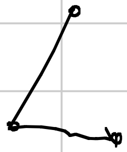
Senior 2017 - C3 Advanced Anér

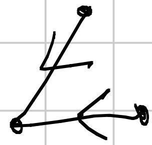
Titolo nota 06/09/2017

Verso il teorema MAX FLOW - MIN CUT

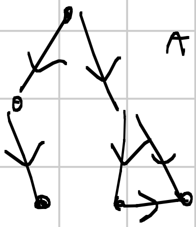
GRAFO ORIENTATO: grafo in cui ogni arco è orientato, ossia ogni arco ha una precisa direzione



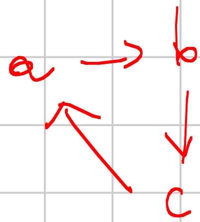
GRAFO



GRAFO ORIENTATO ACICLICO se non esiste un cammino orientato che torna al vertice di partenza



ACICLICO

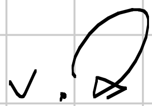


TORNEO: GRAFO orientato su n vertici, ogni coppia vertici è collegata da un arco

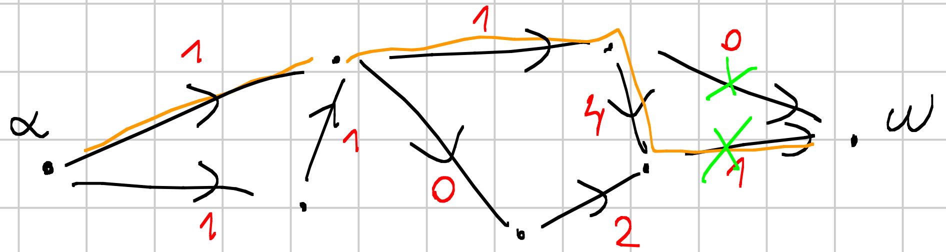
N.B.: tra due vertici v, w supponiamo ci sia

- o nessun arco
- o $v \to w$
- o $w \to v$

; niente cappi



RETE Grafo orientato aciclico con una sorgente α e un pozzo w (due vertici); supponiamo che dalla sorgente α si possa raggiungere w con un cammino orientato. Ogni arco ha un peso, ossia un numero reale ≥ 0.



Domanda: qual è la massima portata di un flusso da α ad w?

Flusso: scelgo una portata per ogni arco $\leq$ del suo peso, in modo che in ogni vertice il flusso entrante sia uguale a quello uscente.

La portata uscente da α è la portata del flusso

Es. Nel grafo sopra la portata max è 1:

- posso portare 1 lungo il cammino arancione
- la somma dei pesi degli archi verdi, che separano w dal resto del grafo (da α in particolare) è 1

In generale se in una rete ho un sottoinsieme S di archi, rimuovendo i quali α viene separato da w, allora $\max \text{flow} \leq \sum_{e \in S} p(e)$ dove $p(e)$ è il peso dell'arco e. Un tale S si chiama sezione della rete, $p(S) = \sum_{e \in S} p(e)$

Teo In una rete il massimo flusso è uguale al minimo peso di una sezione.

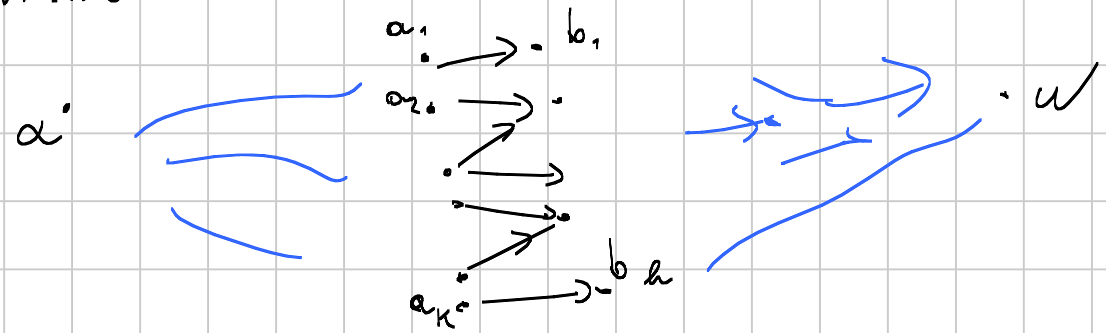
OSS Il $\leq$ segue dall'argomento sopra.

DIM Induzione su • num. di archi? • num. vertici?
ENTRAMBI! Passo base: $\alpha \xrightarrow{p(e)} \omega$

OSS Posso gettare subito via:

- gli archi di peso 0
- i vertici irraggiungibili da α
- i vertici da cui non si raggiunge ω

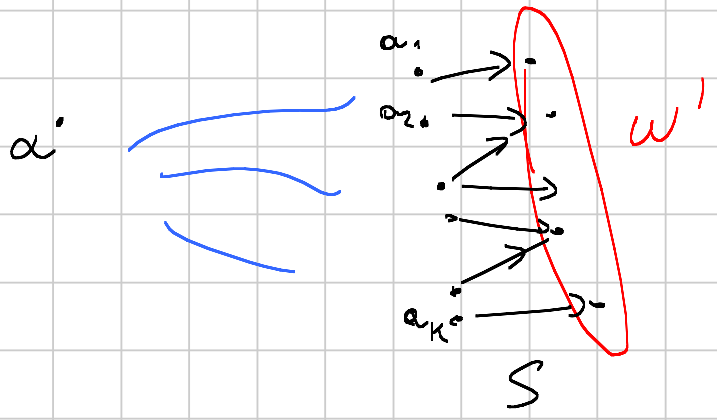
Disegniamo una rete con una sua minima sezione in evidenza



S

OSS Gli a_i sono le code di S e i b_j le punte di S; da ogni b_j si può raggiungere ω senza passare per S (altrimenti S non sarebbe la sez. minima); similmente da α si raggiunge ogni a_i senza passare per S; gli a_i sono diversi dai b_j

Costruiamo una nuova rete usando i vertici e gli archi a sinistra di S, e il nuovo pozzo si ottiene collassando a un solo vertice tutti i vertici a destra di S



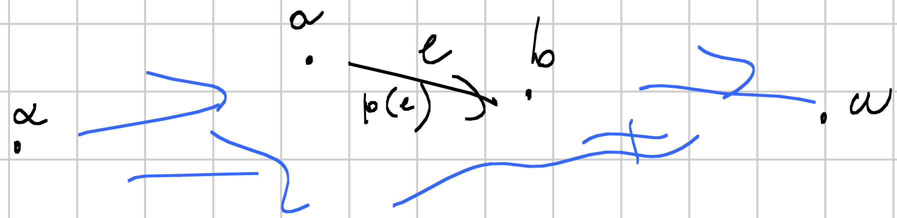
In questa nuova rete S è ancora una sez. minima. Se la nuova rete ha meno vertici e archi di prima, per induzione esiste un flusso di portata $p(S)$, in cui ogni arco di S sarà sfruttato al massimo...

Faccio lo stesso con la rete ottenuta collassando ciò che è a sinistra di S, di nuovo c'è un flusso di portata $p(S)$; i due flussi ora si possono incollare perché coincidono su S.

Non ho finito: può darsi che S sia l'insieme degli archi che entrano in ω, o che escono da α (altrimenti l'argomento induttivo funziona).

Possiamo assumere che tutte le sezioni minime siano del tipo $\{$archi entranti in $\omega\}$ o $\{$archi uscenti da $\alpha\}$.

In particolare ogni arco e che non incide né con α né con ω non appartiene a nessuna sezione minima.

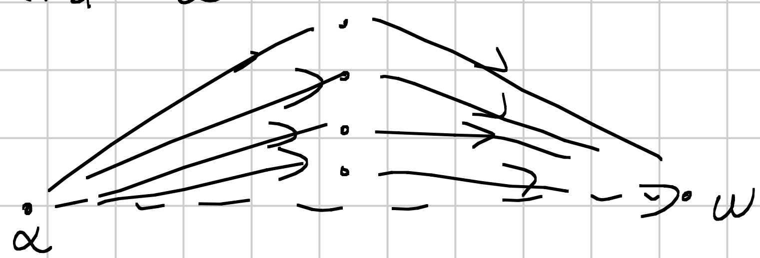


Prendiamo un arco e siffatto (disgiunto da α e ω) e riduciamo gradualmente il suo peso. A un certo punto dobbiamo smettere perché:

① Si è creata una sezione minima S che contiene e, il cui peso è lo stesso della sezione minima originale. Uso S nell'argomento di prima, trovo un flusso di portata $p(S)$ = sez. minima della rete originale, e quando riaumento $p(e)$ al valore iniziale il flusso appena trovato continua a essere buono.

② $p(e)$ raggiunge 0. Allora posso eliminare e, e ho un arco in meno $\rightsquigarrow$ per induzione.

Manca il caso in cui tutti gli archi entrano in ω o escono da α



Ma questo caso è facile!

ORDINE PARZIALE Sia S un insieme. Un ord. parziale è una scelta di alcune coppie ordinate di elementi di S, della forma (x,y), con alcune proprietà. Notazione: $x \preceq y$ se $(x,y) \in I \subseteq S \times S$

- $x \preceq x \quad \forall x \in S$;
- $x \preceq y$ e $y \preceq x$ allora $x = y$;
- $x \preceq y$ e $y \preceq z$, allora $x \preceq z$

- ordine totale se $\forall x \neq y \in S$ $x \preceq y$ o $y \preceq x$

Esempio Un insieme di persone (genericamente) sarà totalmente ordinato per altezza. Idem per l'età.
Se diciamo che a è più grande di b quando a è sia più alto che più vecchio, non è detto che ogni coppia di persone sia confrontabile.

Esempio $\mathbb{N}_0$ è parzialmente ordinato per divisibilità

$m \preccurlyeq n$ se $m \mid n$, ossia per ogni primo p

$$v_p(m) \leq v_p(n)$$

MINIMALE $x \in S$ per cui non esiste $y \leq x$ $y \neq x$

MASSIMALE analoga def.

CATENA $C \subseteq S$ catena se C è totalmente ordinato

ANTICATENA $A \subseteq S$ anticatena se ogni $x \neq y \in A$ sono inconfrontabili

Esempio J insieme (finito) $\mathcal{P}(J) = \{\text{sottoinsiemi di } J\}$
è un insieme parzialmente ordinato usando $\subseteq$

$A \preccurlyeq B$ se $A \subseteq B$ $\quad (A, B \subseteq J)$

Dilworth S poset finito

① Sia K la massima cardinalità di una catena. Allora è possibile partizionare S in K sottoinsiemi che sono anticatene

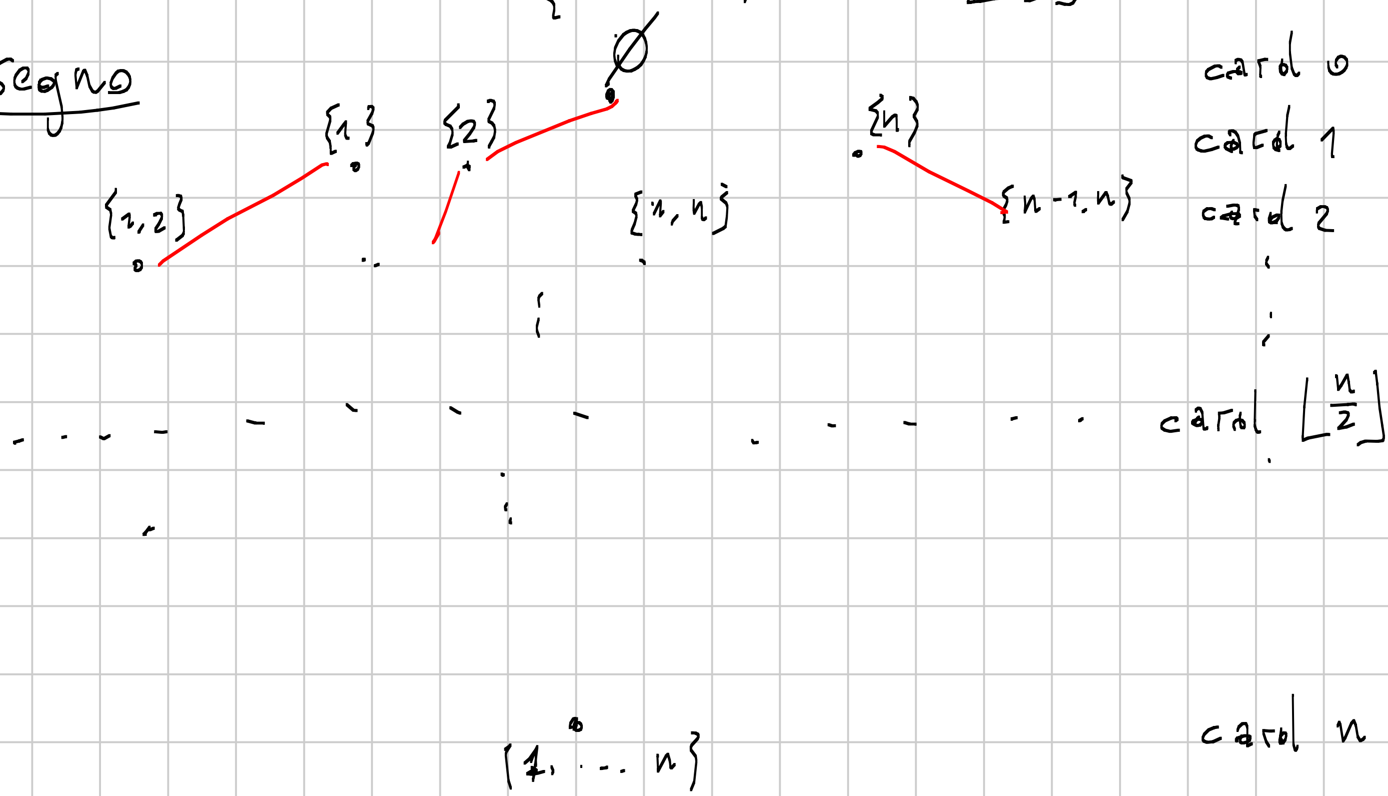
② Sia h la max card. di una anticatena. Allora S si può partizionare in h catene.

Esempio Determinare h nel caso di $S = \mathcal{P}(\{1, \dots n\})$

Congettura: h = binomiale centrale (il più grande $\binom{n}{\ell}$)
$$= \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$$

Una anticatena con $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ elementi è data dai sottoinsiemi di $\{1, \dots, n\}$ con $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ elementi.

Disegno



Per creare delle catene, cerco di associare a ogni sottoinsieme di i elementi ($i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$), un diverso sottoinsieme di $i+1$ elementi, e similmente per $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ un diverso sott. di $i-1$, in modo che l'insieme associato contenga/sia contenuto nel primo. ($i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$)

Lemma di Hall: posso farlo se $\forall$ famiglia $\mathcal{F}$ di sott. di i elementi, la famiglia $\Gamma(\mathcal{F})$ dei sott. di $i+1$ che includono almeno un sott. $\in \mathcal{F}$ soddisfa
$$|\Gamma(\mathcal{F})| \geq |\mathcal{F}|$$

Lemma Basta la seguente condizione per applicare Hall: Se B insieme dei ragazzi e G ragazze

$\forall b - g$ basta assumere

$\deg(b) \geq \deg(g)$

(e ogni b conosce qualche g)

Nel nostro caso ogni b (insieme di i elementi) conosce $(n-i)$ g (insiemi di $i+1$ elementi), mentre ogni g ne conosce $i+1$, e $n-i \geq i+1$

perché $n-1 \geq 2i$ sia se n è pari $\left(i < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)$ che se n è dispari $\left(i \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right)$

Esercizio ① È vero o no che ogni ordine parziale su un insieme finito si può ottenere combinando due ordini totali (come nel caso di età e altezze)?

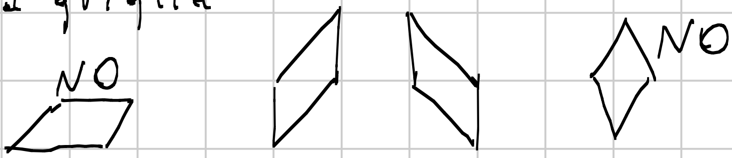
② $S = \{1, \dots, 2014\}$ vogliamo selezionare alcune permutazioni di S con la proprietà che $\forall a \neq b$ in S esiste almeno una permutazione σ con $\sigma(a) = \sigma(b) + 1$.
Quante permutazioni servono almeno?
IRAN TST '14

③ IRAN TST '15 σ permut. su $\{1, \dots n\}$ con la proprietà che $\forall\ i < j < k$

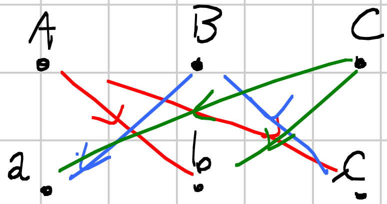
$$n \nmid [\sigma(i) + \sigma(k) - 2\sigma(j)]$$

Quando esiste una tale σ? Per quali n?

(4) IRAN TST '13 Tabella $n \times n$, vogliamo tassellarla con , senza sovrapposizioni. Quanta area rimane almeno scoperta? I tasselli si possono ruotare ma i vertici dei tasselli devono sovrapporsi a punti a coord. intere della griglia



(1) No! Controesempio:



Questo ordine parziale non viene da 2 ordini totali

[OSS Viene da 3 ordini totali: $\{0,1\}^3$ con gli ordini dati dalle coordinate, o (è la stessa cosa) i divisori di 30, togliendo max e min.

DIM Siano $\leq$ e $\leq$ i due ordini totali. Allora il max è uno dei massimali; tuttavia anche il 2° max è uno tra A, B, C, perché ognuno tra a, b, c è già battuto da 2 tra A, B, C nell'ordine parziale. Idem per max e 2° max

$\{\max, 2°\max\} \cap \{\max, 2°\max\}$ deve contenere un elemento, wlog A. Allora

$A \geq a \quad A \geq a \rightsquigarrow A \geq a$ assurdo

X CASA ① Ogni ordine parziale su un insieme finito si ottiene combinando alcuni (tanti) ordini totali (ad esempio, TUTTE le sue estensioni).

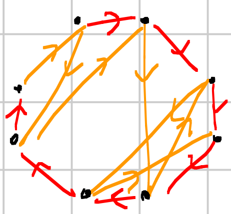
② Determinare se esiste $K \geq 3$ t.c. ogni ordine parziale su n elementi, $\forall n$, si ottiene combinando $\leq K$ ordini totali.

---

② Selezionare alcuni ordini totali su $\{1, \dots 2014\}$ in modo che ogni $i \neq j$ siano consecutivi (con i che precede j) in almeno un ordine. Quanti ne servono?

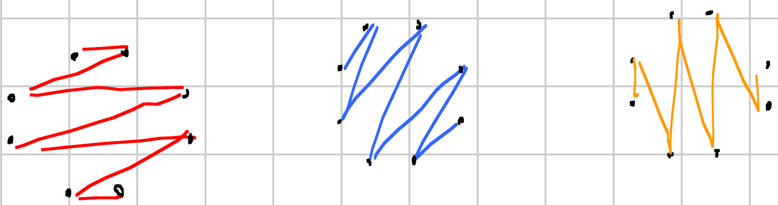
≥ 2014 | Ogni ordine dà 2013 coppie di consecutivi; a me ne servono $2014 \cdot 2013 \rightsquigarrow$ almeno 2014 ordini servono.

Esempio



Idea: posso provare a usare sia un ordine che l'opposto.

Il problema diventa: partizionare K_{2014} in 1007 serpenti lunghi 2014.



e l'ultimo ...

$n \geqslant 3$

3) <u>OSS</u> $\sigma(1) - 2\sigma(2) + \sigma(k) \not\equiv 0 \pmod n$

$\forall k \geqslant 3$ ma allora $\sigma(1) - 2\sigma(2) \equiv \begin{cases} -\sigma(1) \\ -\sigma(2) \end{cases} \mod n$

però $-\sigma(2)$ non va perché avrei $\sigma(1) \equiv \sigma(2) \mod n$

$\rightsquigarrow 2\sigma(1) \equiv 2\sigma(2) \mod n$

Allora n deve essere pari.

<u>Idea</u> considero la successione dei numeri pari nella lista $\sigma(1), \sigma(2), \dots \sigma(n)$

Ottengo una lista lunga $\frac{n}{2}$. Prendo i primi due pari in questa lista, $2a$, $2b$,

$2a - 4b + \sigma(k) \not\equiv 0 \pmod n$ $\forall k >$ l'indice per cui $\sigma = 2b$

E anche questi k sono tanti (per lo meno tutti quelli per cui $\sigma(k)$ è pari). Come prima troviamo $4a \equiv 4b \pmod n$.

<u>Formalmente</u> Definisco τ su $\{1, \dots \frac{n}{2}\}$

$\tau(i) = \frac{1}{2}$ (l'i-esimo pari nella lista $\sigma(1) \dots \sigma(n)$)

Allora τ (verificatelo!) è una buona permutazione per $\frac{n}{2}$.

Esempio Come mai le potenze di 2 vanno bene?

Cerchiamo una costruzione induttiva: supponiamo di avere una τ buona per $\frac{n}{2} = 2^{\ell-1}$. Vogliamo usare τ per costruire σ e vogliamo anche mettere prima i pari e poi i dispari,

$$2\tau(1), 2\tau(2), \dots, 2\tau\left(\frac{n}{2}\right), 2\tau(1)+1, \dots, 2\tau\left(\frac{n}{2}\right)+1$$

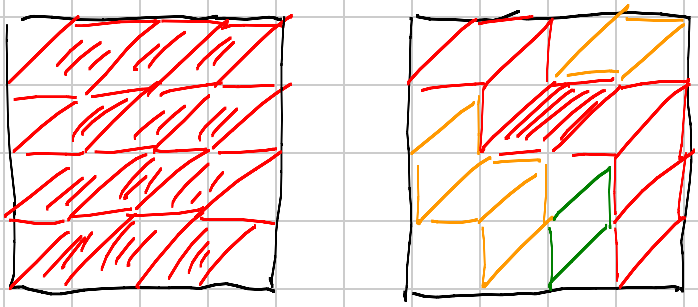
(Verificare che funziona!)

Controllare cosa succede in base 2

---

4) Rimane almeno un'area n scoperta

Esempio



X CASA FINIRE