ALGEBRA 3

Kirill Kuzmin

Funzioni e successioni

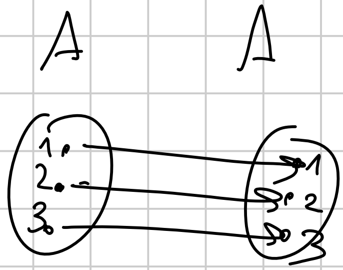
Insieme di partenza

Insieme di arrivo

Ad ogni elemento dell'insieme di partenza associa un unico elemento dell'insieme di arrivo

Esempio $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

partenza arrivo



$f(x) = x$

costanti : ad ogni elemento in partenza associo ~~la~~ uno stesso elemento in arrivo

- funzioni polinomiali

$x \longmapsto p(x)$

su $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, etc

funzioni polinomiali coincidono in infiniti punti, allora il poli è lo stesso

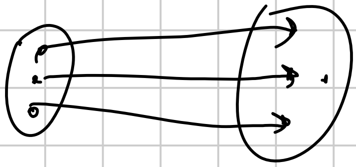
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\left.\begin{array}{l} x \\ x^p \end{array}\right\} \rightarrow$ diversi polinomi, stessa funzione

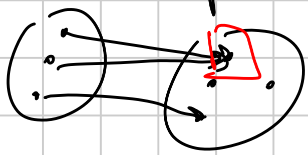
Attenzione: Esistono funzioni molto brutte

$$f:\{1,\dots n\} \to A \qquad\qquad f:\mathbb{N} \to A$$
$$i \longmapsto a_i \qquad\qquad\qquad i \longmapsto a_i$$

Iniettività, suriettività, biiettività

$f: A \to B$ è iniettiva „se ogni elemento di B è raggiunto al più una volta"

 OK

 NO

Equivalentemente: Se $f(a) = f(b)$, allora $a = b$

Suriettività: $f: A \to B$ suriettiva se tutti gli elementi sono raggiunti.

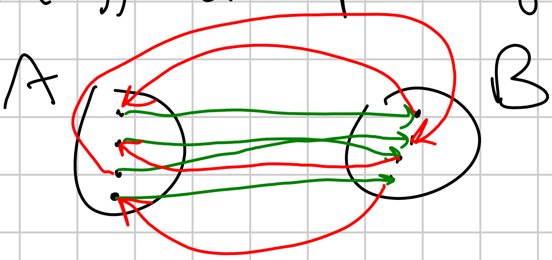
Biiettiva: Suriettiva e iniettiva

Invertibile: $f: A \to B$ invertibile se $\exists g: B \to A$

$f(g(b)) = b$ per ogni b in B

$g(f(a)) = a$ per ogni a in A

Una g così si chiama „inversa"



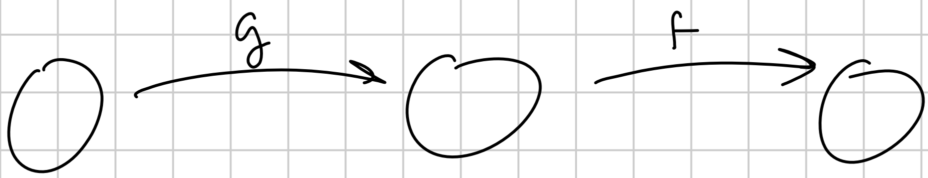
$f_1: A \to B \qquad f_2: B \to C$

$f_2 \circ f_1 : A \to C$

$a \longmapsto f_2(f_1(a))$

Se $f \circ g$ è iniettiva, g è iniettiva

Se $f \circ g$ è suriettiva, f è suriettiva



NON SONO VERI I VICEVERSA!!!

Monotonia

Debolmente crescente | non decrescente

se $a \geq b$ implica $f(a) \geq f(b)$

Strettamente crescente

$a > b$ implica $f(a) > f(b)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ strettamente crescente

$x \longmapsto \lfloor x \rfloor$ debolmente crescente, non strettamente

Debolmente decrescente | non ~~de~~crescente

se $a \geq b$ implica $f(a) \cancel{\geq} \leq f(b)$

Strettamente decrescente

$a > b$ implica $f(a) \cancel{>} < f(b)$

Monotona : una delle 4 di sopra

Strettamente monotona : è iniettiva

Funzione periodica $\exists T \; f(x+T) = f(x)$ (T: periodo)

Esempio: parte frazionaria (periodo 1)

Rispetto alla composizione

Monotonia: vale la regola dei segni

Se g periodica, $f \circ g$ è periodica

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

Costantemente 0: $0 = 0 + 0$ ok

Identità ok: $f(x+y) = x+y$
$f(x) + f(y) = x+y$ ok

$f(x) = ax$ a razionale fissato ok

Poniamo $x=0$, $y=0$

$f(0+0) = \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0) \qquad f(0) = 0$

$f(2) = 2f(1) \qquad x=1 \quad y=1$

$f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1) \qquad x=2 \quad y=1$
$\phantom{f(3) = {}} 2f(1)$

$f(n) = nf(1)$ per induzione

n intero positivo

$f(nm) = nf(m)$ per induzione

$n \neq 0$ intero $\quad m = \frac{1}{n} \qquad f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \qquad f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1)\frac{1}{n}$

Razionali positivi $\quad f(q) = qf(1)$

$x=a$
$y=-a$ $\quad f(a-a) = f(a) + f(-a) \qquad \boxed{f(a) = -f(-a)}$ dispari

$ 0$

$\boxed{f(t) = f(-t)}$ pari

$\boxed{f(q) = qf(1)}$

$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

c'è $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, ma ce ne sono altre, non si scrivono esplicitamente

f monotona in un intervallo

f limitata in un intervallo ($\exists M$ t.c. $f(x) \leq M$)

Allora c'è solo

f continua in almeno un punto

$f(x + f(y)) = f(x) + y \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona

$x=0 \qquad f(f(y)) = \underbrace{\boxed{\cancel{f(0)} + y}}_{\text{biiettiva}} = y$

$\Downarrow$

f è biiettiva

Sia z t.c. $f(z) = 0$ ($\exists$ per suriettività

$y = z \qquad \cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + z \qquad z = 0$

t reale qualunque

$y = f(t) \qquad f(x+t) = f(x) + f(t) \qquad \forall x, t \in \mathbb{R}$

Soluzione $f(x) = ax$

$a(x + ay) = ax + y \qquad a^2 y = y \qquad \forall y \in \mathbb{R}$

$a = \pm 1$

$\boxed{f(x) = x \qquad f(x) = -x}$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$

Progressioni aritmetiche: $a_{n+1} - a_n$ è costante

"Ragione"

Progressione geometrica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ costante

ragione

$a_0, \; a_0+d, \; a_0+2d, \; a_0+3d$ progr aritmetica

$a_0, \; a_0 \cdot r, \; a_0 \cdot r^2, \ldots$ progr geometrica

$a_n = a_0 + nd$

Successioni definite per ricorrenza

Sono dati i primi k elementi $a_0, \ldots a_{k-1}$

Un modo per ricavare a_{n+k} in funzione dei precedenti $a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, \ldots, a_n, n)$

Esempio $a_0 = 1$ $\quad a_{n+1} = (n+1)a_n$

$a_n = n!$

$$a_{n+k} = c_{k-1} a_{n+k-1} + \ldots + c_0 a_n$$

Successioni per ricorrenza lineari

$$a_n = \lambda^n$$

$$\lambda^{n+k} = c_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \ldots + c_0 \lambda^n$$

$$\lambda^k - c_{k-1}\lambda^{k-1} - \ldots - c_0 = 0$$

λ deve essere radice di)

Se a_n, b_n rispettano, allora anche (a_n+b_n) rispetta

a_n rispetta, allora $\lambda \cdot a_n$ rispetta

Soluzioni di base: Siano $\lambda_1, \dots \lambda_k$ le radici di $t^k - c_{k-1}t^{k-1} - \dots - c_0$

Se sono tutte distinte, soluzioni di base

$$a_n = \lambda_1^n$$
$$\vdots$$
$$\lambda_k^n$$

Se λ_i ha molteplicità h

$$\boxed{\lambda_i^n} \quad \boxed{n\lambda_i^n} \quad \dots \quad \boxed{n^{h-1}\lambda_i^n}$$

Soluzione generica: combinazione lineare soluzioni di base $d_1\lambda_1^n + d_2\lambda_2^n + \dots + d_k\lambda_k^n$

$$a_0 = 19 \qquad a_1 = 25 \qquad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$$

$$1^n \quad n1^n \qquad d_1 + d_2 n \qquad d_1 = 19 \quad d_2 = 6 \qquad a_n = 19 + 6n$$

$$\boxed{a_{n+2} - a_{n+1}} = \boxed{a_{n+1} - a_n}$$

$$F_0 = 0 \qquad F_1 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$t^2 - t - 1 = 0 \qquad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = d_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n + d_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n$$

$$F_0 = 0 = d_1 + d_2$$

$$F_1 = 1 = d_1\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) + d_2\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = x a_n + y b_n \\ b_{n+1} = z a_n + w b_n \end{cases}$$

$$a_n = x a_{n-1} + y b_{n-1}$$

$$a_{n+1} = x a_n + y b_n = x a_n + y(z a_{n-1} + w \underbrace{b_{n-1}}_{\frac{a_n - x a_{n-1}}{y}})$$

SOLUZIONI

$f(f(x)) = x$ $\quad$ $f \circ f$ biiettiva

f biiettiva

$f(x+y) + f(x-y) = f(x) + f(y)$ $\quad$ $f \equiv 0$

2a, 3a, 5a, 7a sono risolte da $f \equiv 0$

$f(x^2) = x^2$ $\quad$ $f(t) = t$ MA solo per t positivi

Sui negativi non si sa nulla, Né inj né sur

$$f(xf(y)+f(x)) = 2f(x)+xy$$

$x=0$ NULLA di utile $\quad f(f(0)) = 2f(0)$

$x=1 \qquad \underbrace{f(f(y)+f(1)) = 2f(1)+y}_{\text{biiettiva}}$

$$y \longmapsto f(y) \longmapsto f(y)+f(1) \longmapsto f(f(y)+f(1))$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{+f(1)} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

INIETTIVA

INIETTIVA

SURIETTIVA

95

$$b_{n+1} = (n+1)b_n - nb_{n-1}$$

$$b_{n+1} - b_n = nb_n - nb_{n-1} = n(b_n - b_{n-1})$$

Dopo b_k, $b_{n+1}-b_n$ sarà multiplo di k

$\boxed{6}$ $\quad x_0 = 1 \qquad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 6x_{n+1} - 2\sum_{i=0}^{n+1} x_i - 6x_n + 2\sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$= 6x_{n+1} - 2x_{n+1} - 6x_n = 4x_{n+1} - 6x_n$$

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$

$$t^2 - 5t + 6 = (t-3)(t-2)$$

$$x_n = a3^n + b2^n \qquad x_0 = 1$$

$$x_1 = 4 = 6x_0 - 2x_0$$

$$1 = a+b$$

$$4 = 3a+2b \qquad a=2 \quad b=-1$$

$$\boxed{x_n = 2\cdot 3^n - 2^n}$$

$\boxed{7}$ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n$

$$a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\boxed{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Voglio polinomio a coefficienti interi con radici $(1+\sqrt{2})$ e qualcosa di collegato <1 in valore assoluto es. $(1-\sqrt{2})$

$$t^2 - 2t - 1$$

$\hookrightarrow (1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$

$(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})$

$$\boxed{x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n \qquad x_0 = 0 \quad x_1 = 1}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n}$$ Risolve

<0 n pari

>0 n dispari

$\lfloor \text{- - - -} \rfloor =$ x_n n pari

$x_n - 1$ n dispari

Modulo 7 $\quad m_0 \equiv 0$

$m_1 \equiv 1 \qquad m_{n+2} \equiv 2m_{n+1} + m_n$

$t^2 - 2t - 1$ "$1+\sqrt{2}$"   "$1-\sqrt{2}$" $\sqrt{2}$ è 3 o 4

↳ le due radici modulo 7 sono $\boxed{4 \text{ e } 5}$

$$m_n \equiv \frac{3}{4} 4^n - \frac{3}{4} 5^n \equiv 6 \cdot 4^n - 6 \cdot 5^n \mod 7$$

$$m_n \equiv x_n \pmod 7$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

ax^2

$$a(x+y)^2 + a(x-y)^2 = 2ax^2 + 2ay^2$$

$x=y=0$ $f(0)=0$

$x=y=t$ $f(2t)+0 = 4f(t)$

$$f(2t+t) + f(t) = 2\underbrace{f(2t)}_{4f(t)} + 2f(t)$$

$f(3t) = 9f(t)$

$f(nt) = n^2 f(t)$ per induzione

$x=0$ $f(y) + f(-y) = 2f(y)$ $f(-y) = f(y)$

<u>f è pari</u>

$f(n) = n^2 f(1)$ $f(1) = f(n\frac{1}{n}) = n^2 f(\frac{1}{n})$

$f(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n^2} f(1)$ $f(q) = q^2 f(1)$

t

IMO 2014 - A1

$0 < a_0 < a_1 < a_2 \ldots$ <u>INTERI</u>

Esiste esattamente un n per cui

$$a_n < \frac{a_0 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

$$n a_n \quad a_0 + \dots + a_n \quad n a_{n+1}$$

$$\boxed{a_0 + \dots + a_n - n a_n} > 0$$

$$a_0 + \dots + a_n - n a_{n+1} \leq 0$$

$$\boxed{a_0 + \dots + a_n + a_{n+1} - (n+1) a_{n+1}} \leq 0$$

$$d_n = a_0 + \dots + a_n - n a_n$$

Devo trovare $\underbrace{d_n > 0 \geq d_{n+1}}$ anche questi sono interi

$$d_1 = a_0 + a_1 - a_1 = a_0 > 0$$

$$d_{n+1} - d_n = \cancel{a_0 + \dots} + a_{n+1} - (n+1) a_{n+1} - (\cancel{a_0 + \dots + a_n}) + n a_n =$$

$$= n a_n - n a_{n+1} = n \underbrace{(a_n - a_{n+1})}_{<0}$$

d_n è decrescente, quindi scende sotto 0, ok

~~per a_n reali~~ NO

$$a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$f(x f(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

$x = 0$ $\quad f(f(y)) = f(0)^2 + y$ $\quad f$ biiettiva

Chiamo z t.c. $f(z) = 0$; pongo $x = z$

$\boxed{f(f(y)) = y}$ $\quad f(0)^2 = 0 \quad f(0) = 0$

$y = 0 \quad f(x\,f(x)) = f(x)^2$

$x = f(t)$ $\quad f(f(t)\,f(f(t))) = f(f(t))^2$

t reale qualunque $\quad f(t\,f(t)) = t^2$

$f(x)^2 = x^2 \qquad \boxed{f(x) = \pm x}$

$f(x) = x \quad f(x) = -x$ sono soluzioni

$\exists\ a, b \neq 0$ t.c. $f(a) = a \quad f(b) = -b$

$y = a \quad x = b \quad f(-b^2 + a) = b^2 + a$

$-b^2 + a = b^2 + a$

$2b^2 = 0$ NO

$b^2 - a = b^2 + a \quad 2a = 0$ NO