ALGEBRA 1 BASIC (Giove)

Note Title 9/4/2017

Polinomi

coefficiente direttivo — termine noto

(I) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

grado

Coefficienti

→ $\mathbb{C}$ numeri complessi; $\mathbb{R}$ numeri reali; $\mathbb{Q}$; $\mathbb{Z}$

($\mathbb{Z}_p$ numeri interi mod p; $\mathbb{Z}_m$ m)

se $a_n = 1$, $p(x)$ si dice "monico"

$p(x) = 5$, $\deg p(x) = 0$

$p(x) = 0$ non è definito il grado ($-\infty$)

$\mathbb{C}$, x $3 \cdot x$, $3x + 5$, x^2

Oss $\mathbb{R}$, i, (ogni volta che vedete un i^2 sostituite -1)

$i^3 + i + 5$

↳ Numeri complessi!

Oss Moltiplicando due polinomi, i gradi si sommano; sommando due polinomi $\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(p(x), q(x))$

$(x^2+3) + (-x^2+x) = x + 3$

(II) DIVISIONE CON RESTO

$a(x) = \underbrace{b(x)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{r(x)}_{\text{resto}}$ $\qquad \deg r(x) < \deg b(x)$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 12x^2 - 4x - 7 & 3x^2 - 2 \\ \hline -3x^3 + 2x & x \\ \hline 12x^2 - 2x - 7 & \\ \dots & \end{array}$$

$3x^3 + 12x^2 - 4x - 7 = (3x^2 - 2)(x + 4) - 2x + 1$

$a(x), b(x)$ a coeff reali $\longrightarrow$ $q(x), r(x)$ a coeff reali

razionali $\quad$ razionali

interi + $b(x)$ monico (oppure ha coeff. direttivo $= -1$) $\longrightarrow$ interi

Esempi / esercizi

- Trovare tutti i numeri interi n tali che $\frac{n+4}{n-3} \in \mathbb{Z}$

$$n+4 = (n-3)\cdot 1 + 7$$

$$\frac{n+4}{n-3} = \underbrace{1}_{\text{quoziente}} + \frac{\overbrace{7}^{\text{resto}}}{n-3}$$

Quindi $n-3$ deve essere un divisore di 7

$$n-3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \end{cases} \qquad n = \begin{cases} 10 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{cases}$$

- $\frac{n^2+5n-7}{n-3} \in \mathbb{Z}$

resto della divisione (per Teorema di Ruffini)

$$\frac{3^2+5\cdot 3-7}{n-3} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{17}{n-3} \in \mathbb{Z}$$

- $\frac{n^3-2}{n^2+1} \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} n^3 - 2 & n^2+1 \\ \hline -n^3 - n & n \\ \hline -n-2 & \end{array}$$

$$n - \boxed{\frac{n+2}{n^2+1}}$$

$|n^2+1| \le |n+2|$

oppure $n+2=0$

$n=0$	$1 \le 2$	
$n=1$	$2 \le 3$	
$n=2$	$5 > 4$	per $n \ge 2$ $n^2+1 > n+2$
$n=-1$	$2 > \lvert -1 \rvert$	
$n=-2$	$5 > \lvert 0 \rvert$	

Lemma $p(x)$ polinomio a coeff. interi
$a, b \in \mathbb{Z}$

$$a-b \mid p(a)-p(b)$$

Dimostrazione $p(x) = \dots + c_k x^k + \dots + c_0$

$$p(a)-p(b) = \dots + c_k \underbrace{(a^k - b^k)}_{\text{e' multiplo di } a-b} + \dots + c_0(1-1)$$

$$a^k - b^k = (a-b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1})$$

Oss Un polinomio non è una funzione.
MA un polinomio definisce una funzione ("funzione polinomiale")

$p(x)$ $\qquad a \in \mathbb{C}$

$\qquad p(a)$

III MCD, Algoritmo di Euclide, Teorema di Bézout.

$a(x), b(x)$ polinomi (a coeff. complessi)

$\mathrm{MCD}(a(x), b(x)) = d(x)$ = il polinomio monico di grado più alto tra quelli che dividono $a(x)$ e $b(x)$

$$\mathrm{MCD}(\underbrace{x^3-2x^2+3x-6}_{a(x)}, \underbrace{x^3-x^2-3x+2}_{b(x)}) = x-2$$

$2x-4$

Algoritmo di Euclide

$\to a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

Il $d(x)$ che sto cercando deve anche dividere $r(x)$!

Non solo:

$\mathrm{MCD}(a(x), b(x)) = \mathrm{MCD}(b(x), r(x))$
$\qquad \| $
$\quad d(x)$

$$x^3-2x^2+3x-6 = (x^3-x^2-3x+2) \cdot 1 + (-x^2+6x-8)$$

$$\mathrm{MCD}(a(x), b(x)) = \mathrm{MCD}(b(x), -x^2+6x-8)$$

ITERARE QUESTO PROCEDIMENTO!

$b(x) = r(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$

$$\begin{array}{l|l} x^3-x^2-3x+2 & -x^2+6x-8 \\ \hline -x^3+6x^2-8x & -x-5 \\ \hline 5x^2-11x+2 & \end{array}$$

$$\frac{-5x^2+30x-40}{19x-38}$$

$$r_3(x) = r_4(x)\cdot q_5(x) + r_5(x)$$

$$r_4(x) = r_5(x)\cdot q_6(x) + \underbrace{r_6(x)}_{d(x)}$$

$$r_5(x) = \underbrace{r_6(x)}_{d(x)}\cdot q_7(x) + \underbrace{r_7(x)}_{0}$$

$$b(x) = r(x)\cdot(-x-5) + (19x-38)$$

$$MCD(\dots) = MCD(r(x),\ 19x-38)$$

$\dots$

$$= MCD(\underbrace{\dots}_{d(x)},\ 0) \qquad = x-2$$

<u>Teorema di Bézout</u> $a(x), b(x)$ polinomi (a coeff. complessi)
$d(x) = MCD(a(x), b(x))$.
Allora esistono $h(x)$, $k(x)$ tali che

$$\boxed{d(x) = a(x)\cdot h(x) + b(x)\cdot k(x)}$$

IV TEOREMA DI RUFFINI

$$a(x) = b(x)\cdot q(x) + r(x) \qquad \deg r(x) < \deg b(x)$$

Cosa succede se $b(x) = x-\lambda$ (dove λ è un numero (complesso)) ?

$$a(x) = (x-\lambda)\cdot q(x) + r\cancel{(x)} \qquad \deg r(x) < 1$$

$\Rightarrow r(x)$ è costante
(ha grado 0 oppure $-\infty$)

<u>Teorema di Ruffini</u> $r = a(\lambda)$

<u>Def</u> $\lambda \in \mathbb{C}$ è una <u>radice</u> di $a(x)$ se $a(\lambda) = 0$

Conseguenza del T. di R: λ è radice di $a(x) \iff a(x) = (x-\lambda)\cdot q(x)$

Radici $\longleftrightarrow$ fattori di primo grado nella fattorizzazione del polinomio.

<u>Conseguenza</u>: Un polinomio di grado n ha al massimo n radici.

x^2-4x+4 $\qquad \lambda = 2$ è una radice $\qquad x^2-4x+4 = (x-2)^2$ $\qquad \lambda=2$ ha molteplicità 2

V PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI

Teorema Se $p(x)$, $q(x)$ sono polinomi di grado $\leq n$ ed esistono $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$ tali che
distinti

$$p(a_1) = q(a_1)$$
$$p(a_2) = q(a_2)$$
$$\vdots$$
$$p(a_{n+1}) = q(a_{n+1})$$

allora $p(x) = q(x)$.

Dim $p(x) - q(x) =: s(x)$

Allora $s(a_1) = p(a_1) - q(a_1) = 0$

$s(a_1) = s(a_2) = \dots = s(a_{n+1}) = 0$

$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ sono radici di $s(x)$.

$\Rightarrow s(x)$ ha (almeno) $n+1$ radici distinte.

$$\deg(s(x)) \leqslant \max\left(\deg p(x), \deg q(x)\right) \leq n$$

$\Rightarrow s(x) = 0$ (il polinomio nullo!)

$\Rightarrow p(x) = q(x)$.

VI FATTORIZZAZIONE DEI POLINOMI

Def $p(x)$ è irriducibile se non ha divisori di grado ≥ 1 e $< \deg p(x)$.

ATTENZIONE: è rilevante l'insieme dei coefficienti!

Es: $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

RIDUCIBILE: non è irriducibile "su $\mathbb{R}$" (e quindi neanche "su $\mathbb{C}$")

IRRIDUCIBILE: PERÒ è irriducibile "su $\mathbb{Q}$" (e quindi anche "su $\mathbb{Z}$")

$x^2 + 1$ irriducibile su $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$

riducibile su $\mathbb{C}$ $\qquad x^2 + 1 = (x+i)(x-i)$

Oss: i polinomi di primo grado sono sempre irriducibili.

- POLINOMI A COEFF. COMPLESSI

<u>Teorema fondamentale dell'algebra</u> Ogni polinomio di grado ≥ 1 ha almeno una radice complessa.

<u>Conseguenza</u>: ① nessun polinomio di grado ≥ 2 è irriducibile!

sarà divisibile per qualche $x - \lambda$

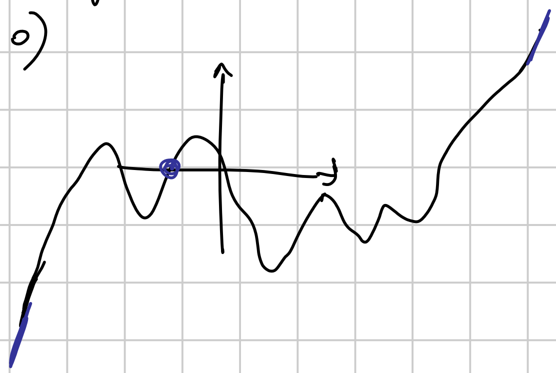
② Ogni polinomio si fattorizza come prodotto di fattori di primo grado.

$$\boxed{p(x) = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)}$$

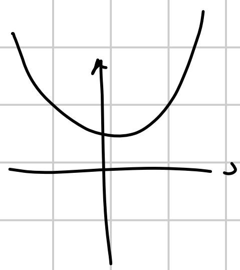
$n = \deg p(x)$

- POLINOMI A COEFF. REALI

<u>Oss</u>: Ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.
(coeff direttivo > 0)



<u>Es</u>: $x^2 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{R}$
perché non ha radici reali



<u>Teorema</u> I polinomi irriducibili (su $\mathbb{R}$) hanno grado ≤ 2.

<u>Es</u>:
$$x^4 + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x^2$$
$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)$$

irriducibili

$ax^2 + bx + c$ irriducibile su $\mathbb{R}$
($\Rightarrow$ senza radici reali)

$\Delta < 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \begin{cases} \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{} \end{cases}$$

Le due radici sono complesse coniugate.

Le radici complesse di un polinomio a coeff. reali sono:

- reali $(x-\lambda)$
- (a coppie) complesse coniugate.

- POLINOMI A COEFFICIENTI RAZIONALI

E' complicato... Ci sono polinomi irriducibili di grado arbitrariamente alto!

Es: x^3-2 e' irriducibile su $\mathbb{Q}$
perche' non ha radici razionali

$\mathbb{R}$: $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$

$\mathbb{C}$: $(x-\sqrt[3]{2})\left(x-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$

Criterio Se $p(x)$ e' un polinomio a coeff. razionali, e $\frac{a}{b}$ e' una sua radice razionale, allora

ridotta ai minimi termini

$$p(x) = \frac{c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0}{d}$$

$c_0, \dots, c_n, d \in \mathbb{Z}$

$a \mid c_0$ e $b \mid c_n$.

Dim $p\left(\frac{a}{b}\right)=0$

$$c_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + c_0 = 0$$

$$\underline{c_n a^n} + \underline{c_{n-1}a^{n-1}b} + \dots + \underline{ab^{n-1}c_1} + \underline{\underline{b^n c_0}} = 0$$

deve essere multiplo di a

$\Rightarrow$ c_0 deve essere multiplo di a

c_n deve essere multiplo di b.

- POLINOMI A COEFF. INTERI

Cattiva notizia: e' complicato...

Buona notizia: non e' peggio che su $\mathbb{Q}$.

Lemma di Gauss Se $p(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$, allora è irriducibile anche su $\mathbb{Q}$.

VII RELAZIONI RADICI – COEFFICIENTI

(per polinomi a coeff. complessi)

$$p(x) = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

$n = \deg p(x)$

radici + coeff. direttivo a

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

coefficienti

- $a = a_n$
- ... e il resto?

$\boxed{\text{Caso } n=2}$

$$p(x) = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$
$$= ax^2 - a\lambda_1 x - a\lambda_2 x + a\lambda_1\lambda_2$$
$$= \underbrace{a}_{a_2}x^2 \underbrace{-a(\lambda_1+\lambda_2)}_{a_1}x + \underbrace{a\lambda_1\lambda_2}_{a_0}$$

$$\lambda_1+\lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

$\boxed{n=3}$

$$p(x) = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$$
$$= \underbrace{a}_{a_3}x^3 \underbrace{-a(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{a_2}x^2 + \underbrace{a(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}_{a_1}x \underbrace{-a\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{a_0}$$

$\boxed{k=1}$ $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = -\dfrac{a_2}{a_3}$

$\boxed{k=2}$ $\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 = \dfrac{a_1}{a_3}$

$\boxed{k=3}$ $\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\dfrac{a_0}{a_3}$

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

In generale ... $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

$$\boxed{\text{Somma di tutti i possibili prodotti di } k \text{ radici} = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}}$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Esempio $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \dots ?$$

Somma delle radici: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\dfrac{a_2}{a_3} = 2$

Prodotto delle radici: $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\dfrac{a_0}{a_3} = -4$

Somma dei quadrati delle radici: $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$

$$= 2^2 - 2 \cdot 1 = 2.$$

Somma dei cubi $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = \dots$

reciproci $\dfrac{1}{\lambda_1} + \dfrac{1}{\lambda_2} + \dfrac{1}{\lambda_3} = \dots$

VIII RADICI DELL'UNITÀ E POLINOMI CICLOTOMICI

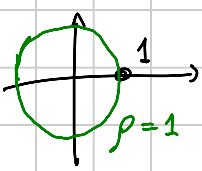
$$x^n - 1 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono radici di $x^n - 1$

λ è radice di x^n-1 se $\boxed{\lambda^n = 1}$

$$\lambda = \underbrace{\rho}_{\text{modulo}}(\cos \underbrace{\theta}_{\text{argomento}} + i \,\text{sen}\, \underbrace{\theta}_{\text{argomento}})$$

$$\lambda^n = \rho^n(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)^n = \rho^n(\cos n\theta + i\,\text{sen}\, n\theta)$$



$$= 1 = 1(\cos 0 + i\,\text{sen}\, 0)$$

$\rho = 1$ (ρ è un numero reale positivo $\rho^n = 1 \Rightarrow \rho = 1$)

$\boxed{n\theta = 0}$ attenzione! mod 2π

Es: $n=1 \longrightarrow \vartheta = 0$

$n=2 \longrightarrow 2\vartheta = 0$
- $\vartheta = 0$
- $\vartheta = \pi$

$n=3 \longrightarrow 3\vartheta = 0$
- $\vartheta = 0$
- $\vartheta = \frac{2}{3}\pi$
- $\vartheta = \frac{4}{3}\pi$

$n\vartheta = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

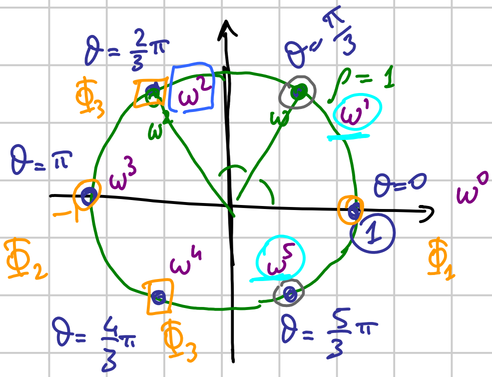
$\Rightarrow \boxed{\vartheta = \frac{2k\pi}{n}}$

$k=0 \longrightarrow \vartheta = 0$

$k=n \longrightarrow \vartheta = \frac{2n\pi}{n} = 2\pi = 0$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

$n=6$



$\underline{x^6 - 1}$

Le radici di $x^n - 1$ si dicono radici n-esime dell'unità.

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)\cdots(x-\omega^{n-1})$$

Come si fattorizza $\underline{x^n - 1}$ su $\mathbb{Q}$?

$n=1 \qquad x-1 = \Phi_1(x)$

$n=2 \qquad x^2-1 = (x-1)\underbrace{(x+1)}_{\Phi_2(x)} = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x)$

$n=3 \qquad x^3-1 = (x-1)\underbrace{(x^2+x+1)}_{\Phi_3(x)} = \Phi_1(x) \cdot \Phi_3(x)$

$n=4 \qquad x^4-1 = \underbrace{(x-1)}_{1}\underbrace{(x+1)}_{-1}\underbrace{(x^2+1)}_{\Phi_4(x)} = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \Phi_4(x)$

1 radice 1-esima dell'unità

-1 radice quadrata dell'unità

$i \quad -i$ radici quarte dell'unità

radici quarte dell'unità

$\Phi_n(x)$ = il polinomio monico avente come radici le radici n-esime dell'unità "non incontrate in precedenza"

"primitive"

$$x^n - 1 = \prod_{d \mid n} \Phi_d(x)$$

$n = 6$

$$x^6 - 1 = \underset{(x-1)}{\Phi_1(x)} \cdot \underset{(x+1)}{\Phi_2(x)} \cdot \underset{(x^2+x+1)}{\Phi_3(x)} \cdot \underset{(x^2-x+1)}{\Phi_6(x)}$$

$\Phi_n(x)$ si chiamano "polinomi ciclotomici"

<u>Oss</u>: $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$

<u>Teorema</u> $\Phi_n(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

<u>Es</u>: $\Phi_8(x) = x^4 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Le radici n-esime sono le potenze di una qualsiasi radice n-esima primitiva.

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{n}$$

$$\omega^0 = 1, \ \omega, \ \omega^2, \ \omega^3, \ \dots, \ \omega^{n-1}.$$

ESERCIZI DI BASE: 68, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 80.
(pag 14)

PROBLEMI SESSIONE A1: 3, 8, 10, 11.
(pag 26)

Hint per 77: Considerate $q(x) = p(x+1) - p(x)$. Cosa si può dire su $q(x)$?

<u>Es. 77</u> $p(x)$ polinomio t.c. $p(n) = 1^5 + 2^5 + \dots + n^5$

$p(-1) = ?$ $\quad p(-n)?$

<u>Fatto</u>: Esiste un polinomio $p(x)$ di grado $6^{\,k+1}$ t.c.

$$p(n) = 1^k + 2^k + \dots + n^k$$

$k=1 \qquad 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$k=2 \qquad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$p(n) = a_6 n^6 + a_5 n^5 + a_4 n^4 + a_3 n^3 + \dots$$

$$(n+1)^5 = p(n+1) - p(n) = a_6\left((n+1)^6 - n^6\right) + a_5\left((n+1)^5 - n^5\right) + \dots$$

$p(x+1) - p(x) = (x+1)^5$ è vera per $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

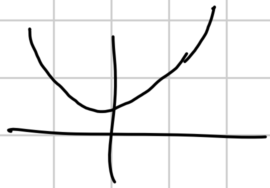
$\Rightarrow$ per il principio di identità dei polinomi, è vera come polinomi.

$\Rightarrow$ è vera anche per $x = -1, -2, -3, \dots$

$x=-1 \qquad p(0) - p(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(-1) = 0$

$x=-2 \qquad p(-1) - p(-2) = -1^5 = -1 \quad \Rightarrow \quad p(-2) = 0 + 1 = 1$

$$p(-n) = p(n-1)$$



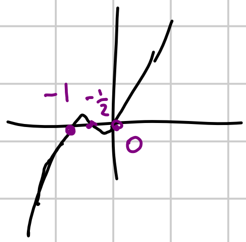
$$p(x+1) - p(x) = (x+1)^4$$

$p(0) - p(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(-1) = 0$

$p(-1) - p(-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(-2) = -1$

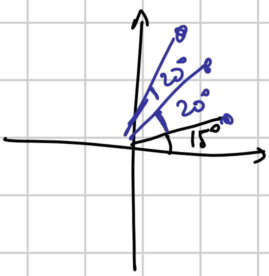
$\vdots$

$$p(-n) = -p(n-1)$$



BONUS: $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ (potenze pari)

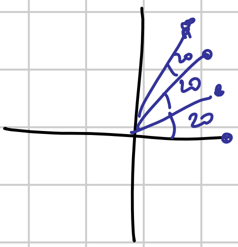
PROBLEMA 3 $\qquad \cos 15^\circ + \cos 35^\circ + \dots + \cos 355^\circ$



$$\cos\theta = \mathrm{Re}\left(\text{numero complesso di argomento } \theta\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)$$

$e^{i\theta}$

$$\rightarrow \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{15}{360}\cdot 2\pi} + e^{i\frac{35}{360}\cdot 2\pi} + \dots + e^{i\frac{355}{360}\cdot 2\pi}\right)$$



$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{15}{360}\cdot 2\pi}\underbrace{\left(\underline{1} + \underline{e^{i\frac{20}{360}2\pi}} + \underline{e^{i\frac{40}{360}2\pi}} + \dots + \underline{e^{i\frac{340}{360}2\pi}}\right)}_{0}\right)$$

$1 = e^{i\frac{0}{360}2\pi}$

Radici 18-esime dell'unità

PROBLEMA 8

$$\underbrace{p(0) = 2, \quad p(1) = 4, \quad p(2) = 6}, \quad \boxed{p(3) = 56.}$$

$$\bar{p}(x) = 2x + 2$$

$$p(x) - \underbrace{\bar{p}(x)}_{(2x+2)} = \text{un polinomio che si annulla in } 0, 1, 2$$

$$= x(x-1)(x-2) \cdot q(x)$$

può essere qualsiasi polinomio

$$\boxed{p(x) = 2x + 2 + x(x-1)(x-2) \cdot q(x)}$$

Resto della divisione per $x(x-1)(x-2)$: $2x+2$.

$x = 3$

$$56 = p(3) = 8 + 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot q(3)$$

$$\Rightarrow \quad 6q(3) = 48$$

$$\Rightarrow \quad q(3) = 8$$

$$q(x) = (x-3)\,r(x) + 8$$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = \underbrace{2x + 2 + 8x(x-1)(x-2)} + x(x-1)(x-2)(x-3) \cdot r(x)}$$

PROBLEMA 10

$p(0)$, $p(13)$ dispari $\qquad p(\lambda) = 0$?

$p(n)$ è sempre dispari per ogni intero n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$$

- $p(0)$ dispari $\Rightarrow$ a_0 dispari $\qquad a_0 \equiv 1 \ (2)$
- $p(13)$ dispari $\Rightarrow$ $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ dispari
  $x = 13 \equiv 1 \ (2)$

$p(n)$ n pari: $x = n$, $x = 0$ $\quad n \equiv 0 \ (2) \longrightarrow p(n) \equiv p(0) \equiv 1 \ (2)$

n dispari: $n \equiv 13 \ (2) \longrightarrow p(n) \equiv p(13) \equiv 1 \ (2)$

PROBLEMA 11

Per induzione.

dati $\underline{\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}}$ numeri complessi distinti

Obiettivo: $P_{2002}(\lambda_i) = 0$ per ogni i

esistono $a_1, \dots, a_k$ tali che

$$P_k(\lambda_1) = \pm P_k(\lambda_2) = \pm P_k(\lambda_3) = \dots = \pm P_k(\lambda_{k+1})$$

$$\underline{P_{n+1}(z) = \underbrace{P_n(z)}^2 - a_n}$$

$$P_1(z) = z - a_1 \qquad \lambda_1 - a_1 = \pm(\lambda_2 - a_1)$$

$$\lambda_1 - a_1 = -\lambda_2 + a_1 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$P_2(z) = P_1(z)^2 - a_2 \qquad P_2(\lambda_1) = P_2(\lambda_2)$$

$$P_1(\lambda_1)^2 - a_2 = \pm\left(P_1(\lambda_3)^2 - a_2\right)$$

$$a_2 = \frac{P_1(\lambda_1)^2 + P_1(\lambda_3)^2}{2}$$

$$P_3(z) = \dots \qquad P_3(\lambda_1) = P_3(\lambda_2) = P_3(\lambda_3)$$

...

$$P_{2001}(\lambda_1) = \pm P_{2001}(\lambda_2) = \dots = \pm P_{2001}(\lambda_{2002})$$

$$P_{2002}(z) = \underbrace{P_{2001}(z)}^2 - a_{2002}$$

$$\underline{a_{2002} = P_{2001}(\lambda_1)^2}$$