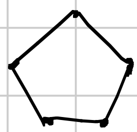
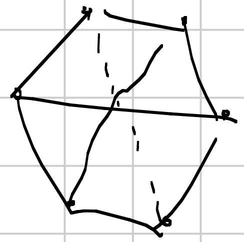
Titolo nota 03/09/2017

Qual è il minimo $n^{\geq 7,\,5}$ per cui esiste un grafo (connesso) su n vertici senza triangoli in cui ogni coppia di vertici non adiacenti ha esattamente k punti adiacenti in comune?

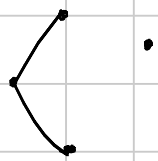
$k=1$



6?

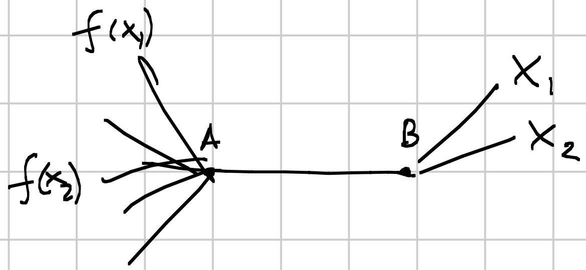


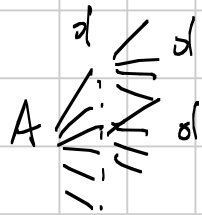
No



$k=2$ BMO 1994/4

Lemma tutti i vertici hanno lo stesso grado d





Contiamo gli amici degli amici di A

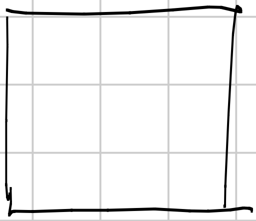
$$d^2-(d-1)-(n-d-1)=n-d$$

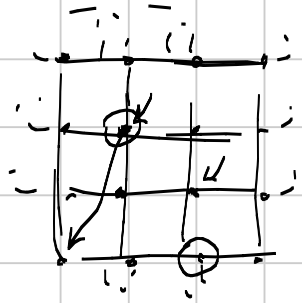
$$d^2+d=2n-2$$

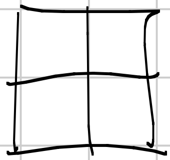
$$2d \leq n$$

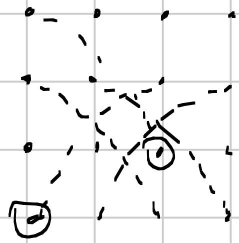
$d \geq 4$

d	n	
4,	11	? si esclude a mano
5,	16	









$\{0,1\}^4$

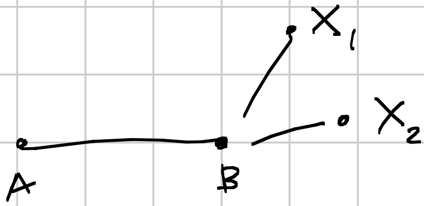
$a\ b\ c\ d$

$\bar{a}\ \bar{b}\ \bar{c}\ \bar{d}$

$k=3$?

$f(x).$

$g(x).$



d

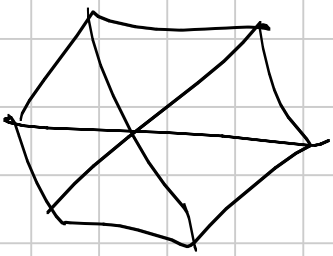
$d^2-(d-1)-2(n-d-1)=n-d$

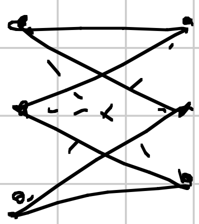
3, 6 funziona

$d^2+2d=3n-3$

$d^2+(k-1)d=kn-k$

$2d\leq n$





Combinatoria in
cui le configurazioni
possono variare con continuità,

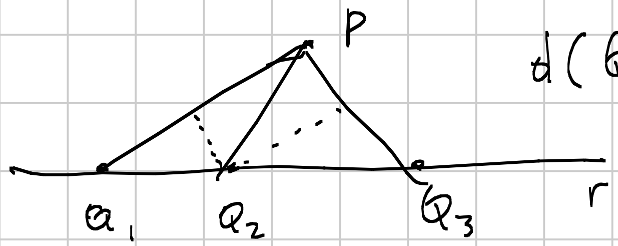
Bulgaria 2013 min S t.c. se coloro di 3 colori

i punti di $\mathbb{Z}^2$ $\exists$ sempre un triangolo monocromatico
di area S ?

Teorema di Sylvester: S insieme finito nel piano
di $n \geq 3$ punti t.c. $\forall$ coppia $P, Q \in S$ $\exists$ terzo punto di S
sulla retta di P e Q $\Rightarrow$ tutti i punti di S sono
allineati

Dim. $\min_{P,Q} \{ d(T, r(P,Q)) \mid T \in S, P, Q \in S \} = m.$

Se $m > 0$ si trova T' e $r(P', Q')$ t.c. $d(T', r(P',Q')) < m$.

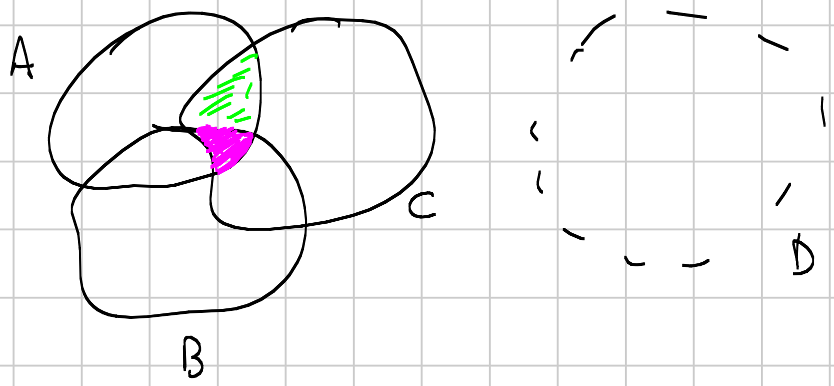


$d(Q_2, r(P,Q_1))$ o $d(Q_2, r(P,Q_3))$ o
$d(Q_3, r(P,Q_2))$ è $< m$,

Teorema di Helly Se in $\mathbb{R}^2$ c'è una famiglia di
convessi che si intersecano a 3 a 3, si intersecano
tutti

(Su $\mathbb{R}$ con intervalli che si inters. a 2 a 2,
in $\mathbb{R}^n$ con convessi " " a $n+1$ a $n+1$)

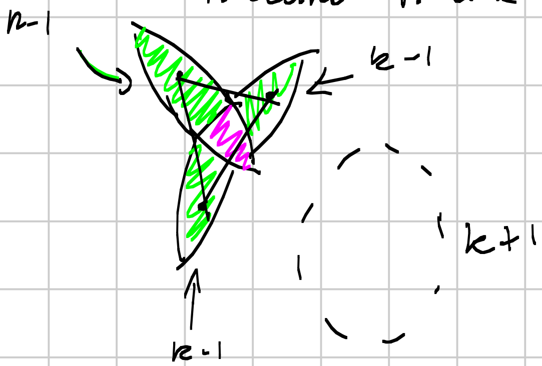
Dim.



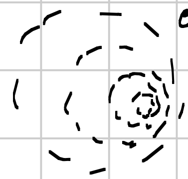
se

$C \supset A \cap B$ ok $D \cap A \cap B (\neq \emptyset) \cap C \neq \emptyset$

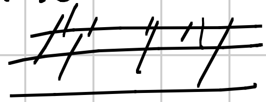
se no, le interS. a 2 a 2 (o a k-1 a k-1 nel passo induttivo meno l' $\cap$ a k a k)
$\cap$ a 3 a 3
sono non vuote e toccano l'$\cap$ a k a k.



e con infinite regioni? chiuse o aperte?



aperte no
chiuse illim. no



semipiani con bordo $\to \infty$

Altro esempio: il Windmill Problem

IMO 2011/2

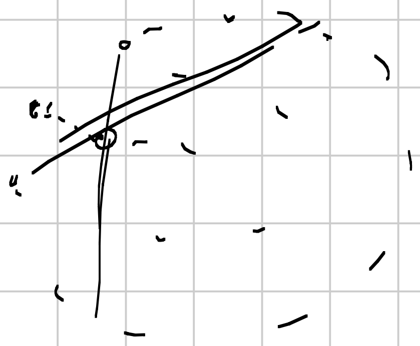
---

nel piano n punti bianchi
n punti neri
mai all. a 3 a 3

E' poss. collegarli con n segmenti ciascuno con estremi dei due colori che non si intersecano a 2 a 2

BMO 2010/3 n punti t.c. ogni triangolo è $\subset$ in una striscia larga 1. Allora sono tutti $\subset$ in
" " " 2

Idea (forse) x gli n punti ~~bianchi~~ e n neri:



Se sul bordo dell'inviluppo ce ne sono 2 di colori diversi, induz.

Se no?

n punti P_i $d(P_i, P_j) \leq 1 \Rightarrow \exists$ cerchio di raggio $\frac{\sqrt{3}}{3}$ che li contiene tutti.

IMO 2013/2 4027 punti non all. a 3 a 3 2014 blu 2013 rossi

Qual è il min numero di rette necessarie a dividere il piano in regioni monocromatiche o vuote?

RMM 2011/5 N punti t.c. $\forall$ 2 punti p, q $\exists$ permutazione σ per cui $d(p, P_i) = d(q, P_{\sigma(i)})$ $\forall i$. Quali sono le possibili configurazioni?

RUS 2013 n rette mai a 2 a 2 parallele (nel piano) e mai a 3 a 3 concorrenti; dim. che $\exists$ spezzata semplice aperta che ha un segm. per ogni retta

ROM TST 2012 Trovare gli $S \subset \mathbb{R}^2$ finiti t.c. se $A, B, C, D \in S$ e $\overline{AB} \cap \overline{CD} = \{z\} \Rightarrow z \in S$

IRN 2011 TST n punti non tutti allineati, l retta sia <u>buona</u> se $\exists$ partiz. di $\{1, \dots, n\} = A \cup B$ t.c.

$$\sum_{i \in A} d(\ell, P_i) = \sum_{j \in B} d(\ell, P_j)$$. Dim. che esistono

infiniti punti per cui passano n+1 rette buone

HKG 2008 2008 circ. $C_1 \dots C_{2008}$ congruenti mai tangenti a 2 a 2 e ogni C_i interseca almeno 3 delle altre 2007. Qual è il min. numero di punti di intersezione?

As. Pac 2011 5 punti nel piano. Qual è il massimo del minimo degli angoli che possono definire?

Per induzione su N = # insiemi

$N = 4$ $\quad S_1 \dots S_4$ $\quad I_k = S_1 \cap S_2 \cap \overbrace{S_3}^{k} \cap S_4 = \bigcap_{i \neq k} S_i$

$I_k \neq \emptyset$ e convesso (ip. induttiva) $\quad p_k \in I_k$

l'inviluppo convesso è quadrilatero / triangolo

In ambedue i casi $\exists A, B$ t.c. $A \cup B = \{1,2,3,4\}$ $A \cap B = \emptyset$

t.c. $\mathrm{hull}(p_k, k \in A) \cap \mathrm{hull}(p_k, k \in B) \neq 0$ Sia Q un punto di ↗. Dico che $Q \in \cap S_i$ Infatti

$p_k \in I_k \subset S_i \quad \forall k \neq i$ $\qquad i \in A$, $S_i \ni p_k$ $k \in B$

quindi $S_i \supset \mathrm{hull}(p_k, k \in B) \ni Q$

$i \in B$. - - - $\Rightarrow S_i \ni Q$

Passo induttivo

$S_i \qquad i=1 \ldots N+1$

$T_i = S_i \qquad i=1 \ldots N-1$

$T_N = S_N \cap S_{N+1}$

$T_1 \ldots T_N$ rispettano le ipotesi

: convessi ovvio

$\cap$ a 3 a 3 se $i<N$ ok, se c'è anche T_N per il passo base.

$\Rightarrow \cap T_i \neq 0$.

$\quad \shortparallel$

$\bigcap_{i=1}^{N+1} S_i$