G3 - Advanced

Titolo nota 06/09/2017

IMO 2015 SL G8

Due triangolazioni di un poligono convesso con triangoli della stessa area differiscono al più per una coppia di triangoli.

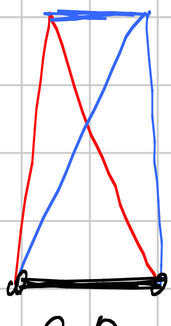
Sol: Idea: $\boxed{\text{parallelogramma}}$

parallela al lato

⇓

Trapezio

Claim: ogni triangolo contiene un lato del poligono

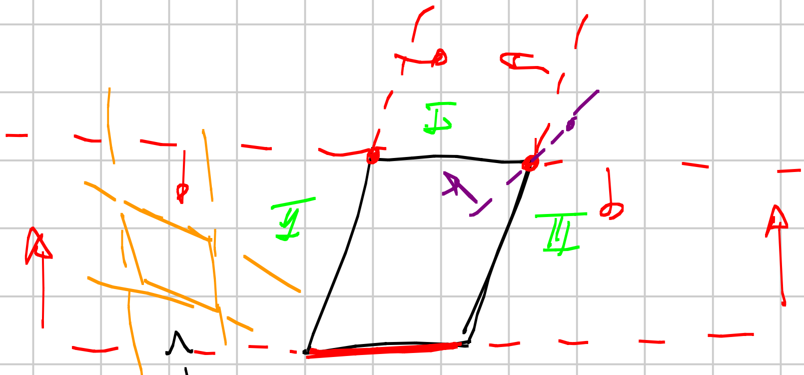


Se il compl. del tri. rosso (o di quello blu) sta pure nella triangolazione ⇒ OK Parallelogramma

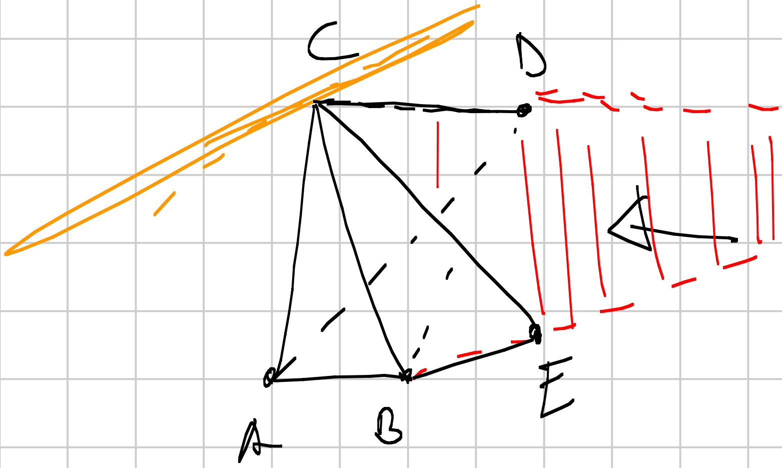
→ 1. Trapezio

2. cerco di ottenere un parallelogramma

→ 3. dimostro che non posso avere + di 1 parallelogramma



non va bene ⇒ non possono esserci due parallelogrammi.

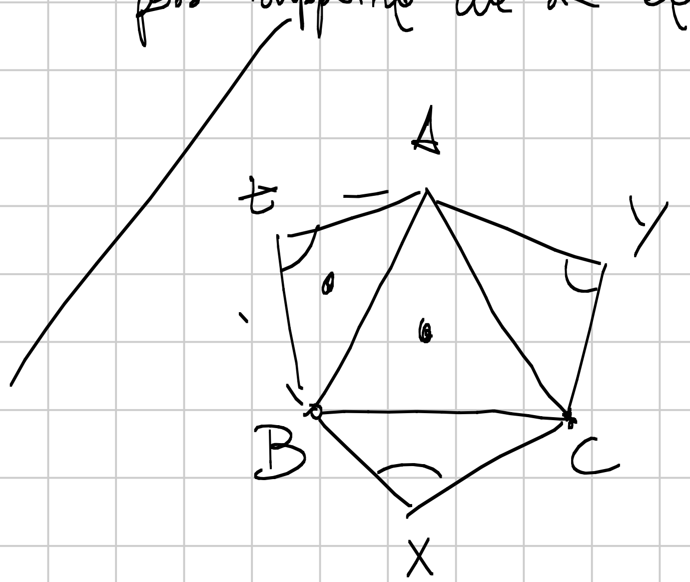


$[BEX] < [BEC]$

non va bene

Sol Claim! oss: il prob. è invariante per affinità

$\Rightarrow$ se ho un triangolo tutto di diagonali, posso supporre che sia equilatero.

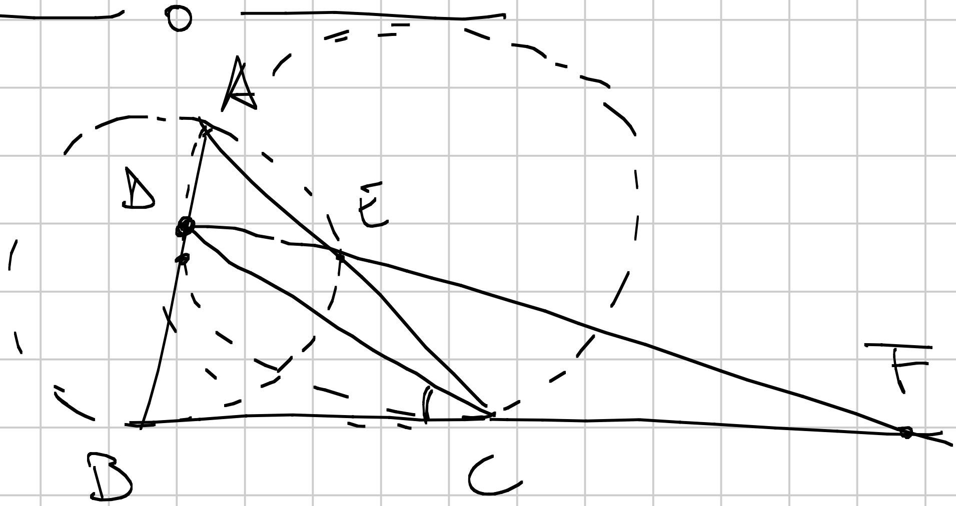


AYCXBZ convesso

$\hat{Z} > 60°$

$\Downarrow$ non tornano le aree.

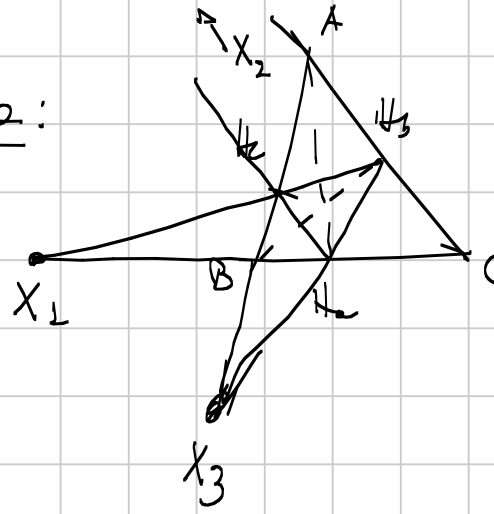
CHKMO '14



Th: ~~AH~~ Euler line

Sol baricentriche forte

Lemma:



$\Rightarrow X_1, X_2, X_3$ allineati

BCH_3H_2 ciclico

$\Downarrow$

$X_1B \cdot X_1C = X_1H_3 \cdot X_1H_2$

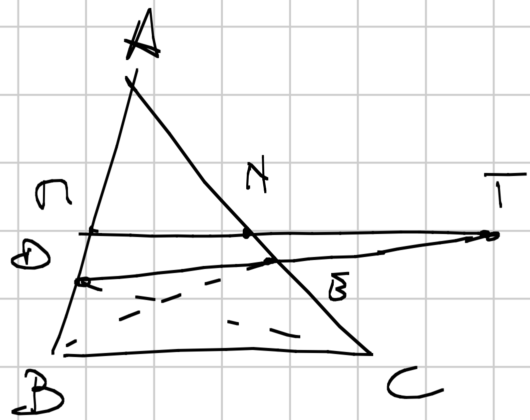
$\Rightarrow X_1 \in$ asse rad tra circoscritta e Feuerbach

asse rad $\perp$ congiungente dei centri $=$ Euler line

così X_2, X_3

$\Rightarrow$ mi basta dim che $AF \parallel X_2X_3$

Alternative:

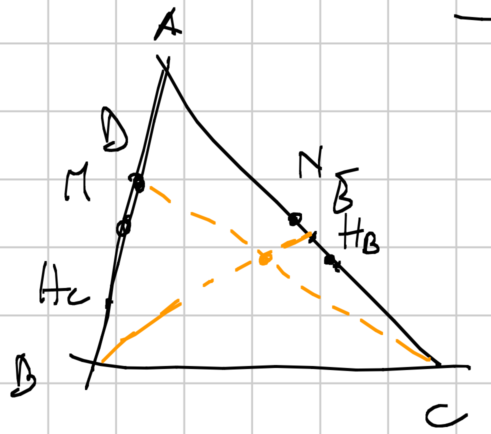


$\Rightarrow AT \perp$ retta di Eulero

1) DMNE ciclico
centro R = centro della cfr di Feuerbach.
$S \in AT$ pt. Miquel.

$RS \perp AT$

$\widehat{OSA} = 90^\circ$ e $\widehat{HSA} = 90^\circ \Rightarrow$ retta di Eulero $\perp AT$



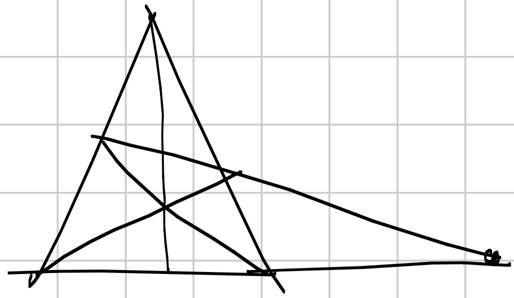
M, N punti medi $\quad H_B, H_c$ piedi altezze.
D, E punti del testo

$DC \cap BE = X \qquad H_BH_c \cap MN = T$

$NH_c \cap MH_B = Y$

Voglio A, F, T allineati

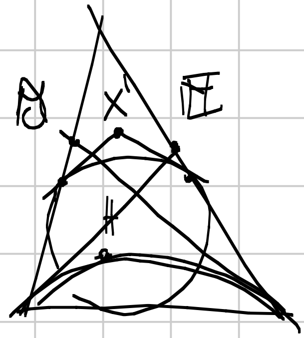
$(AB, AC; AX, AF) = -1$
$(AB, AC; AY, AT) = -1$



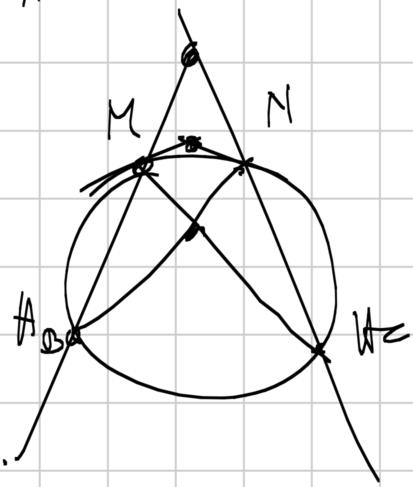
voglio A, X, Y allineati

BE, CD sono tangenti a (BHC)

$\Rightarrow$ definisco X' intersez. delle tg. in M, N alla Feuerbach



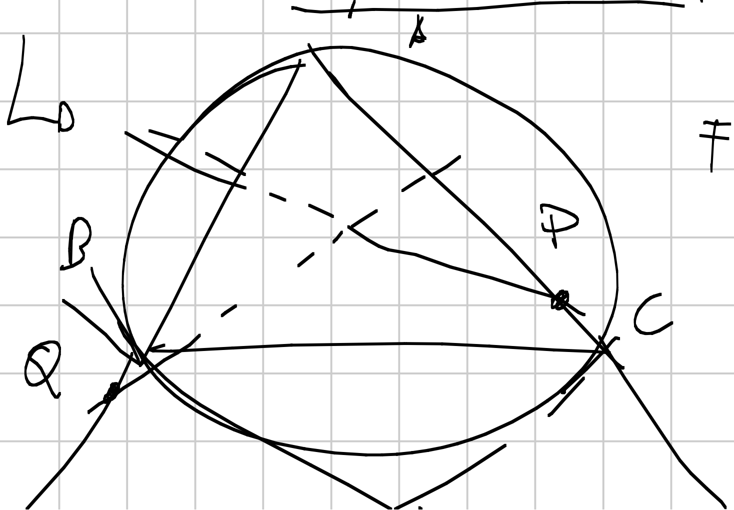
A, X', X allineati



$MNH_C MMH_B$ Pascal $\Rightarrow A, Y, X'$ allineati.

Th $\Leftrightarrow$ AF è l'asse radicale tra le cfr di diam. AH e AO.

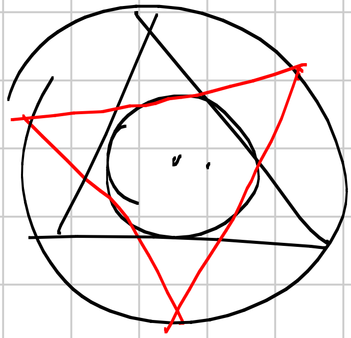
inv + simm. in A + omot. di centro A fattore $\frac{1}{2}$



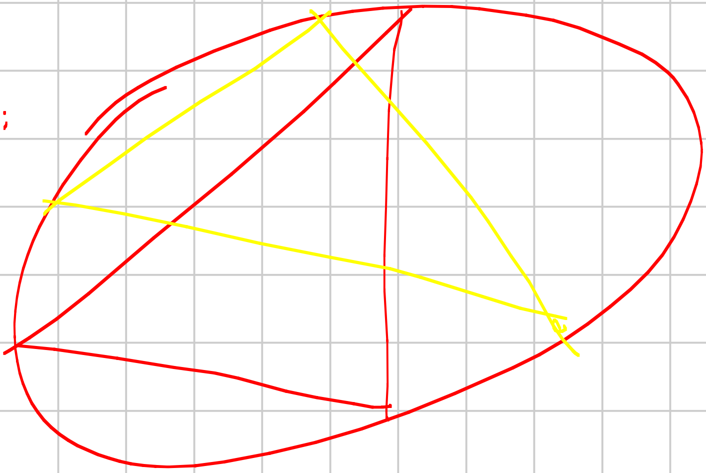
$F = (ADE) \cap (ABC)$

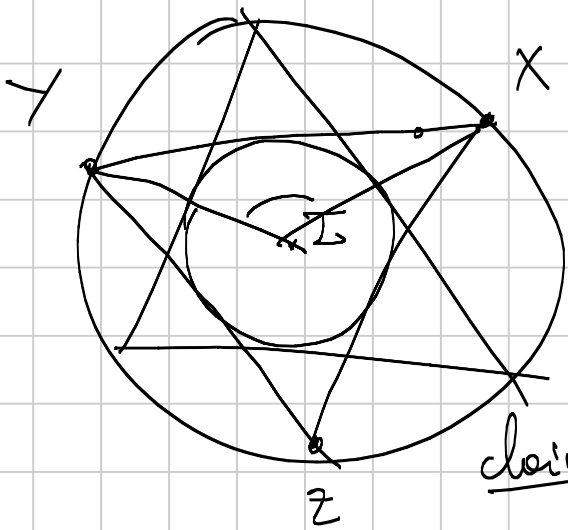
AF
PQ concorrono.
BC

Poncelet: $OI^2 = R(R-2r)$ → esiste anche per quadrilateri



Lemma:





Poncelet $\Rightarrow \exists Z$

$X\hat{I}Y = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\hat{Z}$

$X\hat{O}Y = 2\hat{Z}$

claim: $X\hat{I}Y = 120° \iff XOIY$ ciclico