Senior 2017 - A2 Basic   Aner

Note Title   9/6/2017

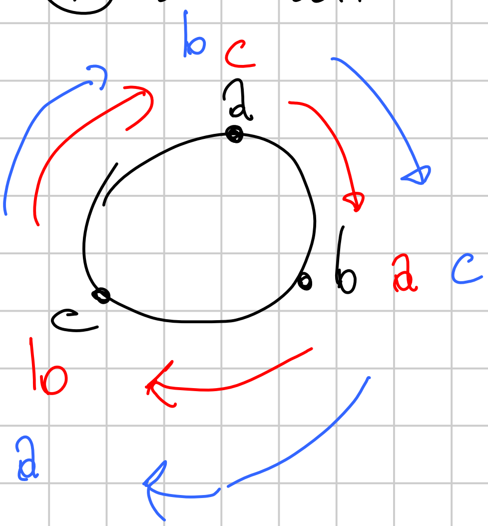
① $\boxed{a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca}$ a,b,c numeri reali

② (Nesbitt) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b} \geq \dfrac{3}{2}$ a,b,c reali positivi

③ $\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1} \leq 1$ a,b,c reali positivi, $abc=1$

Notazione Somme cicliche, somme simmetriche

① Si riscrive come $\boxed{\sum_{cyc} a^2 \geq \sum_{cyc} ab}$ a,b,c numeri reali



$$\sum_{cyc} a^2 = a^2 + c^2 + b^2$$

$$\sum_{cyc} ab = ab + ca + bc$$

$$\sum_{cyc} a^2 b = a^2 b + c^2 a + b^2 c$$

a,b,c,d reali $$\sum_{cyc} ab = ab+bc+cd+da \left(= (a+c)(b+d)\right)$$

---

a,b,c reali

$$\sum_{sym} ab^2c^3 = ab^2c^3 + ac^2b^3 + ba^2c^3 + ba^3c^2 + ca^2b^3 + ca^3b^2$$

$$\sum_{cyc} ab^2c^3 = ab^2c^3 + bc^2a^3 + ca^2b^3$$

$$\sum_{sym} ab = ab + ba + ac + ca + bc + cb = 2\sum_{cyc} ab$$

(1) $$a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{sym} a^2$$

---

a,b,c,d reali $$\sum_{sym} a = 6a+6b+6c+6d$$

Disuguaglianza base : $x^2 \geq 0$; più in generale se ho un'espressione e la riesco a scrivere come somma di quadrati, allora è ≥ 0

S.O.S. "sum of squares"

(1) a,b,c reali $\displaystyle\sum_{cyc}(a-b)^2 \geq 0$

$$0 \leq \sum_{cyc}(a-b)^2 = \sum_{cyc}\left(a^2-2ab+b^2\right) = \sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} ab + \sum_{cyc} a^2 =$$

$$= 2\left(\sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} ab\right)$$

Riarrangiamento a, α, b, β numeri reali

Sappiamo che $a \geq \alpha$, $b \geq \beta$. Allora $a-\alpha \geq 0$ $b-\beta \geq 0$, e quindi $(a-\alpha)(b-\beta) \geq 0$

$ab + \alpha\beta - \alpha b - a\beta \geq 0$; $ab + \alpha\beta \geq \alpha b + a\beta$

In generale $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots y_n$ numeri reali

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n \qquad y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$

Scegliamo una permutazione σ su $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \, y_{n+1-i} \overset{②}{\le} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_{\sigma(i)} \overset{①}{\le} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Se ① allora ②

Uso ① con $x_1 \le \dots \le x_n \qquad -y_n \le -y_{n-1} \le \dots \le -y_1$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (-y_{\sigma(i)}) \le \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (-y_{n+1-i})$$

Dim di ① : $x_1 \cdot y_{\sigma(1)} + x_2 \cdot y_{\sigma(2)} + \dots + x_n y_{\sigma(n)}$

Se σ non è l'identità, esistono i, j tra 1 e n con $i < j$ ma $\sigma(i) > \sigma(j)$

$$x_1 y_{\sigma(1)} + \dots + x_i \cdot y_{\sigma(i)} + \dots + x_j y_{\sigma(j)} + \dots + x_n y_{\sigma(n)}$$

Adesso sostituisco a $x_i y_{\sigma(i)} + x_j y_{\sigma(j)}$ la quantità

$\boxed{x_i y_{\sigma(j)} + x_j y_{\sigma(i)}}$. $\quad x_i \le x_j \qquad y_{\sigma(j)} \le y_{\sigma(i)}$

più grande (debolmente)

Con questo metodo, anche se il numero reale $\sum x_i y_{\sigma(i)}$ rimane uguale (non aumenta), la permutazione σ "si avvicina" all'identità...

---

① a, b, c reali $\qquad a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

wlog "without loss of generality"

assumiamo $a \geq b \geq c$ $\quad x_1 = y_1 = c \quad x_2 = y_2 = b$

$x_3 = y_3 = a$

$$\overset{x_3 y_3}{aa} + \overset{x_2 y_2}{bb} + \overset{x_1 y_1}{cc} \geq \overset{x_3 y_2}{ab} + \overset{x_2 y_1}{bc} + \overset{x_1 y_3}{ca}$$

---

(2) a, b, c reali positivi $\quad \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$

wlog $a \geq b \geq c \qquad x_3 = a \quad x_2 = b \quad x_1 = c$

$$\underset{y_3}{\frac{1}{b+c}} \geq \underset{y_2}{\frac{1}{c+a}} \geq \underset{y_1}{\frac{1}{a+b}} \qquad \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

Così riusciamo a dim. che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c}$$

Sommiamo membro a membro

$$2 \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \sum_{cyc} \left(\frac{a}{c+a} + \frac{c}{c+a} \right) = 3$$

Disuguaglianza di Tchebyschev

Se $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ e $y_1 \leq \ldots \leq y_n$, allora

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right) \leq n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \right)$$

DIM

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	$x_1 y_1$	$x_2 y_1$		
y_2		$x_2 y_2$	$x_3 y_2$	
y_3			$x_3 y_3$	$x_4 y_3$
y_4	$x_1 y_4$			$x_4 y_4$

Ogni diagonale è "battuta" da una delle n copie di $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ a destra

---

Cauchy-Schwarz. $x_1, \dots x_n$ $y_1, \dots y_n$ numeri reali

Allora $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

DIM Introduciamo t e consideriamo

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot t - y_i)^2 \geq 0$$

$$\parallel$$

$$\left(\sum x_i^2\right) \cdot t^2 - 2\left(\sum x_i \cdot y_i\right) t + \left(\sum y_i^2\right) \geq 0$$

Il Δ del polinomio deve essere ≤ 0

Scrivete Δ ...

Medie e disuguaglianze tra medie.

Siano $x_1, x_2, \dots x_n$ numeri reali positivi

$$AM(x_1 \dots x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$GM(x_1 \cdot \dots x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n}$$

$$QM(x_1, \dots x_n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

$$HM(x_1 \dots x_n) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n}\right)^{-1}$$

Teo $\quad HM \leq GM \leq AM \leq QM$

Esempio $\quad AM \leq QM$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \overset{?}{\leq} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \iff \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \overset{?}{\leq} \frac{\sum x_i^2}{n}$$

$$\iff \frac{(\sum x_i)^2}{n} \overset{?}{\leq} \sum x_i^2 \iff (\sum x_i)^2 \overset{*}{\leq} n \cdot \sum x_i^2$$

$*$ vale per C.S. $\quad x_1 \dots x_n$ qualsiasi, $y_1 \dots y_n = 1$

vale per Tcheb. $\quad x_1 = y_1 \dots x_n = y_n$, wlog ordinati

---

Esempio $\quad HM \leq AM \qquad \left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n}\right)^{-1} \overset{?}{\leq} \frac{\sum x_i}{n} \iff$

$$1 \overset{?}{\leq} \left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \cdot \left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n}\right) \iff n^2 \overset{*}{\leq} \left(\sum x_i\right)\left(\sum \frac{1}{x_i}\right)$$

$*$ vale per C.S. $\quad \left(\sum (\sqrt{x_i})^2\right)\left(\sum \sqrt{\frac{1}{x_i}}^{\,2}\right) \overset{CS}{\geq} \left(\sum 1\right)^2$

// per Tcheb. $\quad y_i = \frac{1}{x_i}$ (occhio che allora gli y_i sono ordinati al contrario, ma è ciò che serve!)

Esercizio $\quad \sum_{sym} a^3 \geq \sum_{sym} a^2 b \qquad 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq a^2 b + ab^2 + b^2 c + bc^2 + c^2 a + ca^2$

$a, b, c \geq 0 \quad$ Voglio sconfiggere $a^2 b$ usando alcuni termini a sinistra. c^3 è meglio non usarlo!

Usare AM-GM, ma come?

Idea dal pubblico: wlog $a \geq b \geq c$ $\quad \frac{a^3+b^3}{2} \geq \sqrt{a^3b^3} \geq \sqrt{a^2b^4} = ab^2$

Proviamo $a^2 b = \sqrt[3]{a^6 b^3} \leq \frac{a^3+a^3+b^3}{3}$ per AM-GM

(non ho usato il wlog)

Altra idea: $a^3+b^3 \geq a^2b + ab^2$ per riarrangiamento
(a^2,b^2) (a,b)

Esercizi

1. Lemma di Titu $\quad x_1 \dots x_n \; y_1 \dots y_n > 0$
$$\sum \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{(\sum x_i)^2}{\sum y_i}$$

2. $x_1 \dots x_n > 0 \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1 \rightsquigarrow \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq n^2$

3. $x, y, z > 0 \quad x+y+z = 1 \quad \max x^5 y z$

4. AZ-10 Trovare le migliori costanti C_1 e C_2

t.c. $\quad C_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq C_2 \quad (a,b,c>0)$

5. BMO 14/1 $\quad x,y,z > 0 \quad \sum_{cyc} xy = 3xyz$

$\rightsquigarrow \sum_{cyc} x^2 y \geq 2 \sum_{cyc} x - 3$

---

1. $\left(\sum y_i\right) \cdot \left(\sum \frac{x_i^2}{y_i}\right) \overset{?}{\geq} \left(\sum x_i\right)^2 \quad \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{matrix} > 0$

Cauchy Schwarz su $\quad \sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}, \dots \sqrt{y_n}$

$\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \dots \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}$

(2) $\sum x_i = 1 \rightsquigarrow \sum \frac{1}{x_i} \geq n^2$

AM-HM sugli x_i $\qquad \frac{\sum x_i}{n} \geq \left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n} \right)^{-1}$

$$\left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n} \right) \cdot \frac{\overset{1}{\sum x_i}}{n} \geq 1$$

(3) $x + y + z = 1 \qquad \max \; x^5 \cdot y \cdot z$

oss Se l'ipotesi fosse $5x + y + z = 1$ sarei felice!

AM-GM su x, x, x, x, x, y, z :

$$\frac{1}{7} = \frac{5x + y + z}{7} \geq \sqrt[7]{x^5 y z}$$

Riscrivo: $x + y + z = 5\left(\frac{1}{5}x\right) + y + z$

AM-GM su $\frac{1}{5}x, \frac{1}{5}x, \frac{1}{5}x, \frac{1}{5}x, \frac{1}{5}x, y, z$

$$\frac{1}{7} = \frac{x + y + z}{7} = \frac{5\left(\frac{1}{5}x\right) + y + z}{7} \geq \sqrt[7]{\left(\frac{1}{5}x\right)^5 \cdot y \cdot z}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^7 \geq \frac{x^5 \cdot y \cdot z}{5^5} \qquad x^5 y z \leq \frac{5^5}{7^7}$$

Massimo ottenuto per $x + y + z = 1$ e $\frac{1}{5}x = y = z$

$$x = \frac{5}{7} \qquad y = z = \frac{1}{7}$$

(4) $a, b, c > 0$ studiare $\sum_{cyc} \frac{a}{a+b}$

OSS 1 Se $a >> b$, già solo $\frac{a}{a+b}$ è quasi 1

Se poi $b >> c$, anche $\frac{b}{b+c}$ è quasi 1

$\frac{c}{c+a}$ sarà minuscolo, però è > 0

$\sum_{cyc} \frac{a}{a+b}$ può diventare più grande di ogni $r < 2$

$\rightsquigarrow C_2 \geq 2$

OSS 2 L'espressione non è simmetrica.

Simmetrizziamola!

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{a+b}\right) + \left(\sum_{cyc} \frac{b}{a+b}\right) = 3 \leftarrow \text{numero costante}$$

$\rightsquigarrow C_1 + C_2 = 3$

OSS 3 $\sum \frac{a}{a+b} > 1$: infatti

$- \sum \frac{a}{a+b} > \sum \frac{a}{a+b+c} = 1$

$$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a}$$

$\sim 0 \qquad \sim 0 \qquad \sim 1$

$a << b \qquad b << c$

$C_1 = 1 \qquad C_2 = 2$

---

oppure

wlog a è il più grande

$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c}$ è già $\geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} = 1$

---

(5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$ usiamo i numeri $a=\frac{1}{x}$ $b=\frac{1}{y}$ $c=\frac{1}{z}$

Riscriviamo

$$\sum_{cyc} x^2y + 3 \overset{?}{\geq} 2\sum_{cyc} x$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2b} + 3 \geq 2\sum_{cyc}\frac{1}{a}$$ molt. per il den. comune

$$\sum_{cyc} b\cdot c^2 + 3a^2b^2c^2 \geq 2\sum_{cyc} ab^2c^2$$ $(a+b+c=3)$

$$\sum_{cyc} bc^2 + \sum_{cyc} a^3b^2c^2 \geq 2\sum_{cyc} ab^2c^2$$

uso AM-GM

$$bc^2 + a^2b^3c^2 \geq 2\cdot\sqrt{a^2b^4c^4} = 2\cdot ab^2c^2$$

e cicliche