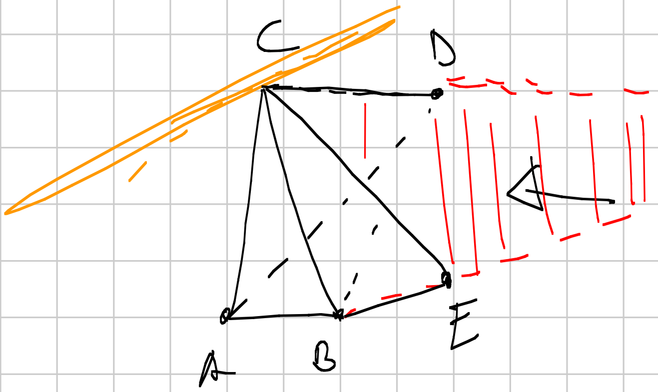
Se il compl. del tr. rosso (o di quello blu) sta pure nella triangolazione $\Rightarrow$ ok

Parallelogramma

→ 1. Trapezio
2. cerco di ottenere un parallelogramma
→ 3. dimostro che non posso avere + di 1 parallelogramma



$\Rightarrow$ non possono essere due parallelogrammi.

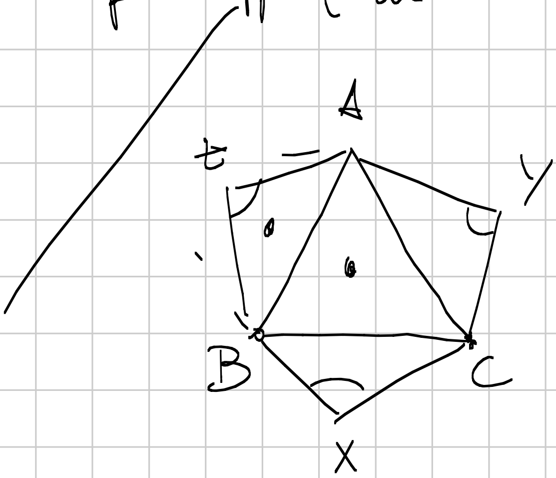


[BEX] < [BEC]

non va bene

Un Claim! oss: il prob. è invariante per affinità

⇒ se ho un triangolo tutto di diagonali,
posso supporre che sia equilatero.

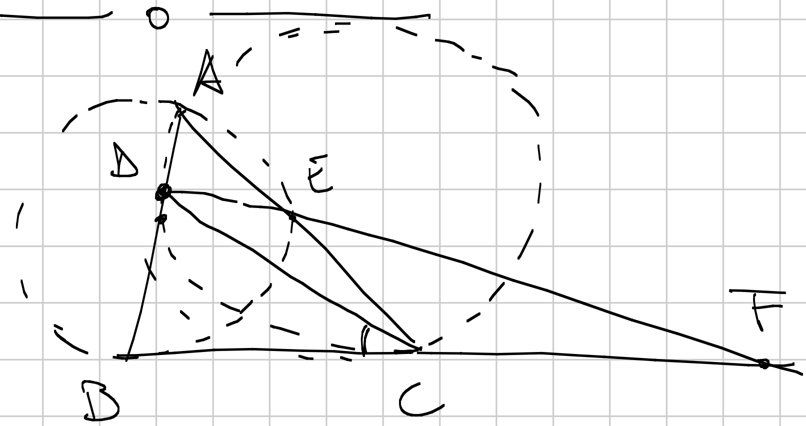


AYCXBZ convesso

$\hat{Z} > 60^\circ$

⇓ non tornano le aree.

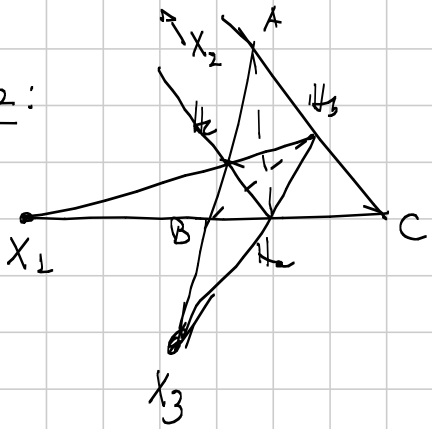
CHKMO'14



Th: ~~AH~~ Euler line

Sol baricentrica furba

Lemma:



$\Rightarrow$ X_1, X_2, X_3 allineati

BCH_bH_c ciclico

$\Downarrow$

$X_1B \cdot X_1C = X_1H_b \cdot X_1H_c$

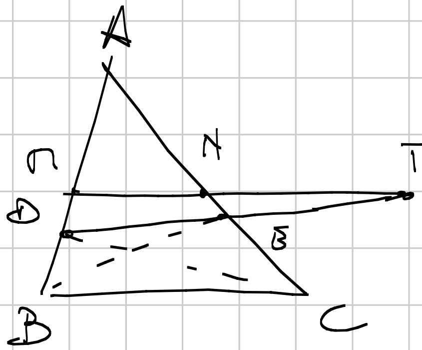
$\Rightarrow$ $X_1 \in$ asse rad tra circonscritta e Feuerbach

asse rad $\perp$ congiungente dei centri
= Euler line

così X_2, X_3

$\Rightarrow$ mi basta dim che $AF \,//\, X_2X_3$

Alternativa:

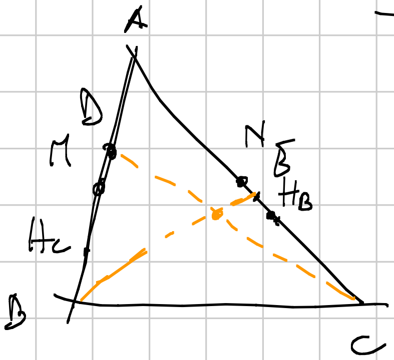


$\Rightarrow$ $AT \perp$ retta di Eulero

1) $DMNE$ ciclico
centro R = centro della cf di Feuerbach.
$S \in AT$ pt. Miquel.

$RS \perp AT$

$O\hat{S}A = 90^\circ$ e $H\hat{S}A = 90^\circ$ $\Rightarrow$ retta di Eulero $\perp AT$



M, N punti medi
D, E punti del tetto

H_B, H_c piedi altezze.

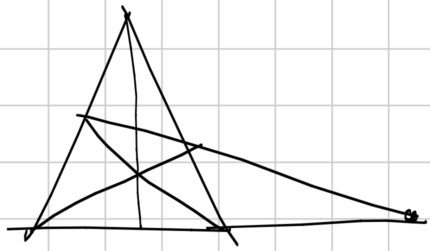
$DC \cap BE = X$

$H_BH_c \cap MN = T$

$NH_c \cap MH_B = Y$

Voglio A, F, T allineati

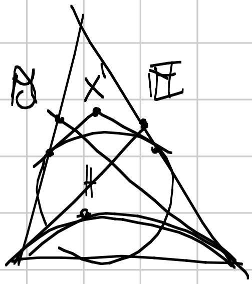
$(AB, AC; AX, AF) = -1$
$(AB, AC; AY, AT) = -1$

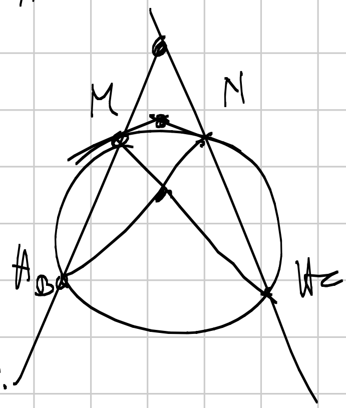


voglio A, X, Y allineati
BE, CD sono tangenti a (BHC)

$\Rightarrow$ definisco X' intersez. delle tg. in M, N alla Feuerbach

A, X', X allineati



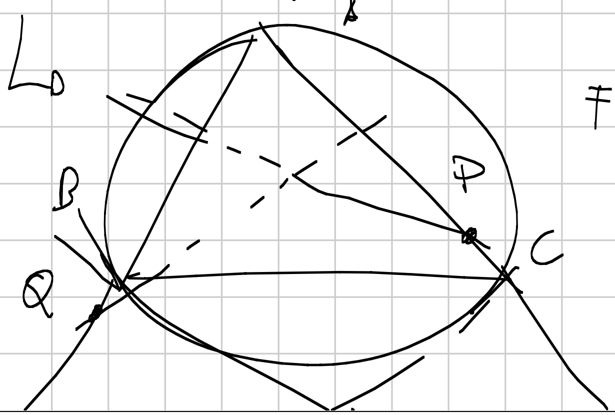


$MNH_C\,MMH_B$ Pascal $\Rightarrow A, Y, X'$ allineati.

—— o ——

Th $\Leftrightarrow$ AF è l'asse radicale tra le cfr di diam. AH e AO.

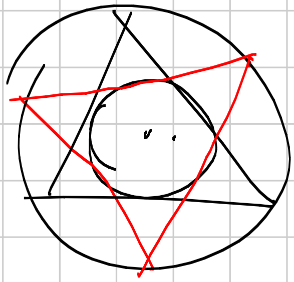
inv + simm. in A + omot. di centro A fattore $\frac{1}{2}$



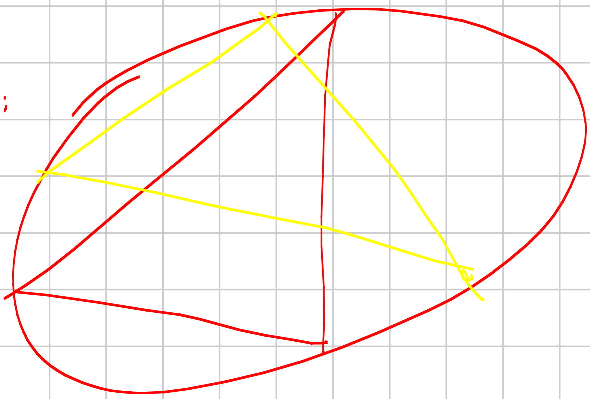
$F = (ADE) \cap (ABC)$

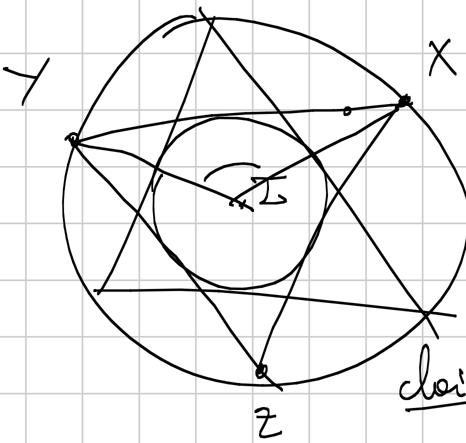
AF
PQ concorrono.
BC

Poncelet: $OI^2 = R(R-2r)$ → esiste anche per quadrilateri



Lemma:





Poncelet $\Rightarrow \exists\, Z$

$\widehat{XIY} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\hat{Z}$

$\widehat{XOY} = 2\hat{Z}$

claim: $\widehat{XIY} = 120^\circ \iff XOIY$ ciclico

Senior 2017 - N1 Advanced Anér

Titolo nota

Anello: insieme A con $+$ $-$ $\cdot$, tipo $\mathbb{Z}$

$\forall x, y \in A$ avete $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$
esiste 0, esiste 1

Campo: anello in cui posso sempre dividere per elementi $\neq 0$

<u>Esempi</u> $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}\left[\frac{\sqrt{-7}+1}{2}\right]$, $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{R}[x]$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[x]$ sono anelli

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}(x)$ sono campi

Un dominio è un anello in cui vale la seguente:
se $x, y \neq 0$ anche $xy \neq 0$. Es: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}[x]$ domini

---

Sia $\mathbb{K}$ un campo e $p(x) \in \mathbb{K}[x]$ monico
$p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Supponiamo
$p(x)$ irriducibile, $\deg p = n \geq 2$

Se p non ha radici in $\mathbb{K}$, le inventiamo!
Inserisco α e impongo $p(\alpha) = \alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$

ottengo $\mathbb{K}[\alpha] = \{$scritture del tipo $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i \alpha^i$ con $\lambda_i \in \mathbb{K}$, $k \in \mathbb{N}$ $\}$ a meno di multipli di $p(\alpha)$

OSS Ogni elemento di $\mathbb{K}[\alpha]$ ha rappr. con $k \leq n-1$ (divisione euclidea)

OSS $\mathbb{K}[\alpha]$ è un anello

OSS $\mathbb{K}[\alpha]$ è anche un campo: sia $q(\alpha) \neq 0$ in $\mathbb{K}[\alpha]$

vuol dire che $q(x)$ non è un multiplo di $p(x)$

$p(x)$ irrid. $\rightsquigarrow$ $q(x), p(x)$ coprimi $\rightsquigarrow$ Bezout

$\exists$ trovo $a(x)\ b(x) \in \mathbb{K}[x]$: $a(x) \cdot p(x) + b(x)\, q(x) = 1$

OSS $\mathbb{K}[\alpha]$ è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{K}$, cioè

lin sp. vett.
1. Posso sommare elementi di $\mathbb{K}[\alpha]$ tra loro
2. Posso moltiplicare $q(\alpha) \in \mathbb{K}[\alpha]$ per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$

dim n
3. $1, \alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}$ sono una base

$\mathbb{K}[\alpha]$ è un'estensione algebrica di grado n di $\mathbb{K}$

Prendiamo un dominio A (se servirà, $\mathrm{Frac}(A) = \mathbb{K}$ il campo delle frazioni)

$p(x) \in A[x]$ monico irriducibile (anche in $\mathbb{K}[x]$)

Aggiungo α come prima, ma $A[\alpha]$ sarà ora solo un anello, che è un dominio $A[\alpha] \subseteq \mathbb{K}[\alpha]$

$$\begin{array}{ccc} A & \subseteq & A[\alpha] \\ \cap & & \cap \\ \mathbb{K} & \subseteq & \mathbb{K}[\alpha] \end{array}$$

campo delle frazioni

campo delle frazioni

Def Dato $A \subseteq \mathbb{L}$ A anello $\mathbb{L}$ campo, $\beta \in \mathbb{L}$, β è intero su A se esiste un polinomio $p(x)$ monico a coefficienti in A ($p(x) \in A[x]$) t.c. $p(\beta) = 0$

Esempio/giustificazione $A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}$, allora gli interi su $\mathbb{Z}$ dentro $\mathbb{Q}$ sono proprio $\mathbb{Z}$!

$A = \mathbb{Z}$, $\mathbb{L} = \mathbb{C}$, adesso i è intero su $\mathbb{Z}$ perché è radice di $x^2 + 1$. $\sqrt{2}$ è intero su $\mathbb{Z}$ $(x^2 - 2)$

$\frac{\sqrt{-7}+1}{2}$ è intero su $\mathbb{Z}$ $(x^2 - x + 2)$

TEO Gli interi su $\mathbb{Z}$ contenuti in $\mathbb{C}$ sono un anello (e contengono tutto $\mathbb{Z}$).

DIM • ogni $n \in \mathbb{Z}$ è radice di $x - n$;

• Se α è radice di $p(x)$, $-\alpha$ è radice di $\pm p(-x)$;

• Se α è radice di $p(x)$ e β radice di $q(x)$, $\alpha + \beta$ di chi è radice? E $\alpha\beta$?

Caso semplice (?) $\alpha = \sqrt{2}$ $\beta = i$ $\qquad \pm\sqrt{2} \pm i$ è radice di chi?

$(x - \sqrt{2})^2 = i^2 \qquad x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 = -1 \qquad x^2 + 3 = 2\sqrt{2}x$

$(x^2 + 3)^2 = 8x^2$ e ricomponendo ...

Caso generale $p(x) = (x - \alpha_1) \cdot \ldots (x - \alpha_n)$ $\qquad \alpha = \alpha_1$

$q(x) = (x - \beta_1) \ldots (x - \beta_m)$ $\qquad \beta = \beta_1$

Sembra una buona idea cercare un polin. che ha $\alpha_i + \beta_j$ come radici, per tutti gli i e j...

$$r(x) := \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m}} (x - \alpha_i - \beta_j)$$ ha $\alpha + \beta$ come radice. Ma è in $\mathbb{Z}[x]$?

Idea: considero la "stessa espressione" nell'anello polinomiale $\mathbb{Z}[x, A_1 \dots A_n, B_1 \dots B_m]$

$R(x) = \prod (x - A_i - B_j)$ è simmetrico nei B_j

$\rightsquigarrow$ vive in $\mathbb{Z}[x, A_1 \dots A_n, s_1(B_j..) \dots s_m(B_j)]$

è simm. negli A_i $\rightsquigarrow$ vive in $\mathbb{Z}[x, s_1(A_i) \dots s_n(A_i), s_1(B_j) - s_m(B_j)]$

---

① Trovare le soluzioni razionali di

$$x^3 + 3y^3 = x^2 + 2y^2$$

② Dim che $x^3 + y^3 = 9$ ha molte ∞ soluzioni razionali

③ $\begin{cases} x + y = z + u \\ 2xy = zu \end{cases}$ ha tante soluzioni intere con x e $y > 0$ (e wlog $x > y$)

Trovare, al variare di queste, $\inf \frac{x}{y}$.

Polinomi ciclotomici $x^n - 1$ si può fattorizzare come $\prod_{d|n} \Phi_d(x)$, dove $\Phi_d(x)$ è il polinomio monico, di grado $\varphi(d)$, le cui radici sono le radici d-esime primitive di 1 in $\mathbb{C}$

Domanda Come sono fatti i coefficienti? Vedremo che

1) La lista di coefficienti è simmetrica: infatti $x^{\varphi(n)} \cdot \Phi_n\left(\frac{1}{x}\right)$ ha le stesse radici di $\Phi_n(x)$ e (a parte il caso $n=1$) è anche monico

2) Il secondo coefficiente è davvero 0, 1 o −1.
$$\Phi_n(x) = x^{\varphi(n)} + a_{\varphi(n)-1}\, x^{\varphi(d)-1} + \dots + 1 \quad \boxed{n\geq 2}$$

3) $n \in \mathbb{N}_0$ $\quad n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ chiamo radicale di n $\mathrm{rad}(n) = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. Confrontare $\Phi_n(x)$ e $\Phi_{\mathrm{rad}(n)}(x)$. (Suggerimento: $\varphi(n) = \varphi(\mathrm{rad}(n)) \dfrac{n}{\mathrm{rad}(n)}$)

$\Phi_n(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$. Per assurdo $\Phi_n(x) = f(x) \cdot g(x)$, $f, g \in \mathbb{Z}[x]$, monici (Gauss) supponiamo f irriducibile.
Ci sono due casi:

① Esiste un primo $q \nmid n$, ξ radice di f, con ξ^q radice di g

② Per ogni primo $q \nmid n$, ξ radice di f, anche ξ^q radice di f

(un attimo! Perché $\Phi_n(x)$ non ha radici doppie? Perché $x^n - 1$ non ha radici doppie (criterio della derivata)

Se vale ② allora $f = \Phi_n$: ② $\Rightarrow$ $\forall m$ coprimo con n, $\forall \xi$ radice di f, anche ξ^m è radice di f. Fine del caso ②

Se vale ① la faccenda è più complicata.

ξ^q è radice di g, considero il polinomio $g(x^q)$: questo ha ξ come radice, ma allora $f(x)$ è un divisore $g(x^q)$. $g(x^q) = f(x) \cdot h(x)$ in $\mathbb{Z}[x]$

$$f(x) \cdot h(x) = g(x^q) \equiv [g(x)]^q \quad (\mathrm{mod}\ q)$$

[Attenzione! $x^q - x$ non è il polinomio nullo in $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[x]$, benché sostituendo a x ogni classe mod q venga 0

Riscrivo : $f(x) \cdot h(x) \equiv (g(x))^q \quad (\mathrm{mod}\ q)$

Prendo un fattore irriducibile di f mod q

$F(x) \equiv \ell(x) \cdot i(x)$ ed $\ell(x)$ è irrid. mod q.

$$\ell(x) \cdot i(x) \cdot h(x) \equiv [g(x)]^q \pmod q$$

$\ell(x)$ deve essere un fattore di $g(x) \pmod q$

$$g(x) \equiv \ell(x) \cdot m(x) \pmod q$$

$$\Phi_n(x) = F(x) \cdot g(x) \equiv [\ell(x)]^2 \cdot i(x) \cdot m(x) \pmod q$$

$$x^n - 1 = \left[\prod_{\substack{d \mid n \\ d \neq n}} \Phi_d(x)\right] \cdot [\ell(x)]^2 \cdot i(x) \cdot m(x) \pmod q$$

$$\frac{d}{dx}(x^n - 1) = n x^{n-1} \not\equiv 0 \pmod q$$

perché $q \nmid n$ per ipotesi

3) Claim $\Phi_n(x) = \Phi_{rad(n)}\left(x^{\frac{n}{rad(n)}}\right)$

Infatti sono entrambi monici, e hanno le stesse radici: basta, per ragioni di grado, controllare che ogni radice n-esima ξ primitiva di 1 annulla $\Phi_{rad\, n}\left(x^{\frac{n}{rad\, n}}\right)$

$\xi^{\frac{n}{rad\, n}}$ è una radice dell'unità di ordine $rad(n)$

$\rightarrow$ tesi

2) Def: la funzione μ di Möbius $: \mathbb{N}_0 \rightarrow \{0, -1, 1\}$ è definita così: se $n = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{se qualche } \alpha_i \geq 2 \,; \\ \text{altrimenti} & \begin{cases} 1 & \text{se } K \text{ pari} \\ -1 & \text{se } K \text{ dispari} \end{cases} \end{cases}$$

Proprietà:

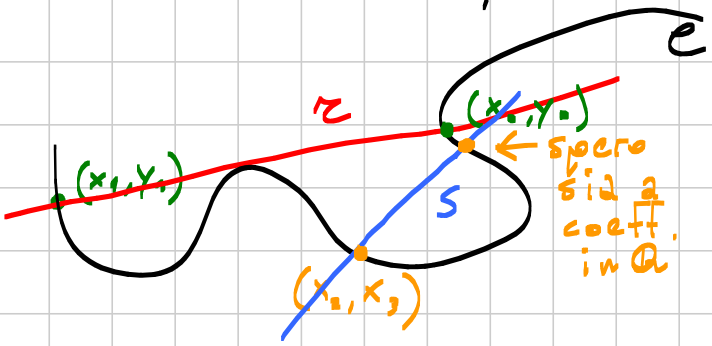
- $\mu(1) = 1$
- $\sum_{d \mid n} \mu(d) = 0 \quad$ se $\quad n \geq 2$

Sorpresona: $\Phi_n(x) = x^{\varphi(n)} - \mu(n) \cdot x^{\varphi(n)-1} + \dots$

Induzione: chiamo c_n la somma delle radici n-esime primitive di 1. Allora vale anche

- $c_1 = 1$
- $\sum_{d \mid n} c_d =$ somma tutte le radici n-esime di $1 = 0$
  se $n \geq 2$

Idea per trovare punti razionali su curve: usare rette con equazioni a coeff. in $\mathbb{Q}$.



$(x_0, y_0), (x_1, y_1)$ a coeff. in $\mathbb{Q}$

r ha equaz. a coeff. in $\mathbb{Q}$

parto da (x_2, y_2), traccio una retta s (tutto in $\mathbb{Q}$)

oss Se $\mathcal{C}$ è di secondo grado funziona!

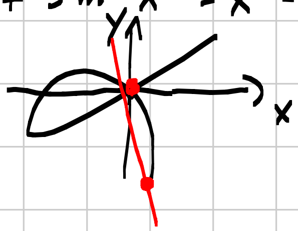
Con questo metodo trovo tutti i punti razionali di una conica: ne trovo uno P (il primo, il punto base), e poi per ogni retta s a equazione in $\mathbb{Q}$ passante per P, ne trovo un altro, e così li ottengo tutti

OSS Per una cubica, se ho 2 sol. razionali, la retta che le congiunge interseca una terza volta la cubica in un (nuovo?) punto razionale

① $\mathcal{C}: x^3+3y^3-x^2-2y^2=0$ (0,0) è radice.

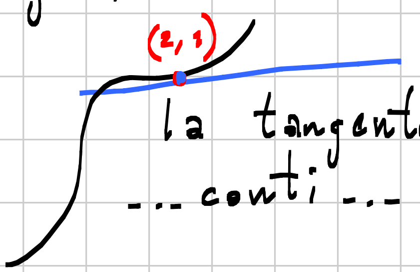
Considero $r: y=mx$ ($m \in \mathbb{Q}$ è la generica retta razionale per l'origine
poi a parte considero $r: x=0$)

$$x^3+3m^3x^3-x^2-2m^2x^2=0=x^2\left([1+3m^3]x-2m^2-1\right)$$



② Trovare tanti pti razionali su x^3+y^3-9.
Usare (2,1), (1,2) e la retta $x+y=3$ che li congiunge, non funziona!

Provo con



la tangente a $\mathcal{C}$ per (2,1)
... conti ... nuovo punto razionale!

x CASA: trovare un argomento per dire che ci sono ∞ pti razionali.

OSS il punto all'∞ in direzione $x=-y$ sembra essere singolare. Provo a usare le rette

$y = -x + k$.

$y^3 + x^3 - 9 = k^3 - 3k^2x + 3kx^2 - 9 = 0$ non è di primo grado in x

$\Delta = 9k^4 - 12k^4 + 108k = -3k^4 + 108k$

$$\begin{cases} x+y = u+z \\ 2xy = uz \end{cases} \qquad t^2 - (u+z)t + (uz) = t^2 - (x+y)t + 2xy$$

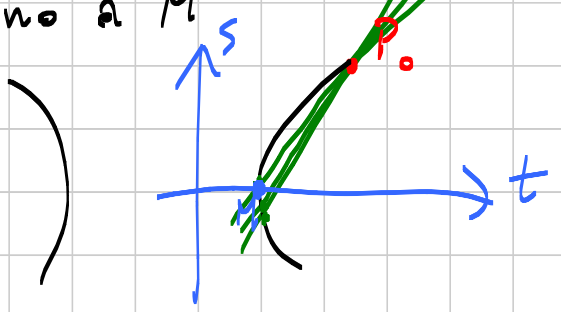
$$\Delta = (x+y)^2 - 8xy = x^2 - 6xy + y^2 = y^2 \cdot \left(\left[\frac{x}{y}\right]^2 - 6\left[\frac{x}{y}\right] + 1\right)$$

$$t := \frac{x}{y} \qquad s := \sqrt{\Delta}$$

ci ritroviamo a cercare punti razionali per

$t^2 - 6t + 1 = s^2$. Vogliamo trovare punti di questa iperbole con t piccolo

- trovo un punto razionale P_0 sull'iperbole
- trovo il punto di min. reale M per t (il più piccolo $t > 1$ per cui $t^2 - 6t + 1 \geq 0$)
- tracciamo una retta razionale per P_0 e passante vicino a M



P advanced – Un po' di analisi

Titolo nota 02/09/2017

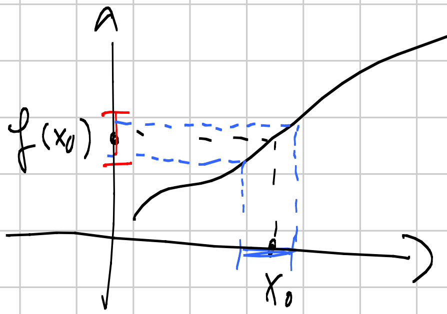
- **Continuità**

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$(*)\quad f(x+y)=f(x)+f(y) \implies f\ \mathbb{Q}\text{-lineare}$

– basi di Hamel

$(*)+$ continuità
monotonia
$\exists\ \square$ nel piano che non interseca grafico di f
$\vdots$
$\implies f\ \mathbb{R}\text{-lineare}$



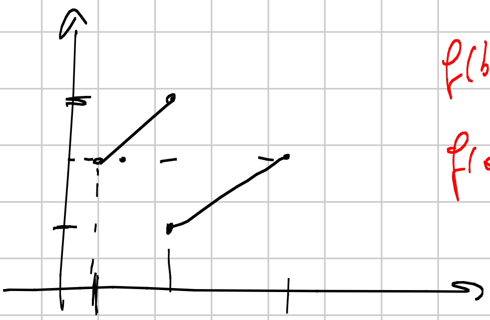
$\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$ t.c.

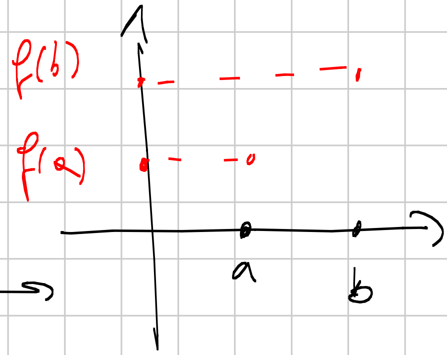
$|x-x_0|<\delta \implies |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)}$$

Fatto: f continua + iniettiva $\implies$ monotona





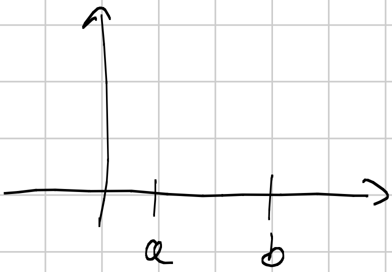
Fatto: monotona + surgettiva $\implies$ continua

·) continuità, max & min

Teo di WEIERSTRASS

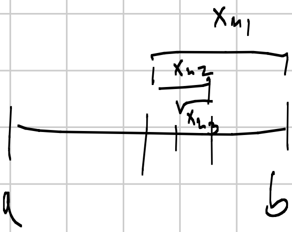
$f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continua

$\Rightarrow f$ ha max e min in $[a,b]$



1) f limitata: per assurdo $\forall M > 0 \ \exists x_M \in [a,b]$ t.c. $f(x_M) > M$; wlog

$[a,b] \supseteq \{x_n\}$ t.c. $f(x_n) > n \quad \forall n \in \mathbb{N}$



$x_{n_j} \xrightarrow[j \to +\infty]{} c \in [a,b]$

$\Rightarrow \exists x_{n_j} \to c \in [a,b] \Rightarrow \lim_{j \to +\infty} f(x_{n_j}) \overset{\text{continuità}}{=} f(c)$

$\geq$

$\lim_{j \to +\infty} n_j = +\infty$

<u>Varianti di W</u>

1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua + periodica

2) $\exists K = [a,b]$ t.c. max e min devono stare in K.

$\Rightarrow f$ ha max e min

f cont + limitata no   Es: $f(x) = \arctan x$

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Es di 2: $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ + $f(x) > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ max

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\exists$ max o min o entrambi

$L = \pm\infty$ $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \exists$ min

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \exists$ max

Es: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua t.c. $f(x+y+f(xy)) = f(x+y) + xy \quad \forall x,y \in \mathbb{R}$

1) $y = 0 \to f(x + f(0)) = f(x) + 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ periodica se $f(0) \neq 0$

$\Rightarrow f$ ha max e min per Weierstrass

$x = -y \Rightarrow ff(-x^2) = -x^2 + f(0) \Rightarrow f(\mathbb{R}) \supset (-\infty, 0]$

$\Rightarrow$ assurdo $\Rightarrow f(0) = 0$

2) $f(f(-x^2)) = -x^2 \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ se $x \neq y$ e $x, y < 0$

3) f continua + iniettiva su $(-\infty, 0) \Rightarrow$ monotona

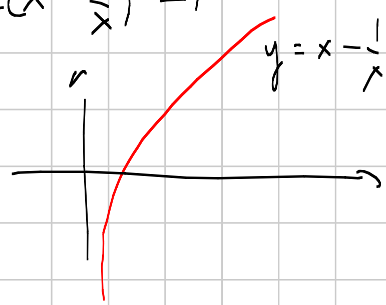
se $\exists\, t<0$ t.c. $f(t) < 0 \Rightarrow f(t) = t \quad \forall t < 0$

$\forall n > 1 \quad f(n-1 + f(-n)) = f(n-1) - n$

$f(\cancel{n} - 1 - \cancel{n}) = f(-1) = -1 \qquad \Rightarrow f(n-1) = n-1$

se $\exists\, t<0$ t.c. $f(t) > 0 \Rightarrow f$ decrescente su $(-\infty, 0)$

$y = -\frac{1}{x} \Rightarrow f\left(x - \frac{1}{x} + f(-1)\right) = f\left(x - \frac{1}{x}\right) - 1$



$y = -\frac{k}{x} \qquad f\left(x - \frac{k}{x} + f(-k)\right) =$

$k > 0 \qquad = f\left(x - \frac{k}{x}\right) - k$

$x - \frac{k}{x} = z \qquad x - \frac{k}{x} + f(-k) = w$

$\Rightarrow f$ decrescente $+ f(f(-x^2)) = -x^2 \Rightarrow f$ inj + surj

$$f(a+f(-k)) = f(a) - k$$

$$f(-k) = b > 0 \qquad f(b) = ff(-k) = -k$$

$$f(a+b) = f(a) + f(b) \qquad a,b>0$$

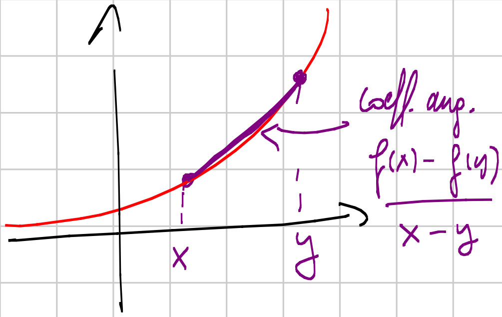
$\Rightarrow$ Cauchy su $\mathbb{R}$ $\qquad \lambda = \pm 1$

Es sbagliato $\quad f: [1, 2017] \to [1, 2017]$ t.c.

$$|f(x) - f(y)| \geq |x-y| \quad \forall\, x,y \in [1, 2017]$$

Sol (NO!):

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \geq 1$$



e se non è derivabile?

$\Rightarrow |f'(x)| \geq 1 \quad \forall x \in [1, 2017]$

wlog $\quad f'(x) \geq 1 \quad \forall x \in [1, 2017]$??

$$2017 \geq f(2017) = \int_1^{2017} f'(x)\,dx + f(1) \geq 2016 + f(1) \geq 2017$$

$$\Rightarrow f'(x) \equiv 1 \Rightarrow f(x) = x$$

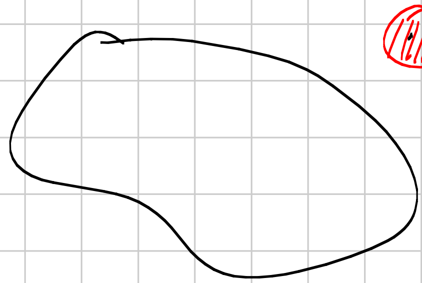
NO!!

Massimi e minimi

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ - è chiuso se $\forall x \notin K \ \exists r>0$ t.c.

$$\|y-x\|<r \Rightarrow y \notin K$$

- è limitato se $\exists R>0$ t.c. $\|x\|<R \ \forall x \in K$



es: $x>0, y>0$ descrive un insieme non chiuso e non limitato.

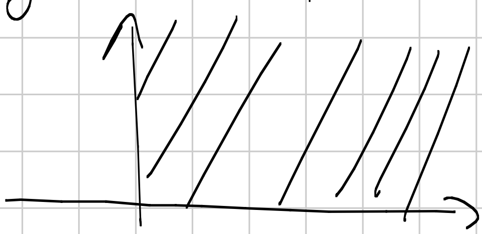
Teo W: $f: K \to \mathbb{R}$ continua + K chiuso e limitato $\Rightarrow$ f ha max e min su K.

——— o ———

Teo: $f: K \to \mathbb{R}$ continua e con derivate continue
max e min di f, se esistono si trovano

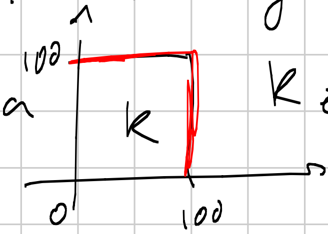
1) dove tutte le der di f si annullano
2) sul bordo di K

Es: $x^4+y^5-x^2y = f(x,y)$ minimo per $x,y \geq 0$ non limitato.



$f(0,0)=0$. Se $x,y \geq 100 \Rightarrow x^4+y^5-x^2y>0$

$\Rightarrow$ mi restringo a



K è chiuso e limit.

Posso dire lo stesso con $K' = \{0 \leq x \leq 90,\ 0 \leq y \leq 90\}$

$\Rightarrow$ il min non sta nel bordo rosso.

Derivate: $x^a \to a x^{a-1}$ $\quad$ $\arctan x \to \dfrac{1}{1+x^2}$

$e^x \to e^x$

$\sin x \to \cos x$ $\quad$ $f \cdot g \to f' \cdot g + g' f$

$\cos x \to -\sin x$

$\log \to \dfrac{1}{x}$ $\quad$ $f(g) = f'(g) \cdot g'$

$$\frac{f}{g} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

$f(x,y) = x^4+y^5-x^2y$

$$f_x(x,y) = 4x^3+0-y\cdot 2x$$
$$f_y(x,y) = 5y^4-x^2$$

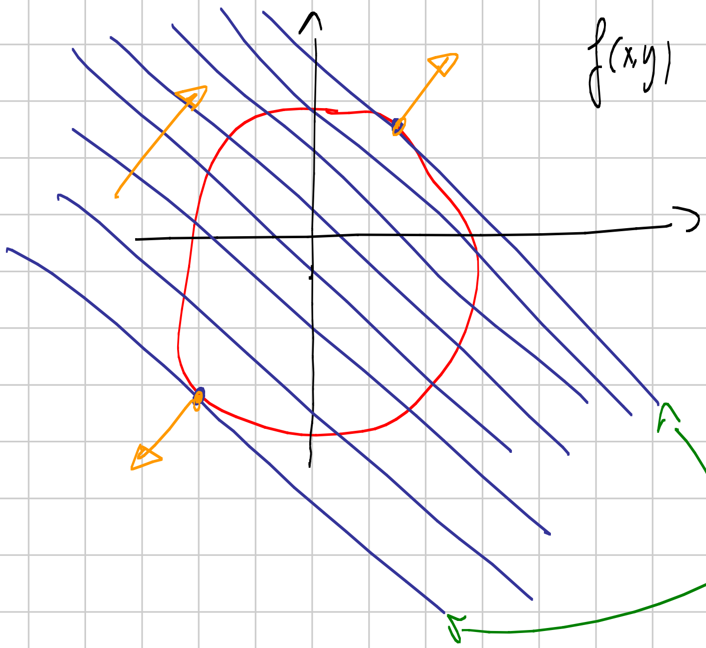
$$\begin{cases} 4x^3-2xy=0 \\ 5y^4-x^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2x^2 \\ 5\cdot 16x^8-x^2=0 \end{cases} \quad x^2(80x^6-1)=0$$

$x=0 \Rightarrow y=0$

$x = \dfrac{1}{\sqrt[6]{80}} \Rightarrow y = \dots$

$\overset{0}{\overset{\|}{f(0,0)}}$, $f(\text{soluz}, \text{soluz}) = \dots$



Il vett. normale a $f(x,y)=c$ è dato da $\begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}$ calcolato nei pt. opportuni.

<u>Teo</u>: f, g continue con der. continue, $\nabla g \neq 0$ su $\{g=0\}$ ← vet. delle derivate

$\Rightarrow$ max e min di f ristretta a $\{g=0\}$ sono pt. tali che $\nabla f = \lambda \cdot \nabla g \quad \lambda \in \mathbb{R}$

[oppure nei pt. di bordo di $\{g=0\}$, se esistono]

<u>Es</u>: dim che $a^3+b^3+c^3 \leq (a^2+b^2+c^2)^{\frac{3}{2}} + 3abc$ con $a+b+c>0$

<u>Sol</u>: è omogenea $\Rightarrow$ scelgo $a^2+b^2+c^2=1$ che è un vincolo chiuso e limitato

$$f(a,b,c) = a^3+b^3+c^3-3abc \qquad g(a,b,c) = a^2+b^2+c^2-1$$

$$\nabla g = \begin{pmatrix} 2a \\ 2b \\ 2c \end{pmatrix} \qquad \nabla f = \begin{pmatrix} 3a^2 - 3bc \\ 3b^2 - 3ac \\ 3c^2 - 3ab \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\nabla g = 0 \iff a = b = c = 0 \not\in \{g = 0\}}$$

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad + \quad g = 0$$

$$\begin{cases} 3a^2 - 3bc = 2a \cdot \lambda \\ 3b^2 - 3ac = 2b \cdot \lambda \\ 3c^2 - 3ab = 2c \cdot \lambda \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$$

$$\frac{3}{2}\left(\frac{a^2 - bc}{a}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{b^2 - ac}{b}\right) = \frac{3}{2}\left(\frac{c^2 - ab}{c}\right)$$

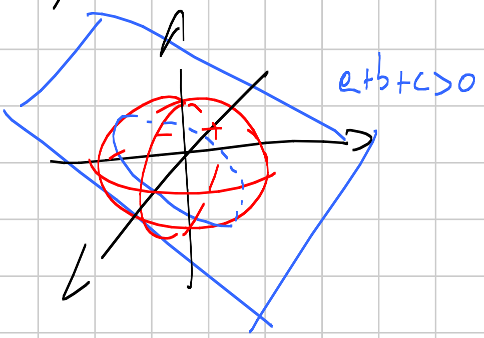
$$a^2 b - b^2 c = ab^2 - a^2 c \qquad (a-b)(ab+bc+ca) = 0$$

1) $c = a = b \Rightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$

2) $ab + bc + ca = 0 \qquad (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 = 1$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ac - ba - cb) =$$

$$= 1 \cdot (1 - 0) = 1$$



Es: Minimo M t.c.

$$\left|\sum_{cyc} ab(a^2-b^2)\right| \le M(a^2+b^2+c^2)^2 \qquad \forall a,b,c\in\mathbb{R}$$

$a^2+b^2+c^2=1$ $\qquad g(a,b,c)=a^2+b^2+c^2-1$

$$f(a,b,c)=\sum_c ab(a^2-b^2)$$

$$\nabla g=\begin{pmatrix}2a\\2b\\2c\end{pmatrix} \qquad \nabla f=\begin{pmatrix}-b^3+ba^2+2a^2b+c^3-ca^2-2a^2c\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$3ba^2-b^3+c^3-3a^2c=2\lambda a \quad \cdot b$$
$$3b^2c-c^3+a^2-3b^2a=2\lambda b \quad \cdot a$$

$$3b^2a^2-b^4+c^3b-3a^2cb=3ab^2c-ac^3+a^4-3b^2a^2$$

(1) $a^4+b^4-6a^2b^2=-3bca^2-3acb^2+ac^3+bc^3=$
$=(a+b)(c^3-3abc)$

(2) $a^4+c^4-6a^2c^2=(a+c)(b^3-3abc)$

(3) $b^4+c^4-6b^2c^2=(b+c)(a^3-3abc)$

(1) + (2) + (3)

$$3(a+b+c)\overbrace{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}^{A}=$$
$$=(a+b+c)\underbrace{(a^3+b^3+c^3-6abc)}_{B}$$

$a^4+b^4+c^4=a^4+b^4+c^4$

$3A - B = 0$

$(2a-b-c)(2b-a-c)(2c-a-b)=0$

$\frac{1}{k}\left(-11 \pm 6\sqrt{2},\ 7,\ -2 \mp 3\sqrt{2}\right)$ circa

$\frac{9}{16\sqrt{2}}$