S17 - Combinatoria Advanced 3?

Titolo nota 07/09/2017

INVARIANTI

[Ballo] [Miglio]

1 Su una calcolatrice con infinita memoria ci sono solo i tasti:
$+$, $-$, $\wedge(-1)$ e le parentesi.
L'inverso

[I numeri a, b possono essere ripetuti]

Dati due numeri a e b alla calcolatrice, è sempre possibile trovare ab?
REALI

2 Ci sono n segmenti in posizione generale, che si intersecano in un punto interno tutti a due a due. Geoff dispone una rana su una estremità di ogni segmento e, ogni secondo, le rane avanzano fino alla successiva intersezione. Se due rane occupano lo stesso punto, Geoff muore.

a) Si dimostri che, se n è dispari, Geoff può salvarsi

b) Si dimostri che, se n è pari, Geoff non ha scampo

[IMO 6, 2016]

3) Siano dati $n \geq 4$ punti nel piano in posizione generale, collegati in qualche modo da n segmenti, in modo che da ogni vertice ne escano due. Una mossa consiste nello scegliere 2 segmenti AB e CD che si intersecano in un loro punto interno e sostituirli con i segmenti AC e BD. Si mostri che il gioco finisce prima di $\frac{1}{4}n^3$ mosse.

[IMO2014SL7]

4) Su un $2n$-agono regolare sono disposte $2n$ monete. Una mossa consiste nello scegliere un lato e scambiare le due monete su quel lato. Si supponga che, dopo un po' di mosse, ogni coppia di monete sia stata scambiata esattamente una volta. Si mostri che un lato non è mai stato scelto.

[RMM 6 2013]

5) In $\mathbb{R}^3$ sono scelti n punti a 4 a 4 non complanari e divisi in due parti A e $\mathbb{B}$. Gli n punti sono collegati da $n-1$ segmenti, ognuno con un vertice in A e uno in $\mathbb{B}$ in modo da formare un albero bipartito. Una mossa consiste nello scegliere 3 segmenti A_1B_1, B_1A_2, A_2B_2 tali che $|A_1B_1|+|A_2B_2| > |A_1B_2|+|B_2A_1|$ e sostituire

$A_1 B_1$ CON $A_1 B_2$. SI DIMOSTRI CHE SI POSSONO FARE SOLO UN NUMERO FINITO DI MOSSE.

[RMM 6 2016]

DOUBLE COUNTING

(1) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{N} \tau(k) = \sum_{k=1}^{N} \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor$$

dove $\tau(k)$ è il numero di divisori di k

(2) Dimostrare che

$$\sum_{k=1}^{N} \varphi(k) \left\lfloor \frac{N}{k} \right\rfloor = \binom{n+1}{2}$$

(3) a. Dimostrare che, per α irrazionale,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lfloor \alpha n \rfloor}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor}}$$

b. Se $\alpha + \beta = 1$, α e β irrazionali positivi, allora gli insiemi

$$\left\{ \left\lfloor \frac{n}{\alpha} \right\rfloor \right\} \quad e \quad \left\{ \left\lfloor \frac{n}{\beta} \right\rfloor \right\}$$

partizionano $\mathbb{N}^+$

(4) SIANO DATI n PUNTI IN POSIZIONE GENERALE NEL PIANO. UNA TRIANGOLAZIONE T CONSISTE IN UNA CONFIGURAZIONE DI SEGMENTI CON VERTICI SUGLI n PUNTI TALE CHE NESSUNA COPPIA DI SEGMENTI DI T SI INTERSECHI IN PUNTI INTERNI E OGNI SEGMENTO CON VERTICI SUGLI n PUNTI INTERSECHI UN SEGMENTO DI T. SI DIMOSTRI CHE T È FORMATO DA UN NUMERO DI TRIANGOLI CHE NON DIPENDE DA T

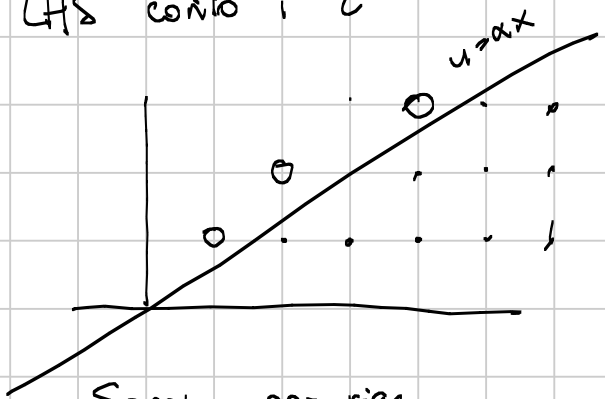
$$\sum_n^\infty \frac{\lfloor n\alpha \rfloor}{2^n} = \sum_n^\infty \frac{1}{2^{\lfloor \frac{n}{\alpha} \rfloor}}$$

LHS ho circa $k\alpha$ addendi 2^k

RHS ho circa α addendi 2^k

le claim di avere uguali 2^k fallisce miseramente

LHS conto i 2^k



per ogni (x,y) sotto ho $\frac{1}{2^x}$

Sommo per riga

Ogni volta che $\lfloor\alpha(x+1)\rfloor > \lfloor\alpha(x)\rfloor$ ho un fattore $\frac{1}{2^x}$