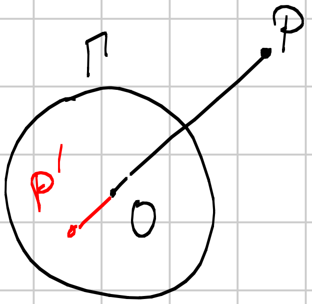
G2 - Advanced

Titolo nota 05/09/2017

Inversione "negativa"

$OP \cdot OP' = R^2$ (inversione solita)



$OP \cdot OP' = -R^2$

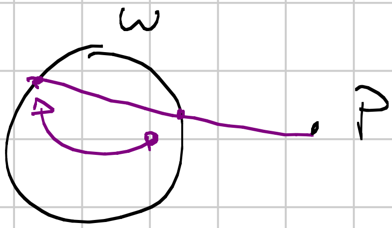
||

inversione solita di raggio R e centro O

+

simmetria di centro O

es:



P esterno ad ω

⇒ ∃! inversione di centro P che fissa ω

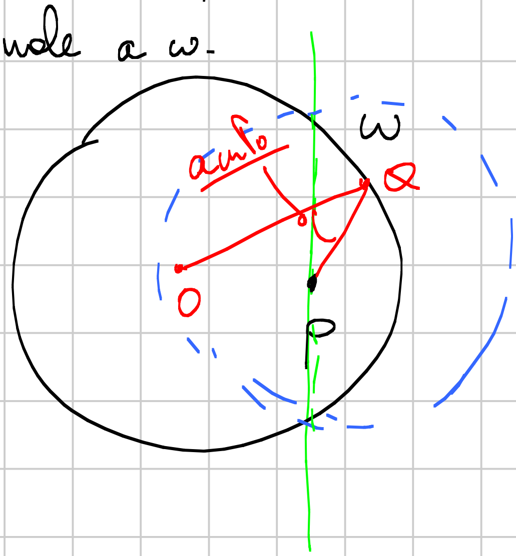
↳ (come insieme e non i singoli punti)

inversione di centro P e raggio $\sqrt{pow_\omega(P)}$

⇕

inversione in Γ, cfr. di centro P ortogonale a ω.

es:

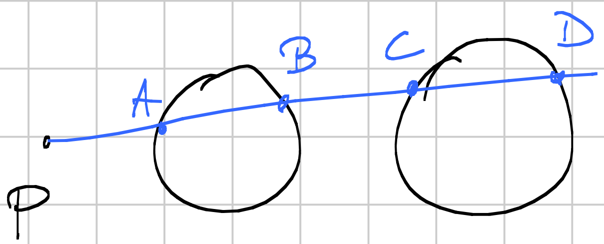


Posso fare lo stesso?

Sì, con un'inversione di parametro $pow_\omega(P)$

⇒ inversione negativa

es:



$A \to D$
$B \to C$
$\Downarrow$
$PA \cdot PD = PB \cdot PC$

$\frac{PA}{PB} = \frac{PC}{PD} \iff$ P centro di similitudine esterno

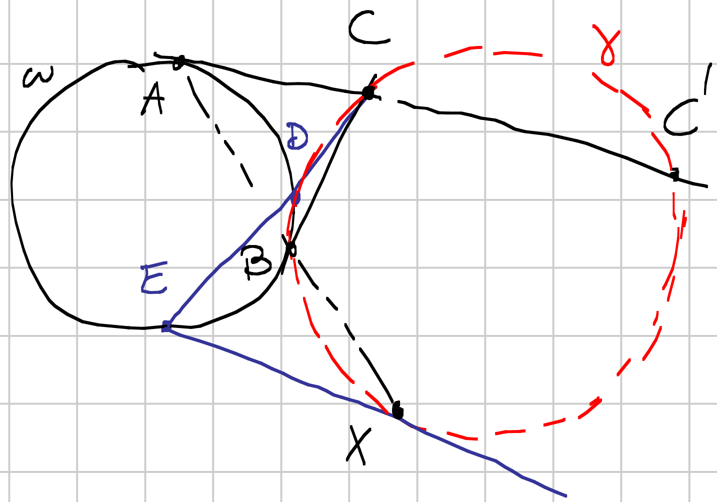
P = centro di simil. est. $\Rightarrow$ inv. pos.
P = centro di simil. int $\Rightarrow$ inv. neg.
scambio le circonferenze

Oss: Centri di simil tra circoscritta e Feuerbach

P_1, P_2 t.c. $\frac{OP_1}{P_1N} = 2 \qquad \frac{OP_2}{P_2N} = -2$

$\Rightarrow P_1 = G$
$\quad\; P_2 = H$

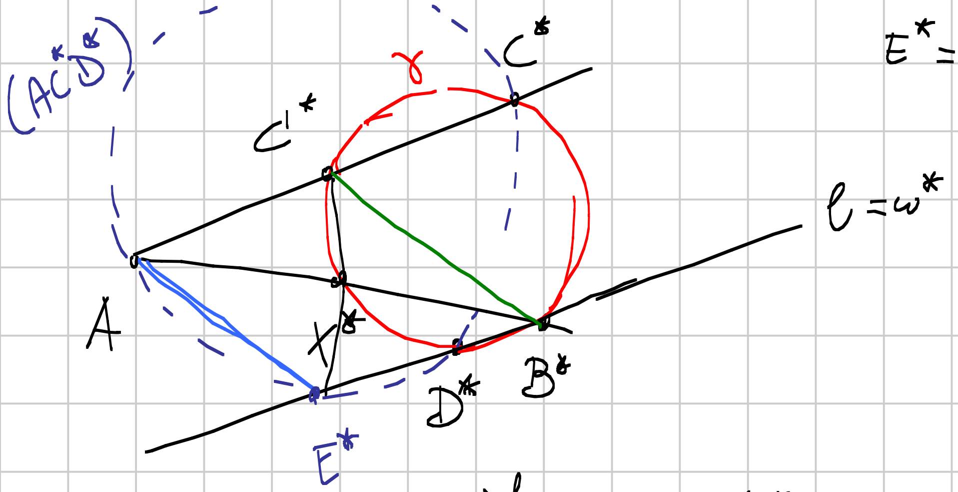
Esercizio (CELMO 2015 p3)



Th: EX tg. γ

Sol "inversiva": inverto in A fissando γ ($\Rightarrow AP \cdot AP' = pow_\gamma(A)$)

$\gamma \to \gamma \qquad C \to C'$
$B \to X \qquad \omega \to \ell \parallel AC$ che passa per $X = B^*$



E^* = la seconda intersezione di (C^*D^*A) con ℓ

$\Downarrow$

$AC^*D^*E^*$ è un trapezio isoscele

Th $\iff$ (AX^*E^*) tg γ

Anche $B^*D^*C'^*C^*$ è un trapezio isoscele

$\Rightarrow$ D^*C^* è simmetrico di C'^*B^* risp. all'asse di C'^*C^*

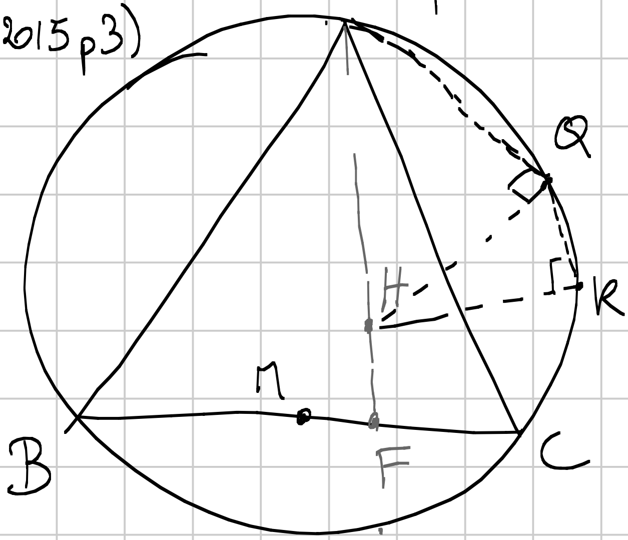
ma C^*D^* è simm di AB^* risp. all'asse di AE^*

$\Rightarrow$ $C'^*B^* \parallel AE^*$ $\Rightarrow$ X^* è il centro del parallelogramma

$\Rightarrow$ (AX^*E^*) tg. a $(C'^*B^*X^*) = \gamma$. ■

Es per voi (IMO 2017 p.4) uguale al precedente

Es: (IMO 2015 p3)



$AB > AC$

Q pt su Γ t.c. $H\hat{Q}A = \frac{\pi}{2}$

K pt su Γ t.c. $H\hat{K}Q = \frac{\pi}{2}$

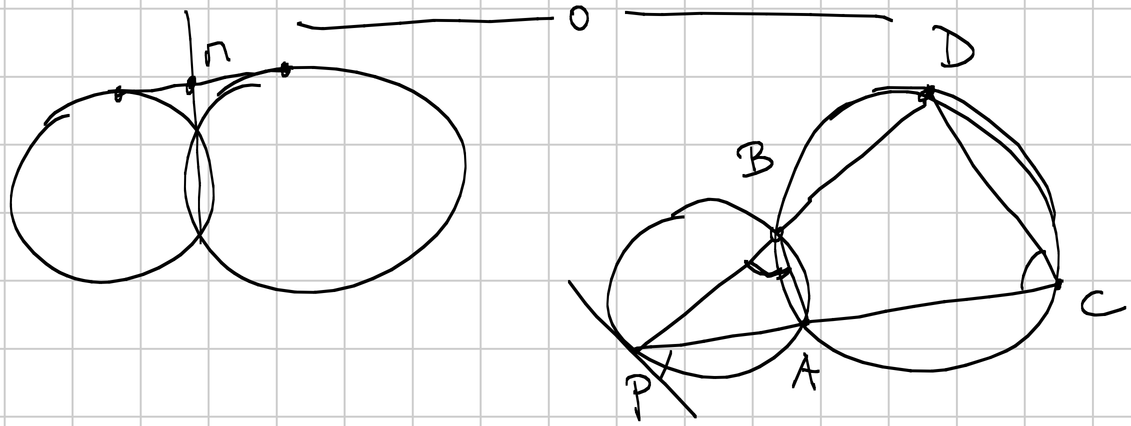
dim che (KQH) e (FKM) sono tangenti.

Strada I : inversione di centro H che fissa Γ

Strada II : inversione di centro H che scambia Γ e la Feuerbach

Oss: il simm. di H rispetto a M, sia E, è il diam. opp. di A in Γ

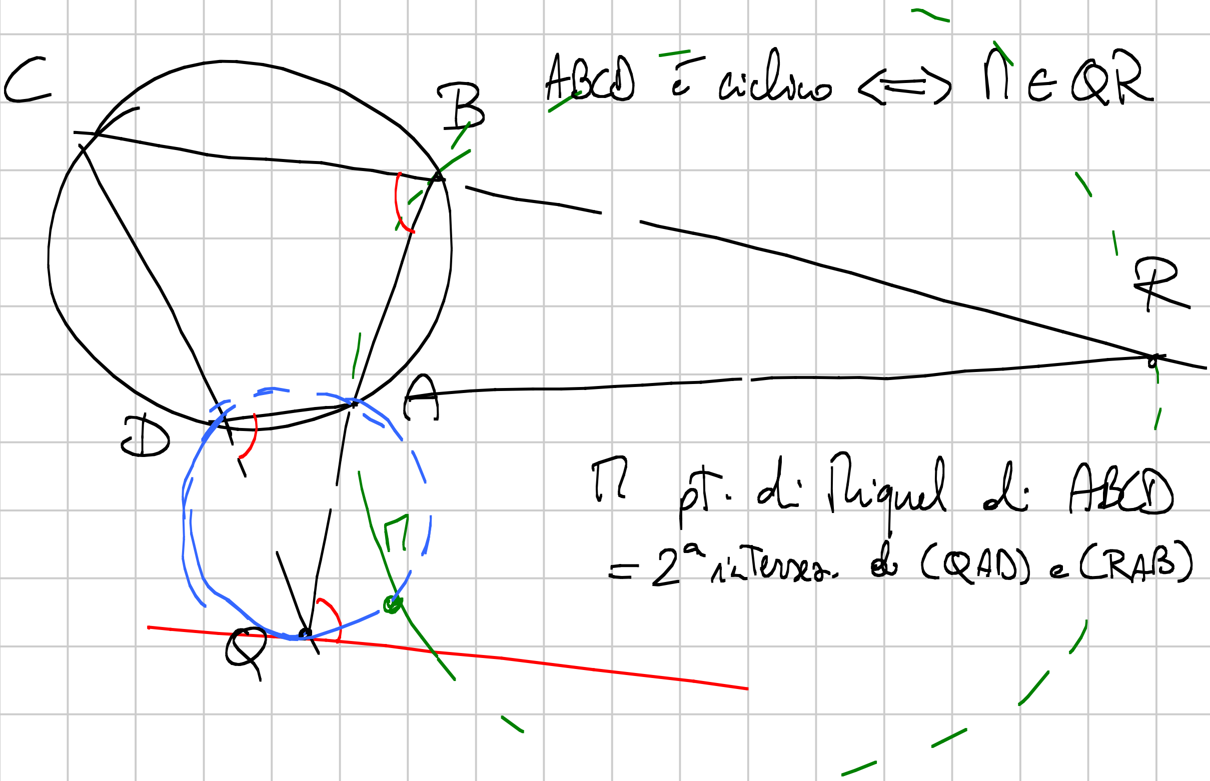
$\Rightarrow$ M, H, E, Q allineati.



$\boxed{\text{P, B, D allineati} \iff \text{tg in P} \parallel \text{DC}}$

Teo di REIM(S)

Pt. di Miquel di un quadrilatero ciclico



ABCD è ciclico $\iff$ $M \in QR$

M pt. di Miquel di ABCD $= 2^a$ intersez. di (QAD) e (RAB)

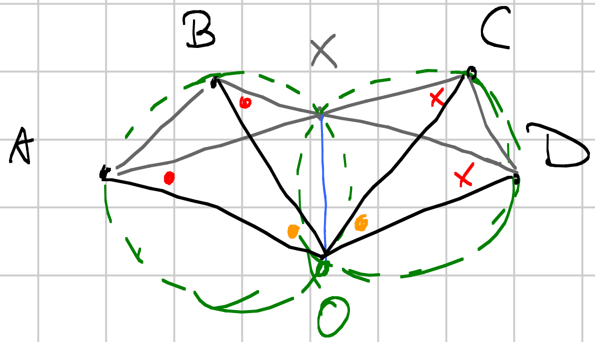
Q, M, R allineati $\iff$ t_g in Q // BR $\iff$ $ABCD$ ciclico

Spiral similarity

$z \to \alpha(z - z_0) + z_0$

Lemma base: $ABCD$ non un parallelogramma

$\Rightarrow \exists!$ sp. sim. che manda $A \to B$, $C \to D$



dim: la SS cercata è di centro O e manda $A \to B$

funziona perché

$\triangle AOB \sim \triangle COD$

$(\triangle AOC \sim \triangle BOD)$ (*)

Se esistono f_1 e f_2 SS che mandano A in B e C in D

$g = (f_2^{-1} \circ f_1)$

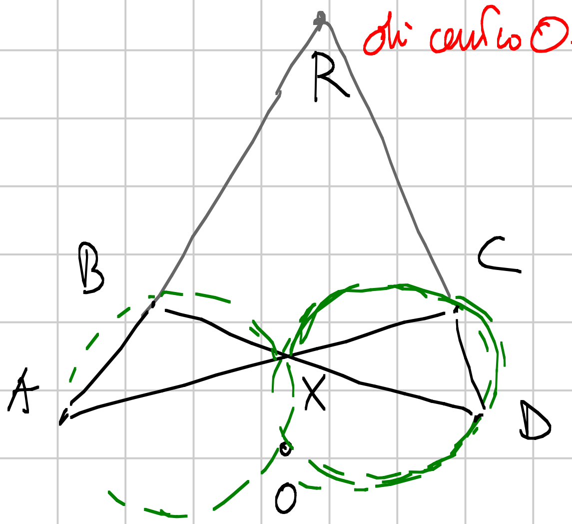
$g(A) = A \quad g(C) = C$

$g(B) = B \quad g(D) = D \quad g(O) = O$

$\Rightarrow g = \text{identità} \Rightarrow f_1 = f_2$

Oss: (*) $\Rightarrow$ se esiste una SS che manda $A \to B$ e $C \to D$ di centro O

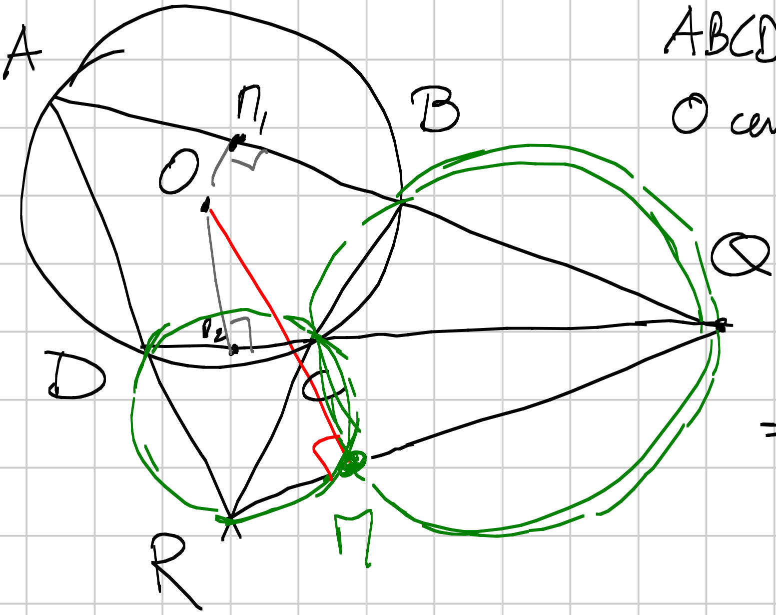
allora esiste una SS che manda $A \to C$, $B \to D$ di centro O.



O = pt di Miquel di $RBXC$

Esercizio:

Hint: Considerare M_1, M_2 punti medi di AB e CD



$ABCD$ inscritto in Γ

O centro di Γ

R, Q intersez. dei lati opposti

M pt. di Miquel

$\Longrightarrow OM \perp QR$

dim: SS di centro M che manda AB in CD, manda M_1 in M_2

$\Longrightarrow$ M centro di SS che manda A in D e M_1 in M_2

$\Longrightarrow$ $AM_1 \cap DM_2 = Q$, M, M_1, M_2 sono conciclici

O, M_1, M_2, Q sono conciclici

$\Longrightarrow$ O, M, M_1, M_2, Q conciclici, OQ diametro $\Longrightarrow$ $\widehat{OMQ} = \frac{\pi}{2}$. ■

dim con le potenze: $\rho = OA$

$$QO^2 - \rho^2 = QA \cdot QB = QM \cdot QR = QM \cdot MR + QM^2$$

$$RO^2 - \rho^2 = RA \cdot RD = RM \cdot RQ = QM \cdot RM + RM^2$$

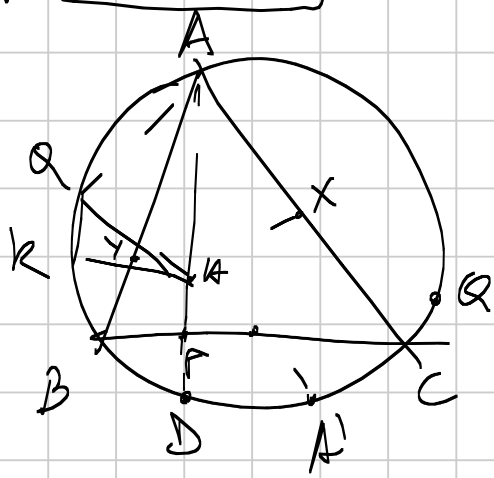
$$QO^2 - RO^2 = QM^2 - RM^2 \Longrightarrow OM \perp QR$$ ■

Oss: R centro radicale di $(ABCD)$, $(ADQM)$, $(BCQM)$

Oss: $ACMO$, $BDMO$ ciclici.

Oss: $P = AC \cap BD \Rightarrow \Pi$ è l'inverso di P in Γ

IMO 15 p3 - di nuovo



Q punto di Miquel di BCXY

$\Downarrow$

Q, H, Π allineati

Q' diam. opp a Q

$\Downarrow$

Q', H, K allineati

A' diam opp ad A

la tg a (KDH) in $H \parallel AQ' \parallel A'Q \ni H \Rightarrow A'Q$ la tg in H a (KDH)

$P \in BC$ t.c. $PH \perp A'Q$

Dico che PK tangente comune alle due cfr della tesi.

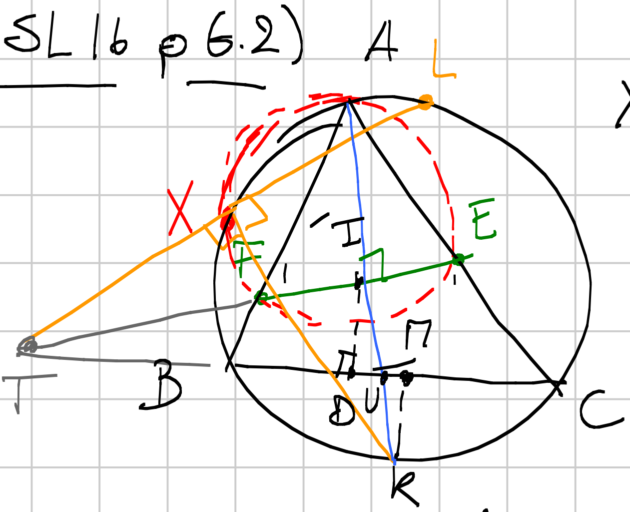
dbb

$PK^2 = PH^2 = PF \cdot P\Pi \Rightarrow PK$ tange $(KF\Pi)$

PH tange (KQH) ovvio

$PK = PH \Rightarrow PK$ tange (KQH)

Es (IMO SL 16 p 6.2)



$XD, A\Pi$ si intersecano su Γ

Oss: X centro SS

$E \to C$

$F \to B$.

$FI \to B\Pi$

$TX\Pi$ ciclico

TIΠK ciclico (angoli retti) con TK

$\Rightarrow$ $T\hat{X}K = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $TX \cap \Gamma = \{X, L\}$

L punto medio di $B\overset{\frown}{A}C$

(BIC) tg EF

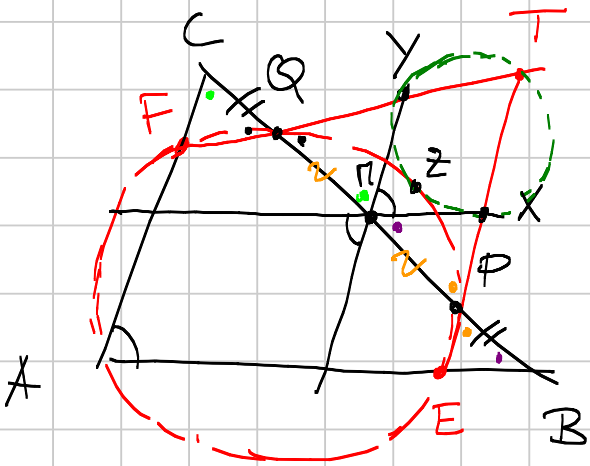
(DUI) ha centro in IU

$$TX \cdot TL = TB \cdot TC = TI^2 \overset{\checkmark}{=} TD \cdot TU$$

$Y = A\Pi \cap XD$ $\qquad$ voglio A, X, Y, L ciclico

$$L\hat{A}Y = L\hat{U}\Pi = L\hat{X}D = L\hat{X}Y \Rightarrow \text{fine}$$

Iran TST '17 - day 2 - p 5



$CQ = BP$

$\Pi Y \parallel AC$

$\Pi X \parallel AB$

Th: (TXY), (APQ) Tangenti.

Hint 1: "pt. di Miquel di ΠXY in TPQ sta su (APQ)" ($= Z$)

(angle chasing $Q\hat{Z}P = \ldots = \pi - Q\hat{A}P$)

se la tesi è vera, Z è il pt. di Tangenza $\Leftrightarrow$ $X\hat{Z}P = P\hat{Q}Z + Z\hat{T}X$

A caso

1) $\overset{\triangle}{\Pi XY} \simeq \overset{\triangle}{ABC}$

Backwards

1) Se T, Z, D (D t.c. ABCD trapezio isoscele) sono allineati, ho finito.

1) $\overset{\triangle}{\Pi XY} \simeq \overset{\triangle}{ABC}$

$$\left(\begin{array}{l} B\cancel{B}\cdot BQ = BE\cdot BA \\ CQ\cdot CP = CF\cdot CA \end{array}\right. \Rightarrow \frac{BE}{CF} = \frac{CA}{BA}$$

$\Downarrow$

ok similitudine

$$P\widehat{Z}X = P\widehat{\Pi}X = \widehat{B}$$

$$\left.\begin{array}{l} P\widehat{Q}Z = \Pi\widehat{Q}Z = \Pi\widehat{Y}Z \\ Z\widehat{T}X = Z\widehat{Y}X \end{array}\right. \Rightarrow P\widehat{Q}Z + Z\widehat{T}X = \Pi\widehat{Y}X = \widehat{B}.$$

fine.

1) (IMO 1985) Cfr di centro O passa per i vertici A e C del triangolo ABC e interseca i lati BA e BC in K, N risp. $(ABC) \cap (KBN) = \{B, M\}$. Dim che $O\hat{M}B = \frac{\pi}{2}$

2) (USA TST 2007) Il triangolo ABC è inscritto in ω. Le tangenti a B e C si incontrano in T. S sta su BC ed è tale che $AS \perp AT$. B_1, C_1 stanno su ST (C_1 tra B_1 e S) tali che $B_1T = BT = C_1T$.
Dim che ABC e AB_1C_1 sono simili

3) (IMO 2005) $ABCD$ convesso con $BC = AD$ ma non paralleli.
E, F punti sui segmenti BC, AD t.c. $BE = DF$.
$AC \cap BD = P$, $BD \cap EF = Q$, $EF \cap AC = R$.
Si considerino tutti i triangoli PQR al variare di E, F.
Dim che le cfr. circo di questi triangoli passano per uno stesso pt.