G1 ADVANCED LucaMac

Titolo nota 04/09/2017

1) EGMO 2017.6

ABC triangolo $a\neq b\neq c\neq a$. Le riflessioni del baricentro G e del circocentro O rispetto ai lati sono $G_1, G_2, G_3, O_1, O_2, O_3$. Tes. è G_1G_2C e cyc, O_1O_2C e cyc concorrono con ABC.

Dim:

$$XY \perp ZW \iff \frac{x-y}{\bar x-\bar y} = -\frac{z-w}{\bar z-\bar w}$$

$$XYZW \text{ ciclico} \iff \frac{\frac{x-y}{\bar x-\bar y}}{\frac{x-z}{\bar x-\bar z}} = \frac{\frac{w-y}{\bar w-\bar y}}{\frac{w-z}{\bar w-\bar z}}$$

P e costruiamo P_1, P_2, P_3.

Complessi con $a\bar a=1$ $b\bar b=1$ $c\bar c=1$ $o=0$ $g=\frac{a+b+c}{3}$.

X : $X\in BC$ $PX\perp BC$

$$\frac{x-b}{\bar x-\bar b} = \frac{b-c}{\bar b-\bar c} = -bc \qquad x = b+c-bc\bar x$$

$$\frac{p-x}{\bar p-\bar x} = -\frac{b-c}{\bar b-\bar c} = bc \qquad p-x = bc\bar p - bc\bar x$$

$$p_1 = 2x-p = b+c-bc\bar p$$

CP_1P_2 $\qquad p_2 = a+c-ac\bar p$

$$\frac{\frac{z-p_1}{\bar z-\bar p_1}}{\frac{c-p_1}{\bar c-\bar p_1}} = \_\_\_$$

$$c-p_1 = bc\bar p - b$$

$$\bar c-\bar p_1 = \frac{p-c}{bc}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\frac{z-p_1}{\bar z-\bar p_1}}{b^2\cancel{c}\,\frac{c\bar p-1}{p-c}} = \_\_\_$$

$$\left(\frac{z-p_1}{\bar z-\bar p_1}\right)a^2 = b^2\,\frac{z-p_2}{\bar z-\bar p_2}$$

$$a^2(z-p_1)(\bar z-\bar p_2) = \lfloor sym \rfloor$$

$$a^2(z-b-c+\bar p bc)\left(\bar z-\frac{a+c-p}{ac}\right) = \lfloor sym \rfloor$$

Questo intersecato con $z\bar z=1$. Si ha un'equazione di II grado in z, ma c è soluzione, quindi calcolo facilmente l'altra, che è $t = \dfrac{ab+ac+bc-abc\bar p}{a+b+c-p}$

Quindi è ovvio che CP_1P_2 e cyc concorrono con ABC perché t è simmetrico in A, B, C.

Quindi la tesi equivale a $\left(o=0 \quad g=\frac{a+b+c}{3}\right)$

$$\frac{\sum_{cyc} ab}{\sum_{cyc} a} = \frac{\sum_{cyc} ab - \frac{1}{3}\sum_{cyc} ab}{\sum_{cyc} a - \frac{1}{3}\sum_{cyc} a}$$ e questo è ovvio.

2) IMO SL 2015 G5

ABC triangolo con $AC\neq BC$. D, F, G pt medi di AB, AC, BC. Γ è un cerchio che passa per C e tange AB in D. Γ incontra AF in H e BG in I. H' e I' sono i simmetrici di H ed I rispetto ad F e G, rispettivamente. $H'I'$ incontra CD in Q ed FG in M. $CM\cap\Gamma=\{C,P\}$. Provare che $CQ=QP$.

cerchio Γ: $a^2yz+b^2xz+c^2xy=(x+y+z)(ux+vy+wz)$ u,v,w

Dim: riferimento ABC in baricentriche

$C\in\Gamma \Rightarrow w=0$

$D\in\Gamma \Rightarrow c^2=2(u+v)$
$D=(1,1,0)$

$|\Gamma\cap AB|=1 \Rightarrow c^2xy=(x+y)(ux+vy)$ ha $\Delta=0$

$$4uv=(u+v-c^2)^2$$

$$4uv=\frac{c^4}{4} \qquad u=v=\frac{c^2}{4}$$

$\Gamma \cap AC = \{C, H\}$ $\quad AC: y = 0$

$b^2 x z = (x+z)\frac{c^2}{4}x$

$H \neq C \Rightarrow x \neq 0 \quad 4b^2 z = (x+z)c^2$

$H = (4b^2-c^2, 0, c^2) \quad I = (0, 4a^2-c^2, c^2)$

$H' = (c^2, 0, 4b^2-c^2) \quad I' = (0, c^2, 4a^2-c^2)$

$$H'I': \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ c^2 & 0 & 4b^2-c^2 \\ 0 & c^2 & 4a^2-c^2 \end{pmatrix} = 0$$

$H'I': x(4b^2-c^2) + y(4a^2-c^2) - zc^2 = 0$

$CD: x = y$

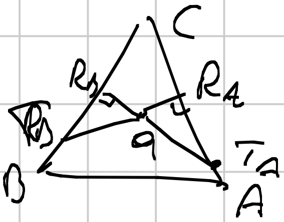
$Q = (c^2, c^2, 4a^2+4b^2-2c^2)$

$FG: z = x+y$

$M \in x(4b^2-c^2) + y(4a^2-c^2) - (x+y)c^2 = 0$

$C, M \in x(2b^2-c^2) + y(2a^2-c^2) = 0$

Tesi $\Leftrightarrow$ la circonferenza di centro Q che passa per C (ω) passa per P, ovvero che l'asse radicale tra ω e Γ è $CP \equiv CM: x(2b^2-c^2) + y(2a^2-c^2) = 0$



$\omega = \odot(C T_A T_B)$

$QR_B // AH$

$H_{A\infty} = (-a^2, S_C, S_B)$

$$QR_B: \det\begin{pmatrix} x & y & z \\ -a^2 & S_C & S_B \\ c^2 & c^2 & 2(2a^2+2b^2-c^2) \end{pmatrix} = 0$$

$BC: x = 0$

$R_B \in y(c^2 S_B + 2a^2(2a^2+2b^2-c^2)) = c^2 z(a^2+S_C)$

$R_B = (0, c^2(a^2+S_C), c^2 S_B + 2a^2(2a^2+2b^2-c^2))$ $\quad \Sigma R_B = 4a^2(a^2+b^2)$

$T_B = 2R_B - C$

$T_B = (0, c^2(a^2+S_C), c^2 S_B + 4a^2 S_C)$

ω: $\sum_{cyc} a^2yz = (\sum_{cyc} x)(ux+vy)$ $\quad u, v$

$\cancel{a^2}(\cancel{c^2(a^2+S_C)})(c^2S_B+4a^2S_C) = 2\cancel{a^2}(a^2+b^2)v\,\cancel{c^2(a^2+S_C)}$

$$v = \frac{c^2S_B+4a^2S_C}{2(a^2+b^2)} \qquad u = \frac{c^2S_A+4b^2S_C}{2(a^2+b^2)}$$

<u>Fatto</u>: $\Gamma_1: \sum_{cyc} a^2yz = (\sum_{cyc} x)(\sum_{cyc} u_1 x)$ $\quad \Gamma_2: \sum_{cyc} a^2yz = (\sum_{cyc} x)(\sum_{cyc} u_2 x)$

l'asse radicale è $\sum_{cyc}(u_1-u_2)x = 0$

Quindi l'asse radicale tra ω e Γ è

$$y\,\frac{(c^2S_B+\cancel{8}a^2S_C - c^2(a^2+b^2))}{\cancel{4}(a^2+b^2)} + \cancel{x}(\qquad\qquad) = 0$$

$c^2(a^2+c^2-b^2)+4a^2(a^2+b^2-c^2) - c^2(a^2+b^2) =$

$= -\cancel{5}a^2c^2 + c^4 - \cancel{2}b^2c^2 + 4a^4 + 4a^2b^2 = (2a^2-c^2)(2a^2+2b^2-c^2)$

$\Rightarrow$ Tesi.

3) EGMO 2015.6

ABC acutangolo e $b \neq c$. G baricentro e Γ circoscritta. $AG \cap \Gamma = \{A, P\}$. H ortocentro. P' simmetrico di P risp. a BC. $GP' = GH \iff \hat{A} = 60°$

<u>Dim</u>: $P = (-a^2, b^2+c^2, b^2+c^2)$ $\quad x = S_A$ e cyc

$X = (0, b^2+c^2-z, b^2+c^2-y)$

Si verifica che $X \in BC$ e $PX \perp BC$.

Quindi X è il pt medio di PP'

$P' = (y+z, 2x+y-z, 2x+z-y)$

$H = (yz, xz, xy)$

M pt medio di $P'H$

$M = (6xyz+2y^2z+2yz^2+xy^2+xz^2, (\sum_{cyc} xy)(2x+y-z)+xz(4x+y+z),$
$(\sum xy)(2x+z-y)+xy(4x+y+z))$

$BCHP'$ ciclico di centro O', simmetrico di O risp. a BC

$O' = (-xy-xz, 2xz+xy+yz, 2xy+xz+yz)$

$\alpha = \sum xy$

Tesi $\iff M, G, O'$ allineati

$\iff$

$$0 = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -xy-xz & \alpha+xz & \alpha+xy \\ \beta & \alpha(2x+z-y)+xy(4x+y+z) & \underline{\qquad} \end{pmatrix}$$

$$\beta(x)(y-z) + \left(\alpha(2x+z-y)+xy(4x+y+z)\right)\left(-2xy-xz-\alpha\right) - \left(\alpha(2x+y-z)+xz(4x+y+z)\right)\left(-2xz-xy-\alpha\right) \overset{?}{=} 0$$

$$\beta x(y-z) + \left(\alpha(2x+z-y)+xy(4x+y+z)\right)\left(yz-xy-2\alpha\right) - \text{sym} \overset{?}{=} 0$$

$$\alpha\left[4\alpha(z-y)+2x(4x+y+z)(y-z)+(2x+z-y)z(x-y)-(2x+y-z)y(x-z)\right] + \beta x(y-z) + xyz(4x+y+z)(z-y) \overset{?}{=} 0$$

$$\alpha(y-z)\left[x(y+z)-4\alpha+2x(4x+y+z)-2x^2-xy-xz+2yz\right] \overset{?}{=} 0$$

perché $\beta x - xyz(4x+y+z) = x\alpha(y+z)$

$$2\alpha(y-z)\left[3x^2-xy-xz-yz\right] \overset{?}{=} 0$$

$y \neq z \iff b \neq c$

$\alpha > 0$

$3x^2 = xy+xz+yz \overset{?}{\iff} \hat{A} = 60°$

$(2x)^2 = (x+y)(x+z) \overset{?}{\iff} \hat{A} = 60°$

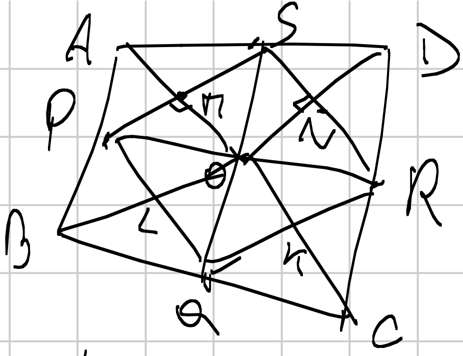
$\underbrace{(b^2+c^2-a^2)}_{>0}{}^2 = b^2c^2 \overset{?}{\iff} \hat{A} = 60°$

$b^2+c^2-a^2 = bc \overset{!}{\iff} \hat{A} = 60°$ CARNOT

4) RMM 2017.6

ABCD quadrilatero convesso. P, Q, R, S punti su AB, BC, CD, AD rispettivamente. PR e QS dividono ABCD in 4 quadrilateri con diagonali perpendicolari. Dim che $PQRS$ ciclico.

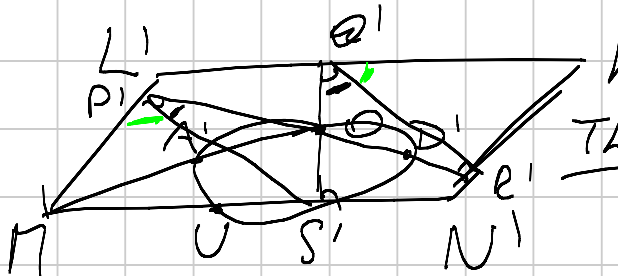
<u>Dim:</u>



SMON ciclico di diametro OS

$\odot(SMON)$ tange $\odot(KQLO)$

Invertiamo in O



Th: $OS' \cdot OQ' = OP' \cdot OR'$

$M'P'S' \sim K'Q'R'$

$$\frac{M'P'}{M'S'} \overset{!}{=} \frac{K'Q'}{K'R'}$$

$$x(l_1+l_2\cos\theta - x) = y(l_2+l_1\cos\theta - y)$$

Sappiamo $A'OD'S'$ ciclico

$M'N' = l_1 \quad N'K' = l_2 \quad \hat{M'} = \theta$

$x = M'S' \quad y = M'P'$

$l_1 + l_2\cos\theta - x = K'Q'$

$l_2 + l_1\cos\theta - y = K'R'$

Pot M: $M'U \cdot M'S' = M'A' \cdot M'O = \alpha$ analoghi β, γ, δ

$M'U = \alpha / x$

Pot N: $\delta = (l_1 - x)\left(l_1 - \frac{\alpha}{x}\right)$

$$\delta = (y - l_1\cos\theta)\left(l_2 - \frac{\gamma}{l_2 + l_1\cos\theta - y}\right)$$

$$(l_1 - x)\left(l_1 - \frac{\alpha}{x}\right) = (y - l_1\cos\theta)\left(l_2 - \frac{\gamma}{l_2 + l_1\cos\theta - y}\right)$$

e la sym

$$(l_1 - x)(l_2 + l_1\cos\theta - y)(xl_1 - \alpha) = x(y - l_1\cos\theta)\left(l_2(l_2 + l_1\cos\theta - y) - \gamma\right)$$

$$(l_2 - y)(l_1 + l_2\cos\theta - x)(yl_2 - \alpha) = y(x - l_2\cos\theta)\left(l_1(l_1 + l_2\cos\theta - x) - \gamma\right)$$

$$y(x - l_2\cos\theta)(l_2 + l_1\cos\theta - y)\left[(l_1 - x)(xl_1 - \alpha) - x(y - l_1\cos\theta)l_2\right] \underset{\text{sym}}{=}$$

coeff α: $-y(x - l_2\cos\theta)(l_2 + l_1\cos\theta - y)(l_1 - x) - \text{sym}$

$-x^2y^2 + x^2y(l_2 + l_1\cos\theta) + xy^2(l_1 + l_2\cos\theta) - y^2 l_1 l_2\cos\theta$

$$\underline{-xy(l_2+l_1\cos\theta)(l_1+l_2\cos\theta)} + y l_1 l_2 \cos\theta (l_2+l_1\cos\theta)$$

$$l_1 l_2 \cos\theta \left[y(l_2+l_1\cos\theta - y) - x(l_1+l_2\cos\theta - x)\right]$$

termine noto: $xy(x-l_2\cos\theta)(l_2+l_1\cos\theta-y)(l_1(l_1-x)-l_2(y-l_1\cos\theta))$ $-\text{sym}$

$$xy\cdot\begin{cases} x^2y[l_1] + xy^2 l_2 - x^2 l_1(l_2+l_1\cos\theta) \\ +xy(-l_1^2-2l_1l_2\cos\theta - l_2^2) \quad -y^2 l_2^2\cos\theta \end{cases}$$

$$l_1 x(l_2+l_1\cos\theta)(l_1+l_2\cos\theta) + x l_1 l_2 \cos\theta(l_2+l_1\cos\theta)$$

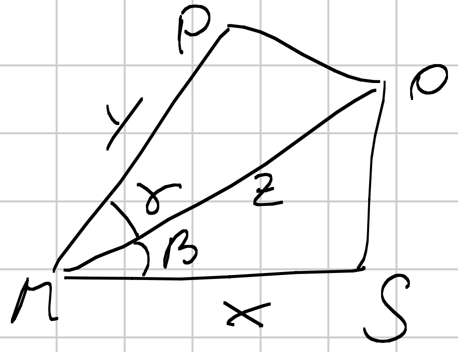
$$y l_2\cos\theta\, l_1 (l_1+l_2\cos\theta) + y l_2^2\cos\theta(l_2+l_1\cos\theta)$$

$$-l_1 l_2\cos\theta(l_2+l_1\cos\theta)(l_1+l_2\cos\theta)$$

$$xy[l_1 l_2]\big[\underbrace{x(l_1+l_2\cos\theta - x) - y(l_2+l_1\cos\theta - y)}_{R}\big]$$

$$R(xy\,l_1l_2 - \alpha\, l_1 l_2\cos\theta) = 0$$

se $R=0$ fine!



$\alpha \le z^2$

$$\alpha\cos\theta = xy$$

$$xy \le z^2\cos\theta \qquad \frac{x}{z} = \cos\beta \qquad \frac{y}{z} = \cos\gamma$$

$$\cos\beta\cos\gamma \le \cos\beta\cos\gamma - \sin\beta\sin\gamma$$

$$\sin\beta\sin\gamma \le 0 \quad \text{ASSURDO!}$$

Quindi tesi.