Stage Senior 2017 – Livello Basic

Stampato integrale delle lezioni

Autori vari

Indice

Note Title 9/4/2017

ALGEBRA 1 BASIC (Giove)

$\boxed{\text{Polinomi}}$

coefficiente direttivo — termine noto

(I) $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

grado — coefficienti

$\to$ $\mathbb{C}$ numeri complessi, $\mathbb{R}$ numeri reali, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$

$\mathbb{Z}_p$ numeri interi mod p
$\mathbb{Z}_m$ ... m

Se $a_n = 1$, $p(x)$ si dice "monico"

$p(x) = 5$
$\deg p(x) = 0$

$p(x) = 0$
non è definito il grado
$-\infty$

$\mathbb{C}$, x $\quad 3 \cdot x$
$3x + 5$
x^2

<u>Oss</u> $\mathbb{R}$, i, (ogni volta che vedete un i^2 sostituite -1)

$i^3 + i + 5$

$\hookrightarrow$ Numeri complessi!

<u>Oss</u> Moltiplicando due polinomi, i gradi si sommano;
sommando due polinomi $\deg(p(x) + q(x)) \leq \max(p(x), q(x))$

$$(x^2+3) + (-x^2+x) = x + 3$$

(II) DIVISIONE CON RESTO

$$a(x) = \underbrace{b(x)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{q(x)}_{\text{quoziente}} + \underbrace{r(x)}_{\text{resto}} \qquad \deg r(x) < \deg b(x)$$

$$\begin{array}{l|l} 3x^3 + 12x^2 - 4x - 7 & 3x^2 - 2 \\ \hline -3x^3 + 2x & x \\ \hline 12x^2 - 2x - 7 & \\ \dots & \end{array}$$

$$3x^3 + 12x^2 - 4x - 7 = (3x^2 - 2)(x + 4) - 2x + 1$$

$a(x), b(x)$ a coeff reali $\longrightarrow$ $q(x), r(x)$ a coeff reali

razionali $\qquad$ razionali

interi + $b(x)$ monico (oppure ha coeff. direttivo $= -1$) $\longrightarrow$ interi

Esempi / esercizi

- Trovare tutti i numeri interi n tali che $\frac{n+4}{n-3} \in \mathbb{Z}$

$$n+4 = (n-3)\cdot 1 + 7$$

$$\frac{n+4}{n-3} = 1 + \frac{7}{n-3}$$

quoziente $\qquad$ resto

Quindi $n-3$ deve essere un divisore di 7

$$n-3 = \begin{cases} 7 \\ 1 \\ -1 \\ -7 \end{cases} \qquad n = \begin{cases} 10 \\ 4 \\ 2 \\ -4 \end{cases}$$

- $\frac{n^2+5n-7}{n-3} \in \mathbb{Z}$

resto della divisione (per Teorema di Ruffini)

$$\frac{3^2+5\cdot 3-7}{n-3} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{17}{n-3} \in \mathbb{Z}$$

- $\frac{n^3-2}{n^2+1} \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{r|l} n^3 - 2 & n^2+1 \\ \hline -n^3 - n & n \\ \hline -n-2 & \\ = & \end{array}$$

$$n - \boxed{\frac{n+2}{n^2+1}}$$

$$|n^2+1| \leq |n+2|$$

oppure $n+2=0$

$n=0$	$1 \leq 2$
$n=1$	$2 \leq 3$
$n=2$	$5 > 4$

per $n \geq 2$ $\quad n^2+1 > n+2$

$n=-1$	$2 > \lvert -1 \rvert$
$n=-2$	$5 > \lvert 0 \rvert$

Lemma $p(x)$ polinomio a coeff. interi
$a, b \in \mathbb{Z}$

$$a-b \mid p(a)-p(b)$$

Dimostrazione $p(x) = \dots + c_k x^k + \dots + c_0$

$$p(a)-p(b) = \dots + c_k \underbrace{(a^k-b^k)}_{\text{e' multiplo di } a-b} + \dots + c_0(1-1)$$

$$a^k-b^k = (a-b)(a^{k-1}+a^{k-2}b+\dots+b^{k-1})$$

Oss Un polinomio non e' una funzione.
MA un polinomio definisce una funzione ("funzione polinomiale")

$p(x)$ $a \in \mathbb{C}$

$p(a)$

III MCD, Algoritmo di Euclide, Teorema di Bézout.

$a(x)$, $b(x)$ polinomi (a coeff. complessi)

$\underset{d(x)}{\text{MCD}(a(x), b(x))}$ = il polinomio monico di grado più alto tra quelli che dividono $a(x)$ e $b(x)$

$$\text{MCD}(\underbrace{x^3-2x^2+3x-6}_{a(x)}, \underbrace{x^3-x^2-3x+2}_{b(x)}) = \underset{2x-4}{x-2}$$

Algoritmo di Euclide

$\to a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$

Il $d(x)$ che sto cercando deve anche dividere $r(x)$!

Non solo!
$\text{MCD}(a(x), b(x)) = \text{MCD}(b(x), r(x))$
$\quad \| $
$\; d(x)$

$$x^3-2x^2+3x-6 = (x^3-x^2-3x+2)\cdot 1 + (-x^2+6x-8)$$

$$\text{MCD}(a(x), b(x)) = \text{MCD}(b(x), -x^2+6x-8)$$

ITERARE QUESTO PROCEDIMENTO!

$b(x) = r(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$

$$\begin{array}{r|l} x^3-x^2-3x+2 & -x^2+6x-8 \\ \cline{2-2} -x^3+6x^2-8x & -x-5 \\ \hline 5x^2-11x+2 & \end{array}$$

$$\frac{-5x^2+30x-40}{19x-38}$$

$$r_3(x) = r_4(x)\cdot q_5(x) + r_5(x)$$

$$r_4(x) = r_5(x)\cdot q_6(x) + \underbrace{r_6(x)}_{d(x)}$$

$$r_5(x) = \underbrace{r_6(x)}_{d(x)}\cdot q_7(x) + \underbrace{r_7(x)}_{0}$$

$$b(x) = r(x)\cdot(-x-5) + (19x-38)$$

$$MCD(\dots) = MCD(r(x),\ 19x-38)$$

$$\dots$$

$$= MCD(\underbrace{\dots}_{d(x)},\ 0) \qquad = x-2$$

<u>Teorema di Bézout</u> $a(x)$, $b(x)$ polinomi (a coeff. complessi)
$d(x) = MCD(a(x), b(x))$.
Allora esistono $h(x)$, $k(x)$ tali che

$$\boxed{d(x) = a(x)\cdot h(x) + b(x)\cdot k(x)}$$

IV TEOREMA DI RUFFINI

$$a(x) = b(x)\cdot q(x) + r(x) \qquad \deg r(x) < \deg b(x)$$

Cosa succede se $b(x) = x-\lambda$ (dove λ è un numero (complesso)) ?

$$a(x) = (x-\lambda)\cdot q(x) + r\cancel{(x)}$$

$\deg r(x) < 1$
$\Rightarrow r(x)$ è costante
(ha grado 0 oppure $-\infty$)

<u>Teorema di Ruffini</u> $r = a(\lambda)$

<u>Def</u> $\lambda \in \mathbb{C}$ è una <u>radice</u> di $a(x)$ se $a(\lambda) = 0$

Conseguenza del T. di R.: λ è radice di $a(x) \iff a(x) = (x-\lambda)\cdot q(x)$

Radici $\longleftrightarrow$ fattori di primo grado nella fattorizzazione del polinomio.

<u>Conseguenza</u>: Un polinomio di grado n ha al massimo n radici.
x^2-4x+4 $\qquad \lambda=2$ è una radice $\qquad x^2-4x+4 = (x-2)^2$ $\qquad \lambda=2$ ha molteplicità 2

V PRINCIPIO DI IDENTITÀ DEI POLINOMI

Teorema Se $p(x)$, $q(x)$ sono polinomi di grado $\leq n$ ed esistono $a_1, a_2, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{C}$ distinti tali che

$$p(a_1) = q(a_1)$$
$$p(a_2) = q(a_2)$$
$$\vdots$$
$$p(a_{n+1}) = q(a_{n+1})$$

allora $p(x) = q(x)$.

Dim $p(x) - q(x) =: s(x)$

Allora $s(a_1) = p(a_1) - q(a_1) = 0$

$s(a_1) = s(a_2) = \dots = s(a_{n+1}) = 0$

$a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ sono radici di $s(x)$.

$\Rightarrow$ $s(x)$ ha (almeno) $n+1$ radici distinte.

$\deg(s(x)) \leq \max(\deg p(x), \deg q(x)) \leq n$

$\Rightarrow$ $s(x) = 0$ (il polinomio nullo!)

$\Rightarrow$ $p(x) = q(x)$.

VI FATTORIZZAZIONE DEI POLINOMI

Def $p(x)$ è irriducibile se non ha divisori di grado ≥ 1 e $< \deg p(x)$.

ATTENZIONE: è rilevante l'insieme dei coefficienti!

Es: $x^2 - 2 = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ RIDUCIBILE non è irriducibile "su $\mathbb{R}$" (e quindi neanche "su $\mathbb{C}$")

IRRIDUCIBILE PERÒ è irriducibile "su $\mathbb{Q}$" (e quindi anche "su $\mathbb{Z}$")

$x^2 + 1$ irriducibile su $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$
riducibile su $\mathbb{C}$ $x^2+1 = (x+i)(x-i)$

Oss: i polinomi di primo grado sono sempre irriducibili.

- POLINOMI A COEFF. COMPLESSI

<u>Teorema fondamentale dell'algebra</u> Ogni polinomio di grado ≥ 1 ha almeno una radice complessa.

<u>Conseguenza</u>: ① nessun polinomio di grado ≥ 2 e' irriducibile!

sara' divisibile per qualche $x-\lambda$

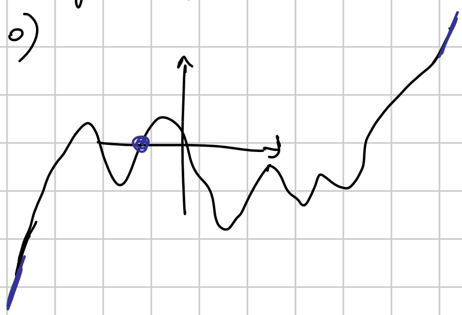
② Ogni polinomio si fattorizza come prodotto di fattori di primo grado.

$$\boxed{p(x) = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)}$$

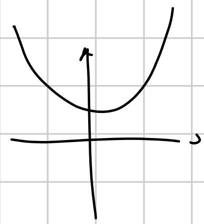
$n = \deg p(x)$

- POLINOMI A COEFF. REALI

<u>Oss</u>: Ogni polinomio di grado dispari ha almeno una radice reale.
(coeff direttivo > 0)



<u>Es</u>: x^2+1 e' irriducibile su $\mathbb{R}$
perche' non ha radici reali



<u>Teorema</u> I polinomi irriducibili (su $\mathbb{R}$) hanno grado ≤ 2.

<u>Es</u>: $x^4+1 = x^4+2x^2+1-2x^2$

$$= (x^2+1)^2 - (\sqrt{2}x)^2 = (x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$$

irriducibili

ax^2+bx+c irriducibile su $\mathbb{R}$
($\Rightarrow$ senza radici reali)

$\Delta < 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\ \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a} \end{cases}$$

$2a$

Le due radici sono complesse coniugate.

Le radici complesse di un polinomio a coeff. reali sono:

- reali $(x-\lambda)$
- (a coppie) complesse coniugate.

- POLINOMI A COEFFICIENTI RAZIONALI

È complicato... Ci sono polinomi irriducibili di grado arbitrariamente alto!

Es: x^3-2 è irriducibile su $\mathbb{Q}$ perché non ha radici razionali

$\mathbb{R}$: $(x-\sqrt[3]{2})(x^2+\sqrt[3]{2}x+\sqrt[3]{4})$

$\mathbb{C}$: $(x-\sqrt[3]{2})\left(x-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)\left(x-\sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right)$

Criterio Se $p(x)$ è un polinomio a coeff. razionali, e $\frac{a}{b}$ è una sua radice razionale, allora

ridotta ai minimi termini

$$p(x) = \frac{c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_0}{d} \qquad c_0, \dots, c_n, d \in \mathbb{Z}$$

$a \mid c_0$ e $b \mid c_n$.

Dim $p\left(\frac{a}{b}\right)=0$

$$c_n\left(\frac{a}{b}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} + \dots + c_0 = 0$$

$$c_n a^n + c_{n-1}a^{n-1}b + \dots + ab^{n-1}c_1 + b^n c_0 = 0$$

deve essere multiplo di a

$\Rightarrow$ c_0 deve essere multiplo di a

c_n deve essere multiplo di b.

- POLINOMI A COEFF. INTERI

Cattiva notizia: è complicato...

Buona notizia: non è peggio che su $\mathbb{Q}$.

<u>Lemma di Gauss</u> Se $p(x)$ è irriducibile su $\mathbb{Z}$, allora è irriducibile anche su $\mathbb{Q}$.

VII RELAZIONI RADICI – COEFFICIENTI

(per polinomi a coeff. complessi)

$$p(x) = a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\cdots(x-\lambda_n)$$

$n = \deg p(x)$

radici + coeff. direttivo a

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

coefficienti

- $a = a_n$
- ... e il resto?

$\boxed{\text{Caso } n=2}$

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \\ &= ax^2 - a\lambda_1 x - a\lambda_2 x + a\lambda_1\lambda_2 \\ &= \underbrace{a}_{a_2} x^2 \underbrace{- a(\lambda_1+\lambda_2)}_{a_1} x + \underbrace{a\lambda_1\lambda_2}_{a_0} \end{aligned}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -\frac{a_1}{a_2}$$

$$\lambda_1\lambda_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

$\boxed{n=3}$

$$\begin{aligned} p(x) &= a(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3) \\ &= \underbrace{a}_{a_3} x^3 \underbrace{- a(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}_{a_2} x^2 + \underbrace{a(\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1)}_{a_1} x \\ &\quad \underbrace{- a\lambda_1\lambda_2\lambda_3}_{a_0} \end{aligned}$$

$\boxed{k=1}$ $$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 = -\frac{a_2}{a_3}$$

$\boxed{k=2}$ $$\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1 = \frac{a_1}{a_3}$$

$\boxed{k=3}$ $$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -\frac{a_0}{a_3}$$

$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$

In generale ... $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

$$\boxed{\text{Somma di tutti i possibili prodotti di } k \text{ radici} = (-1)^k \cdot \frac{a_{n-k}}{a_n}}$$

$k = 1, 2, \dots, n$

Esempio $p(x) = x^3 - 2x^2 + x + 4 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = \dots$?

Somma delle radici: $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = -\frac{a_2}{a_3} = 2$

Prodotto delle radici: $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = -\frac{a_0}{a_3} = -4$

Somma dei quadrati delle radici: $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1)$

$= 2^2 - 2 \cdot 1 = 2.$

Somma dei cubi $\lambda_1^3 + \lambda_2^3 + \lambda_3^3 = \dots$

reciproci $\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \dots$

VIII RADICI DELL'UNITÀ E POLINOMI CICLOTOMICI

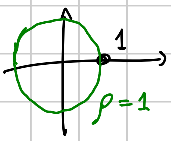
$x^n - 1 = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2) \cdots (x-\lambda_n)$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono radici di $x^n - 1$

λ è radice di $x^n - 1$ se $\boxed{\lambda^n = 1}$

$$\lambda = \underbrace{\rho}_{\text{modulo}} (\cos \underbrace{\theta}_{\text{argomento}} + i \operatorname{sen} \underbrace{\theta}_{\text{argomento}})$$

$\lambda^n = \rho^n (\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)^n = \rho^n (\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$



$= 1 = 1(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0)$

$\rho = 1$ (ρ è un numero reale positivo $\rho^n = 1 \Rightarrow \rho = 1$)

$\boxed{n\theta = 0}$ attenzione! mod 2π

Es: $n = 1 \longrightarrow \theta = 0$

$n = 2 \longrightarrow 2\theta = 0$
- $\theta = 0$
- $\theta = \pi$

$n = 3 \longrightarrow 3\theta = 0$
- $\theta = 0$
- $\theta = \frac{2}{3}\pi$
- $\theta = \frac{4}{3}\pi$

$n\theta = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

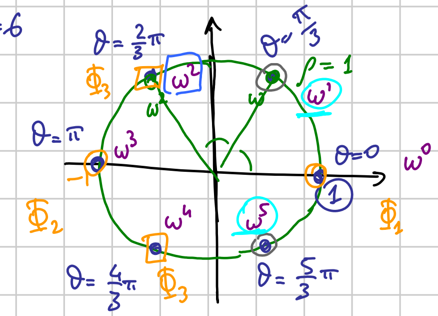
$\Rightarrow \boxed{\theta = \frac{2k\pi}{n}}$

$k = 0 \rightarrow \theta = 0$

$k = n \rightarrow \theta = \frac{2n\pi}{n} = 2\pi = 0$

$k = 0, 1, \dots, n-1$

$n = 6$



$\underline{x^6 - 1}$

Le radici di $x^n - 1$ si dicono radici n-esime dell'unità.

$$x^n - 1 = (x-1)(x-\omega)(x-\omega^2)(x-\omega^3)\cdots(x-\omega^{n-1})$$

Come si fattorizza $\underline{x^n - 1}$ su $\mathbb{Q}$?

$n=1 \qquad \underbrace{x-1} = \Phi_1(x)$

$n=2 \qquad x^2 - 1 = \underbrace{(x-1)}\underbrace{(x+1)}_{\Phi_2(x)} = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x)$

$n=3 \qquad x^3 - 1 = \underbrace{(x-1)}\underbrace{(x^2+x+1)}_{\Phi_3(x)} = \Phi_1(x) \cdot \Phi_3(x)$

$n=4 \qquad x^4 - 1 = \underbrace{(x-1)}_{1}\underbrace{(x+1)}_{-1}\underbrace{(x^2+1)}_{\Phi_4(x)} = \Phi_1(x) \cdot \Phi_2(x) \cdot \Phi_4(x)$

1 radice 1-esima dell'unità

-1 radice quadrata dell'unità

$i \quad -i$ radici quarte dell'unità

radici quarte dell'unità

$\Phi_n(x) =$ il polinomio monico avente come radici le radici n-esime dell'unità "non incontrate in precedenza"

"primitive"

$$x^n - 1 = \prod_{d|n} \Phi_d(x)$$

$n=6$

$$x^6 - 1 = \underset{(x-1)}{\Phi_1(x)} \cdot \underset{(x+1)}{\Phi_2(x)} \cdot \underset{(x^2+x+1)}{\Phi_3(x)} \cdot \underset{(x^2-x+1)}{\Phi_6(x)}$$

$\Phi_n(x)$ si chiamano "polinomi ciclotomici"

Oss: $\deg \Phi_n(x) = \varphi(n)$

Teorema $\Phi_n(x)$ e' irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Es: $\Phi_8(x) = x^4 + 1$ e' irriducibile su $\mathbb{Q}$.

Le radici n-esime sono le potenze di una qualsiasi radice n-esima primitiva.

$$\omega = \cos \frac{2\pi}{n} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{n}$$

$$\omega^0 = 1, \ \omega, \ \omega^2, \ \omega^3, \ldots, \omega^{n-1}.$$

ESERCIZI DI BASE: (pag 14) 68, 71, 72, 73, 74, 75, 77, 80.

PROBLEMI SESSIONE A1: (pag 26) 3, 8, 10, 11.

Hint per 77: Considerate $q(x) = p(x+1) - p(x)$. Cosa si può dire su $q(x)$?

Es. 77 $p(x)$ polinomio t.c. $p(n) = 1^5 + 2^5 + \ldots + n^5$
$p(-1) = ?$ $p(-n)?$

Fatto: Esiste un polinomio $p(x)$ di grado ~~6~~ $k+1$ t.c.
$p(n) = 1^k + 2^k + \ldots + n^k$

$k=1$ $\quad 1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

$k=2$ $\quad 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$p(n) = a_6 n^6 + a_5 n^5 + a_4 n^4 + a_3 n^3 + \ldots$$

$$(n+1)^5 = p(n+1) - p(n) = a_6\left((n+1)^6 - n^6\right) + a_5\left((n+1)^5 - n^5\right) + \ldots$$

$p(x+1) - p(x) = (x+1)^5$ è vera per $x = 0, 1, 2, 3, \dots$

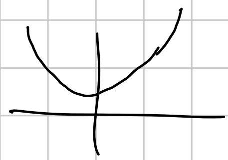
$\Rightarrow$ per il principio di identità dei polinomi, è vera come polinomi.

$\Rightarrow$ è vera anche per $x = -1, -2, -3, \dots$

$x=-1 \qquad p(0) - p(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(-1) = 0$

$x=-2 \qquad p(-1) - p(-2) = -1^5 = -1 \quad \Rightarrow \quad p(-2) = 0 + 1 = 1$

$$p(-n) = p(n-1)$$



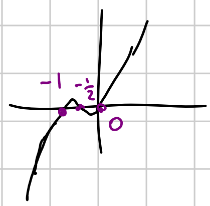
$p(x+1) - p(x) = (x+1)^4$

$p(0) - p(-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad p(-1) = 0$

$p(-1) - p(-2) = 1 \quad \Rightarrow \quad p(-2) = -1$

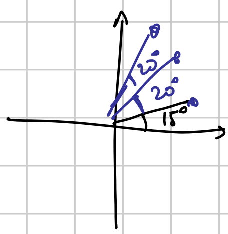
$\vdots$

$$p(-n) = -p(n-1)$$



BONUS: $p\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$ (potenze pari)

PROBLEMA 3 $\qquad \cos 15° + \cos 35° + \dots + \cos 355°$

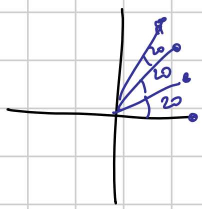


$$\cos\theta = \mathrm{Re}\left(\begin{array}{c}\text{numero complesso}\\ \text{di argomento } \theta\end{array}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right)$$

$e^{i\theta}$

$$\rightarrow \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{15}{360}\cdot 2\pi} + e^{i\frac{35}{360}\cdot 2\pi} + \dots + e^{i\frac{355}{360}\cdot 2\pi}\right)$$

$$= \mathrm{Re}\left(e^{i\frac{15}{360}\cdot 2\pi}\Big(\underbrace{1 + e^{i\frac{20}{360}2\pi} + e^{i\frac{40}{360}2\pi} + \dots + e^{i\frac{340}{360}2\pi}}_{0}\Big)\right)$$



$1 = e^{i\frac{0}{360}2\pi}$

Radici 18-esime dell'unità

PROBLEMA 8

$\underbrace{p(0)=2,\quad p(1)=4,\quad p(2)=6}$, $\boxed{p(3)=56.}$

$\overline{p}(x) = 2x+2$

$p(x) - \underset{2x+2}{\overline{p}(x)}$ = un polinomio che si annulla in $0, 1, 2$

$= x(x-1)(x-2)\cdot q(x)$ può essere qualsiasi polinomio

$$\boxed{p(x) = 2x+2 + x(x-1)(x-2)\cdot q(x)}$$

Resto della divisione per $x(x-1)(x-2)$: $2x+2$.

$x=3$

$56 = p(3) = 8 + 3\cdot 2\cdot 1\cdot q(3)$

$\Rightarrow\quad 6q(3) = 48$

$\Rightarrow\quad q(3) = 8$

$q(x) = (x-3)\,r(x) + 8$

$$\Rightarrow \boxed{p(x) = \underline{2x+2+8x(x-1)(x-2)} + x(x-1)(x-2)(x-3)\cdot r(x)}$$

PROBLEMA 10

$p(0), p(13)$ dispari $\qquad p(\lambda)=0$?

$p(n)$ è sempre dispari per ogni intero n

$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$

- $p(0)$ dispari $\Rightarrow$ a_0 dispari $\qquad a_0 \equiv 1\ (2)$
- $p(13)$ dispari $\Rightarrow$ $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ dispari

$x = 13 \equiv 1\ (2)$

$p(n)$ n pari: $x=n$, $x=0$ $\quad n\equiv 0\ (2) \longrightarrow p(n)\equiv p(0)\equiv 1\ (2)$

n dispari: $n\equiv 13\ (2) \longrightarrow p(n)\equiv p(13)\equiv 1\ (2)$

PROBLEMA 11

Per induzione.

dati $\lambda_1, \dots, \lambda_{k+1}$ numeri complessi distinti

Obiettivo: $P_{2002}(\lambda_i) = 0$ per ogni i

esistono $a_1, \dots, a_k$ tali che

$$P_k(\lambda_1) = \pm P_k(\lambda_2) = \pm P_k(\lambda_3) = \dots = \pm P_k(\lambda_{k+1})$$

$$P_{n+1}(z) = P_n(z)^2 - a_n$$

$$P_1(z) = z - a_1 \qquad \lambda_1 - a_1 = \pm(\lambda_2 - a_1)$$

$$\lambda_1 - a_1 = -\lambda_2 + a_1 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$$

$$P_2(z) = P_1(z)^2 - a_2 \qquad P_2(\lambda_1) = P_2(\lambda_2)$$

$$P_1(\lambda_1)^2 - a_2 = \pm(P_1(\lambda_3)^2 - a_2)$$

$$a_2 = \frac{P_1(\lambda_1)^2 + P_1(\lambda_3)^2}{2}$$

$$P_3(z) = \dots \qquad P_3(\lambda_1) = P_3(\lambda_2) = P_3(\lambda_3)$$

$$\dots$$

$$P_{2001}(\lambda_1) = \pm P_{2001}(\lambda_2) = \dots = \pm P_{2001}(\lambda_{2002})$$

$$P_{2002}(z) = P_{2001}(z)^2 - a_{2002}$$

$$a_{2002} = P_{2001}(\lambda_1)^2$$

Senior 2017 - A2 Basic Aner

Note Title 9/6/2017

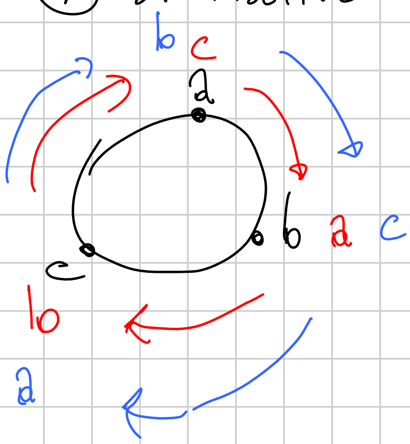
① $\boxed{a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca}$ a, b, c numeri reali

② (Nesbitt) $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ a, b, c reali positivi

③ $\frac{1}{a+b+1}+\frac{1}{b+c+1}+\frac{1}{c+a+1} \leq 1$ a, b, c reali positivi $abc=1$

Notazione Somme cicliche, somme simmetriche

① Si riscrive come $\boxed{\sum_{cyc} a^2 \geq \sum_{cyc} ab}$ a, b, c numeri reali



$$\sum_{cyc} a^2 = a^2 + c^2 + b^2$$

$$\sum_{cyc} ab = ab + ca + bc$$

$$\sum_{cyc} a^2b = a^2b + c^2a + b^2c$$

a, b, c, d reali $\sum_{cyc} ab = ab+bc+cd+da \left(=(a+c)(b+d)\right)$

a, b, c reali

$$\sum_{sym} ab^2c^3 = ab^2c^3 + ac^2b^3 + ba^2c^3 + ba^3c^2 + ca^2b^3 + ca^3b^2$$

$$\sum_{cyc} ab^2c^3 = ab^2c^3 + bc^2a^3 + ca^2b^3$$

$$\sum_{sym} ab = ab + ba + ac + ca + bc + cb = 2\sum_{cyc} ab$$

(1) $a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{2}\left(a^2+a^2+b^2+b^2+c^2+c^2\right) = \frac{1}{2}\sum_{sym} a^2$

a,b,c,d reali $\quad \sum_{sym} a = 6a+6b+6c+6d$

Disuguaglianza base: $x^2 \geq 0$; più in generale se ho un'espressione e la riesco a scrivere come somma di quadrati, allora è ≥ 0

S.O.S. "sum of squares"

(1) a,b,c reali $\quad \sum_{cyc}(a-b)^2 \geq 0$

$$0 \leq \sum_{cyc}(a-b)^2 = \sum_{cyc}\left(a^2-2ab+b^2\right) = \sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} ab + \sum_{cyc} a^2 =$$

$$= 2\left(\sum_{cyc} a^2 - \sum_{cyc} ab\right)$$

Riarrangiamento $\quad a,\alpha,b,\beta$ numeri reali

Sappiamo che $a \geq \alpha$, $b \geq \beta$. Allora $a-\alpha \geq 0$

$b-\beta \geq 0$, e quindi $(a-\alpha)(b-\beta) \geq 0$

$ab + \alpha\beta - \alpha b - a\beta \geq 0$; $\quad ab + \alpha\beta \geq \alpha b + a\beta$

In generale $n \geq 2$, $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ numeri reali

$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \dots \le x_n \qquad y_1 \le y_2 \le \dots \le y_n$

Scegliamo una permutazione σ su $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \overset{2}{\le} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_{\sigma(i)} \overset{1}{\le} \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$$

Se (1) allora (2)

Uso (1) con $x_1 \le \dots \le x_n \quad -y_n \le -y_{n-1} \le \dots \le -y_1$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (-y_{\sigma(i)}) \le \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (-y_{n+1-i})$$

Dim di (1): $x_1 \cdot y_{\sigma(1)} + x_2 \cdot y_{\sigma(2)} + \dots + x_n y_{\sigma(n)}$

Se σ non è l'identità, esistono i, j tra 1 e n

con $i < j$ ma $\sigma(i) > \sigma(j)$

$$x_1 y_{\sigma(1)} + \dots + x_i \cdot y_{\sigma(i)} + \dots + x_j y_{\sigma(j)} + \dots + x_n y_{\sigma(n)}$$

Adesso sostituisco a $x_i y_{\sigma(i)} + x_j y_{\sigma(j)}$ la quantità

$\boxed{x_i y_{\sigma(j)} + x_j y_{\sigma(i)}}$. $\quad x_i \le x_j \qquad y_{\sigma(j)} \le y_{\sigma(i)}$

più grande (debolmente)

Con questo metodo, anche se il numero reale $\sum x_i y_{\sigma(i)}$ rimane uguale (non aumenta), la permutazione σ "si avvicina" all'identità...

---

(1) a, b, c reali $\qquad a^2 + b^2 + c^2 \ge ab + bc + ca$

wlog "without loss of generality"

assumiamo $a \geqslant b \geqslant c$ $\qquad x_1 = y_1 = c \quad x_2 = y_2 = b$

$x_3 = y_3 = a$

$$\overset{x_3y_3}{aa} + \overset{x_2y_2}{bb} + \overset{x_1y_1}{cc} \geqslant \overset{x_3y_2}{ab} + \overset{x_2y_1}{bc} + \overset{x_1y_3}{ca}$$

---

(2) a, b, c reali positivi $\qquad \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \frac{3}{2}$

wlog $a \geqslant b \geqslant c$ $\qquad x_3 = a \quad x_2 = b \quad x_1 = c$

$$\underset{y_3}{\frac{1}{b+c}} \geqslant \underset{y_2}{\frac{1}{c+a}} \geqslant \underset{y_1}{\frac{1}{a+b}} \qquad \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

Così riusciamo a dim. che

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{a}{c+a} + \frac{b}{a+b} + \frac{c}{b+c}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{c}{c+a} + \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c}$$

Sommiamo membro a membro

$$2 \sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geqslant \sum_{cyc} \left(\frac{a}{c+a} + \frac{c}{c+a} \right) = 3$$

Disuguaglianza di Tchebyschev

Se $x_1 \leq \ldots \leq x_n$ e $y_1 \leq \ldots \leq y_n$, allora

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} y_j \right) \leq n \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i \right)$$

DIM

	x_1	x_2	x_3	x_4
y_1	$x_1 y_1$	$x_2 y_1$		
y_2		$x_2 y_2$	$x_3 y_2$	
y_3			$x_3 y_3$	$x_4 y_3$
y_4	$x_1 y_4$			$x_4 y_4$

Ogni diagonale è "battuta" da una delle n copie di $\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ a destra

---

Cauchy-Schwarz. $x_1, \dots x_n$ $y_1, \dots y_n$ numeri reali

Allora $$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

DIM Introduciamo t e consideriamo

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot t - y_i)^2 \geq 0$$

$$\parallel$$

$$\left(\sum x_i^2\right) \cdot t^2 - 2\left(\sum x_i \cdot y_i\right) t + \left(\sum y_i^2\right) \geq 0$$

Il Δ del polinomio deve essere ≤ 0

Scrivete Δ ...

Medie e disuguaglianze tra medie.

Siano $x_1, x_2, \dots x_n$ numeri reali positivi

$$AM(x_1 \dots x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

$$GM(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n) = \sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n}$$

$$QM(x_1, \dots x_n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}}$$

$$HM(x_1 \dots x_n) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}}{n}\right)^{-1}$$

Teo $HM \leq GM \leq AM \leq QM$

Esempio $AM \leq QM$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \overset{?}{\leq} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n}} \iff \left(\frac{\sum x_i}{n}\right)^2 \overset{?}{\leq} \frac{\sum x_i^2}{n}$$

$$\iff \frac{(\sum x_i)^2}{n} \overset{?}{\leq} \sum x_i^2 \iff (\sum x_i)^2 \overset{*}{\leq} n \cdot \sum x_i^2$$

$*$ vale per C.S. $x_1 .. x_n$ qualsiasi, $y_1 \dots y_n = 1$

vale per Tcheb. $x_1 = y_1 \dots x_n = y_n$, wlog ordinati

Esempio $HM \leq AM$ $\left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n}\right)^{-1} \overset{?}{\leq} \frac{\sum x_i}{n} \iff$

$$1 \overset{?}{\leq} \left(\frac{\sum x_i}{n}\right) \cdot \left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n}\right) \iff n^2 \overset{*}{\leq} (\sum x_i)\left(\sum \frac{1}{x_i}\right)$$

$*$ vale per C.S. $\left(\sum (\sqrt{x_i})^2\right)\left(\sum \sqrt{\frac{1}{x_i}}^{\,2}\right) \overset{CS}{\geq} \left(\sum 1\right)^2$

// per Tcheb. $y_i = \frac{1}{x_i}$ (occhio che allora gli y_i sono ordinati al contrario, ma è ciò che serve!)

Esercizio $\sum_{sym} a^3 \geq \sum_{sym} a^2 b$ $\quad 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 \geq a^2 b + ab^2 + b^2 c + bc^2 + c^2 a + ca^2$

$a, b, c \geq 0$ Voglio sconfiggere $a^2 b$ usando alcuni termini a sinistra. c^3 è meglio non usarlo!

Usare AM-GM, ma come?

Idea dal pubblico: wlog $a \geq b \geq c$ $\quad \frac{a^3+b^3}{2} \geq \sqrt{a^3b^3} \geq \sqrt{a^2b^4} = ab^2$

Proviamo $a^2 b = \sqrt[3]{a^6 b^3} \leq \frac{a^3+a^3+b^3}{3}$ per AM-GM

(non ho usato il wlog)

Altra idea: $a^3+b^3 \geq a^2b + ab^2$ per riarrangiamento

$(a^2, b^2) \quad (a, b)$

Esercizi

(1) Lemma di Titu $\quad x_1 \dots x_n \quad y_1 \dots y_n > 0$

$$\sum \frac{x_i^2}{y_i} \geq \frac{\left(\sum x_i\right)^2}{\sum y_i}$$

(2) $x_1 \dots x_n > 0 \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \leadsto \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} \geq n^2$

(3) $x, y, z > 0 \quad x+y+z = 1 \quad \max x^5 y z$

(4) A2-10 Trovare le migliori costanti C_1 e C_2

t.c. $\quad C_1 \leq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c} + \frac{c}{c+a} \leq C_2 \quad (a, b, c > 0)$

(5) BMO 14/1 $\quad x, y, z > 0 \quad \sum_{cyc} xy = 3xyz$

$\leadsto \sum_{cyc} x^2 y \geq 2 \sum_{cyc} x - 3$

(1) $\left(\sum y_i\right) \cdot \left(\sum \frac{x_i^2}{y_i}\right) \overset{?}{\geq} \left(\sum x_i\right)^2 \quad \begin{matrix} x_1 \dots x_n \\ y_1 \dots y_n \end{matrix} > 0$

Cauchy Schwarz su $\quad \sqrt{y_1}, \sqrt{y_2}, \dots \sqrt{y_n}$

$\frac{x_1}{\sqrt{y_1}}, \dots \frac{x_n}{\sqrt{y_n}}$

(2) $\sum x_i = 1 \rightsquigarrow \sum \frac{1}{x_i} \geq n^2$

AM-HM sugli x_i $\quad \frac{\sum x_i}{n} \geq \left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n} \right)^{-1}$

$$\left(\frac{\sum \frac{1}{x_i}}{n} \right) \cdot \frac{\overset{1}{\sum x_i}}{n} \geq 1$$

(3) $x+y+z=1 \qquad \max \; x^5 \cdot y \cdot z$

<u>oss</u> Se l'ipotesi Fosse $5x+y+z=1$ sarei Felice!

AM-GM su x,x,x,x,x,y,z :

$$\frac{1}{7} = \frac{5x+y+z}{7} \geq \sqrt[7]{x^5 y z}$$

Riscrivo: $x+y+z = 5\left(\frac{1}{5}x\right) + y + z$

AM-GM su $\frac{1}{5}x, \frac{1}{5}x, \frac{1}{5}x, \frac{1}{5}x, \frac{1}{5}x, y, z$

$$\frac{1}{7} = \frac{x+y+z}{7} = \frac{5\left(\frac{1}{5}x\right)+y+z}{7} \geq \sqrt[7]{\left(\frac{1}{5}x\right)^5 \cdot y \cdot z}$$

$$\left(\frac{1}{7}\right)^7 \geq \frac{x^5 \cdot y \cdot z}{5^5} \qquad x^5 y z \leq \frac{5^5}{7^7}$$

Massimo ottenuto per $\quad x+y+z=1 \;$ e $\; \frac{1}{5}x = y = z$

$$x = \frac{5}{7} \qquad y = z = \frac{1}{7}$$

(4) $a,b,c>0$ studiare $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{a}{a+b}$

OSS 1 Se $a >> b$, già solo $\frac{a}{a+b}$ è quasi 1

Se poi $b >> c$, anche $\frac{b}{b+c}$ è quasi 1

$\frac{c}{c+a}$ sarà minuscolo, però è >0

$\sum_{cyc} \frac{a}{a+b}$ può diventare più grande di ogni $z<2$

$\leadsto c_2 \geq 2$

OSS 2 L'espressione non è simmetrica.

Simmetrizziamola!

$$\left(\sum_{cyc} \frac{a}{a+b}\right) + \left(\sum_{cyc} \frac{b}{a+b}\right) = 3 \leftarrow \text{numero costante}$$

$\leadsto c_1 + c_2 = 3$

OSS 3 $\sum \frac{a}{a+b} > 1$: infatti

$-\sum \frac{a}{a+b} > \sum \frac{a}{a+b+c} = 1$

$$\underset{\sim 0}{\frac{a}{a+b}} + \underset{\sim 0}{\frac{b}{b+c}} + \underset{\sim 1}{\frac{c}{c+a}}$$

$a << b \qquad b << c$

$c_1 = 1 \qquad c_2 = 2$

---

oppure

wlog a è il più grande

$\frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+c}$ è già $\geq \frac{a}{a+b} + \frac{b}{b+a} = 1$

(5) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=3$ usiamo i numeri $a=\frac{1}{x}$ $b=\frac{1}{y}$ $c=\frac{1}{z}$

Riscriviamo

$$\sum_{cyc} x^2y + 3 \overset{?}{\geq} 2\sum_{cyc} x$$

$$\sum_{cyc} \frac{1}{a^2b} + 3 \geq 2\sum_{cyc} \frac{1}{a}$$ molt. per il den. comune

$$\sum_{cyc} b\cdot c^2 + 3a^2b^2c^2 \geq 2\sum_{cyc} ab^2c^2 \qquad (a+b+c=3)$$

$$\sum_{cyc} bc^2 + \sum_{cyc} a^3b^2c^2 \geq 2\sum_{cyc} ab^2c^2$$

uso AM-GM

$$bc^2+a^2b^3c^2 \geq 2\cdot\sqrt{a^2b^4c^4} = 2\cdot ab^2c^2$$

e cicliche

ALGEBRA 3

Note Title 9/8/2017

Kirill Kuzmin

Funzioni e successioni

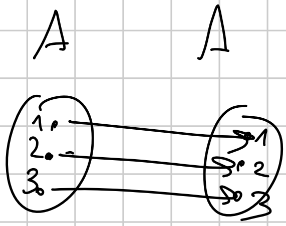
Insieme di partenza

Insieme di arrivo

Ad ogni elemento dell'insieme di partenza associa un unico elemento dell'insieme di arrivo

Esempio $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

partenza arrivo



$f(x) = x$

costanti: ad ogni elemento in partenza associo ~~lo~~ uno stesso elemento in arrivo

– funzioni polinomiali

$x \mapsto p(x)$

su $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, etc

funzioni polinomiali coincidono in infiniti punti, allora il poli è lo stesso

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ $\left.\begin{matrix} x \\ x^p \end{matrix}\right] \to$ diversi polinomi, stessa funzione

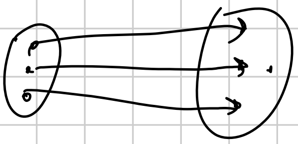
Attenzione: Esistono funzioni molto brutte

$f : \{1, \dots n\} \to A$ $\quad f : \mathbb{N} \to A$

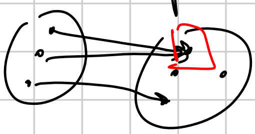
$i \longmapsto a_i$ $\quad i \longmapsto a_i$

Iniettività, suriettività, biiettività

$f : A \to B$ è iniettiva „se ogni elemento di B è raggiunto al più una volta"



OK



NO

Equivalentemente: Se $f(a) = f(b)$, allora $a = b$

Suriettività: $f : A \to B$ suriettiva se tutti gli elementi sono raggiunti.

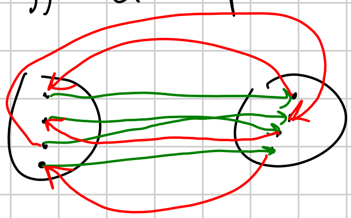
Biiettiva: Suriettiva e iniettiva

Invertibile: $f : A \to B$ invertibile se $\exists g : B \to A$

$f(g(b)) = b$ per ogni b in B

$g(f(a)) = a$ per ogni a in A

Una g così si chiama „inversa"



$f_1 : A \to B \quad f_2 : B \to C$

$f_2 \circ f_1 : A \to C$

$a \longmapsto f_2(f_1(a))$

Se $f \circ g$ è iniettiva, g è iniettiva

Se $f \circ g$ è suriettiva, f è suriettiva

$$\bigcirc \xrightarrow{g} \bigcirc \xrightarrow{f} \bigcirc$$

NON SONO VERI I VICEVERSA!!!

Monotonia

Debolmente crescente | non decrescente

se $a \geq b$ implica $f(a) \geq f(b)$

Strettamente crescente

$a > b$ implica $f(a) > f(b)$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f(x) = x^3$ strettamente crescente

$x \mapsto \lfloor x \rfloor$ debolmente crescente, non strettamente

Debolmente decrescente | non ~~de~~crescente

se $a \geq b$ implica $f(a) \cancel{\geq} \leq f(b)$

Strettamente decrescente

$a > b$ implica $f(a) \cancel{>} < f(b)$

Monotona: una delle 4 di sopra

Strettamente monotona: è iniettiva

Funzione periodica $\exists T\ f(x+T) = f(x)$ ← periodo

Esempio: parte frazionaria (periodo 1)

Rispetto alla composizione

Monotonia: vale la regola dei segni

Se g periodica, $f \circ g$ è periodica

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$$

Costantemente 0 : $0 = 0 + 0$ ok

Identità : ok : $f(x+y) = x+y$

$f(x) + f(y) = x + y$ ok

$f(x) = ax$ a razionale fissato ok

Poniamo $x=0,\ y=0$

$$f(0+0) = \cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + f(0) \qquad f(0) = 0$$

$f(2) = 2f(1)$ $x=1$ $y=1$

$f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1)$ $x=2$ $y=1$

$\phantom{f(3) = {}} 2f(1)$

$f(n) = nf(1)$ per induzione

n intero positivo

$f(nm) = nf(m)$ per induzione

$n \neq 0$ intero $m = \frac{1}{n}$ $f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right)$ $f\left(\frac{1}{n}\right) = f(1)\frac{1}{n}$

Razionali positivi $f(q) = qf(1)$

dispari

$x = a$

$y = -a$ $\underbrace{f(a-a)}_{0} = f(a) + f(-a)$ $\boxed{f(a) = -f(-a)}$

$\boxed{f(t) = f(-t)}$

pari

$\boxed{f(q) = qf(1)}$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

c'è $f(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, ma ce ne sono altre, non si scrivono esplicitamente

f monotona in un intervallo

f limitata in un intervallo ($\exists\, M$ t.c. $f(x) \leq M$)

Allora c'è solo

f continua in almeno un punto

$f(x + f(y)) = f(x) + y$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotona

$x = 0$ $\quad f(f(y)) = \underbrace{\boxed{f(0) + y}}_{\text{biiettiva}} = y$

$\downarrow$

f è biiettiva

Sia z t.c. $f(z) = 0$ ($\exists$ per suriettività)

$y = z$ $\quad \cancel{f(x)} = \cancel{f(x)} + z$ $\quad z = 0$

t reale qualunque

$y = f(t)$ $\quad f(x+t) = f(x) + f(t)$ $\quad \forall x, t \in \mathbb{R}$

Soluzione $f(x) = ax$

$a(x + ay) = ax + y$ $\quad a^2 y = y$ $\quad \forall y \in \mathbb{R}$

$a = \pm 1$

$f(x) = x$ $\quad\quad f(x) = -x$

$a_0, a_1, a_2, \ldots$

Progressioni aritmetiche: $a_{n+1} - a_n$ è costante

„Ragione"

Progressione geometrica $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ costante

ragione

$a_0, \; a_0+d, \; a_0+2d, \; a_0+3d$ progr aritmetica

$a_0, \; a_0 \cdot r, \; a_0 \cdot r^2, \ldots$ progr geometrica

$a_n = a_0 + nd$

Successioni definite per ricorrenza

Sono dati i primi k elementi $a_0, \ldots a_{k-1}$

Un modo per ricavare a_{n+k} in funzione dei precedenti $a_{n+k} = f(a_{n+k-1}, \ldots, a_n, n)$

Esempio $a_0 = 1$ $\quad a_{n+1} = (n+1) a_n$

$a_n = n!$

$$a_{n+k} = c_{k-1} a_{n+k-1} + \ldots + c_0 a_n$$

Successioni per ricorrenza lineari

$$a_n = \lambda^n$$

$$\lambda^{n+k} = c_{k-1} \lambda^{n+k-1} + \ldots + c_0 \lambda^n$$

$$\lambda^k - c_{k-1} \lambda^{k-1} - \ldots - c_0 = 0$$

λ deve essere radice di)

Se a_n, b_n rispettano, allora anche $(a_n + b_n)$ rispetta
a_n rispetta, allora $d \cdot a_n$ rispetta

Soluzioni di base: Siano $\lambda_1, \dots \lambda_k$ le radici di $t^k - c_{k-1} t^{k-1} - \dots - c_0$

Se sono tutte distinte, soluzioni di base

$$a_n = \lambda_1^n$$
$$\vdots$$
$$\lambda_k^n$$

Se λ_i ha molteplicità h

$$\boxed{\lambda_i^n} \quad \boxed{n\lambda_i^n} \quad \dots \quad \boxed{n^{h-1}\lambda_i^n}$$

Soluzione generica: combinazione lineare soluzioni di base $d_1\lambda_1^n + d_2\lambda_2^n + \dots + d_k\lambda_k^n$

$$a_0 = 19 \qquad a_1 = 25 \qquad a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$$

$$t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2 = 0$$

$$1^n \quad n1^n \qquad d_1 + d_2 n \qquad d_1 = 19 \quad a_n = 19 + 6n$$
$$d_2 = 6$$

$$\boxed{a_{n+2} - a_{n+1}} = \boxed{a_{n+1} - a_n}$$

$$F_0 = 0 \quad F_1 = 1 \qquad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

$$t^2 - t - 1 = 0 \qquad \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F_n = d_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + d_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

$$F_0 = 0 = d_1 + d_2$$

$$F_1 = 1 = d_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + d_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$\begin{cases} a_{n+1} = x a_n + y b_n \\ b_{n+1} = z a_n + w b_n \end{cases} \qquad a_n = x a_{n-1} + y b_{n-1}$$

$$a_{n+1} = x a_n + y b_n = x a_n + y(z a_{n-1} + w b_{n-1})$$

$$b_{n-1} = \frac{a_n - x a_{n-1}}{y}$$

SOLUZIONI

$f(f(x)) = x$ $\qquad$ $f \circ f$ biiettiva

f biiettiva

$f(x+y) + f(x-y) = f(x) + f(y)$ $\qquad$ $f \equiv 0$

$2a$, $3a$, $5a$, $7a$ sono risolte da $f \equiv 0$

$f(x^2) = x^2$ $\qquad$ $f(t) = t$ MA solo per t positivi

Sui negativi non si sa nulla, Né inj né sur

$$f(xf(y)+f(x)) = 2f(x)+xy$$

$x=0$ NULLA di utile $f(f(0)) = 2f(0)$

$x=1$ $\quad f(f(y)+f(1)) = 2f(1)+y$

$$\underbrace{y \longmapsto f(y) \longmapsto f(y)+f(1) \longmapsto f(f(y)+f(1))}_{\text{biiettiva}}$$

$$\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \xrightarrow{+f(1)} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

INIETTIVA

INIETTIVA

SURIETTIVA

95

$$b_{n+1} = (n+1)b_n - nb_{n-1}$$

$$b_{n+1} - b_n = nb_n - nb_{n-1} = n(b_n - b_{n-1})$$

Dopo b_k, $b_{n+1}-b_n$ sarà multiplo di k

$\boxed{6}$ $x_0 = 1$ $\qquad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 6x_{n+1} - 2\sum_{i=0}^{n+1} x_i - 6x_n + 2\sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$= 6x_{n+1} - 2x_{n+1} - 6x_n = 4x_{n+1} - 6x_n$$

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$

$$t^2 - 5t + 6 = (t-3)(t-2)$$

$$x_n = a3^n + b2^n \qquad x_0 = 1$$
$$x_1 = 4 = 6x_0 - 2x_0$$

$$1 = a + b$$
$$4 = 3a + 2b \qquad a = 2 \quad b = -1$$

$$\boxed{x_n = 2\cdot 3^n - 2^n}$$

7

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n \qquad a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + b\boxed{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}$$

Voglio polinomio
a coefficienti interi
con radici $(1+\sqrt{2})$ e qualcosa di collegato
<1 in valore assoluto es, $(1-\sqrt{2})$

$$t^2 - 2t - 1$$
$$(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$$
$$(1+\sqrt{2}) + (1-\sqrt{2})$$

$$\boxed{x_{n+2} = 2x_{n+1} + x_n \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 1}$$

$$\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{2})^n - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{4}(1-\sqrt{2})^n}_{\substack{<0 \ \ n \text{ pari} \\ >0 \ \ n \text{ dispari}}} \quad \text{Risolve}$$

$$\lfloor \cdots \rfloor = \begin{cases} x_n & n \text{ pari} \\ x_n - 1 & n \text{ dispari} \end{cases}$$

Modulo 7 $\quad m_0 \equiv 0 \quad m_1 \equiv 1 \qquad m_{n+2} \equiv 2m_{n+1} + m_n$

$t^2 - 2t - 1$ "$1+\sqrt{2}$" "$1-\sqrt{2}$" $\sqrt{2}$ è 3 o 4

le due radici modulo 7 sono $\boxed{4 \text{ e } 5}$

$$m_n \equiv \frac{3}{4}4^n - \frac{3}{4}5^n \equiv 6\cdot 4^n - 6\cdot 5^n \mod 7$$

$$m_n \equiv x_n \pmod 7$$

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + 2f(y)$$

ax^2

$$a(x+y)^2 + a(x-y)^2 = 2ax^2 + 2ay^2$$

$x=y=0$ $f(0)=0$

$x=y=t$ $f(2t)+0 = 4f(t)$

$$f(2t+t) + f(t) = 2\underbrace{f(2t)}_{4f(t)} + 2f(t)$$

$$f(3t) = 9f(t)$$

$f(nt) = n^2 f(t)$ per induzione

$x=0$ $f(y)+f(-y) = 2f(y)$ $f(-y)=f(y)$

f è pari

$f(n) = n^2 f(1)$ $f(1) = f\left(n\frac{1}{n}\right) = n^2 f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}f(1)$ $f(q) = q^2 f(1)$

t

IMO 2014 - A1

$0 < a_0 < a_1 < a_2$ - - - INTERI

Esiste esattamente un n per cui

$$a_n < \frac{a_0 + \dots + a_n}{n} \leq a_{n+1}$$

$$n a_n \quad a_0 + \dots + a_n \quad n a_{n+1}$$

$$\boxed{a_0 + \dots + a_n - n a_n} > 0$$

$$a_0 + \dots + a_n - n a_{n+1} \leq 0$$

$$\boxed{a_0 + \dots + a_n + a_{n+1} - (n+1) a_{n+1}} \leq 0$$

$$d_n = a_0 + \dots + a_n - n a_n$$

Devo trovare $\underbrace{d_n > 0 \geq d_{n+1}}_{\text{anche questi sono interi}}$

$$d_1 = a_0 + a_1 - a_1 = a_0 > 0$$

$$d_{n+1} - d_n = \cancel{a_0 + \dots} + a_{n+1} - (n+1) a_{n+1} - (\cancel{a_0 + \dots + a_n}) + n a_n =$$

$$= n a_n - n a_{n+1} = n \underbrace{(a_n - a_{n+1})}_{< 0}$$

d_n è decrescente, quindi scende sotto 0, ok

~~per a_n reali NO~~

$$a_n = 2 - \frac{1}{2^n}$$

$$f(xf(x) + f(y)) = (f(x))^2 + y$$

$x = 0$ $\quad f(f(y)) = f(0)^2 + y \quad$ f biiettiva

Chiamo z t.c. $f(z) = 0$; pongo $x = z$

$$\boxed{f(f(y)) = y} \qquad f(0)^2 = 0 \qquad f(0)=0$$

$y=0$ $\quad f(x f(x)) = f(x)^2$

$x = f(t)$ $\quad f(f(t)\, f(f(t))) = f(f(t))^2$

t reale qualunque $\quad f(t f(t)) = t^2$

$f(x)^2 = x^2 \qquad \boxed{f(x) = \pm x}$

$f(x)=x \quad f(x)=-x$ sono soluzioni

$\exists\ a,b \neq 0$ t.c. $f(a)=a \quad f(b)=-b$

$y=a \quad x=b \quad f(-b^2+a) = b^2+a$

$-b^2+a = b^2+a$

$2b^2=0$ NO

$b^2-a = b^2+a \quad 2a=0$ NO

C1 - BASIC Delfador
Note Title 9/4/2017

CONTEGGI

- Regola della somma

  Divido in due casi disgiunti e sommo

  ⚠ disgiunti

  $\#(A \cup B) = \#A + \#B \qquad A \cap B = \emptyset$

- Regola del prodotto

  Se devo compiere due scelte indipendenti con n e m alternative, in tutto ho $n \cdot m$ possibilità

  ⚠ indipendenti

  $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$

- \# sottoinsiemi di A $\qquad \#A = n \qquad \#B = m$

$$A = \{ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$$
$$2 \times 2 \times 2 \dots = 2^n$$

- \# funzioni da A a B

$$m \times m \times m \dots = m^n$$
$$A = \{ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$$
$$B = \{ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$$

- \# permutazioni di A

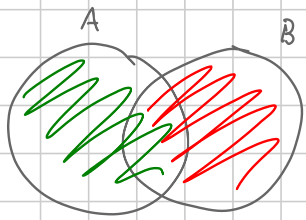
$$A = \{ \bullet \quad \bullet \quad \cancel{\bullet} \quad \dots \}$$
$$\underline{\ \ } \quad \underline{\ \ } \quad \underline{\ \ } \quad \dots$$
$$n \times (n-1) \times (n-2) \dots = n!$$

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ = # modi di scegliere k elementi fra n

■ Principio di Inclusione - Esclusione (PIE)

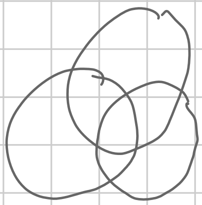
- quanti sono i numeri da 1 a 100 divisibili per 2 o per 5 ?

$$\underset{2}{50} + \underset{5}{20} - \underset{2 \text{ e } 5}{10} = 60$$



$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A\cap B) - \#(B \cap C) - \#(C \cap A) + \#(A \cap B \cap C)$$



$\#(A_1 \cup \dots \cup A_n) =$ (somma delle #)
− (somma delle # delle intersezioni a 2 a 2)
+ ...
+ $(-1)^{k+1}$ (somma delle # delle intersezioni a k a k)

- in quanti modi posso colorare una 3×3 di bianco e rosso senza 2×2 bianco ?

Conto il complementare

A_i = { colorazioni con il quadrato i bianco }

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot 2^5 - (4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1$$

$\#A_1 = 2^5$

$\#(A_1 \cap A_2) = 2^3$

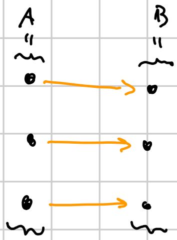
$\#(A_1 \cap A_3) = 2^2$

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2$

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1$

- Biiezioni (bigezioni)

$f : A \to B$ biiettiva allora $\#A = \#B$



- #modi di scrivere n come somma ordinata di k interi ≥ 0

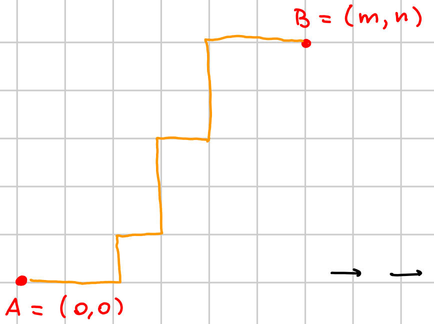
$4 = 3 + 1 + 0 \quad (\neq 3 + 0 + 1)$

$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \, | \quad \bullet \, |$

$\bullet \quad \bullet \quad \bullet \, | \, | \quad \bullet$

$\# \ldots = \#$ stringhe con n $\bullet$ e $k-1$ $|$ $= \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$

- \# percorsi monotoni da A a B

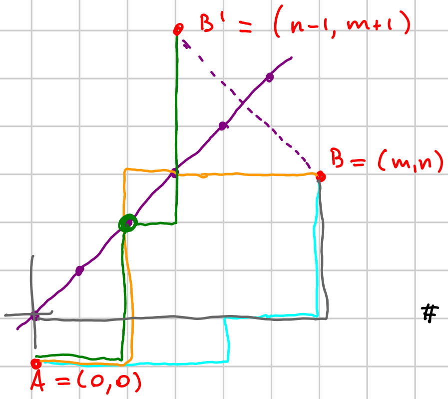


$\to \ \to \ \uparrow \ \to \ \uparrow \ \uparrow \ \to \ \uparrow \ \uparrow \ \to \ \to$

$\to \times m \qquad \uparrow \times n$

\# percorsi $=$ \# stringhe con m $\to$ e n $\uparrow$ $= \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$

- \# percorsi monotoni sotto la diagonale



Contiamo il complementare

\# percorsi cattivi $=$ \# percorsi da A a B'

$= \binom{m+n}{m+1}$

\# percorsi sotto la diagonale $= \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+1}$

Ricorsione

spezzo un conteggio in più sotto-conteggi uguali ma più piccoli

- \# permutazioni di $\{1, \ldots, n\}$ che spostano ogni elemento al più di 1 posto $= A_n$ (n non può scambiarsi con 1)

Considero n
- n rimane fermo, lo ignoro: ho A_{n-1} permutazioni
- n va al posto di $n-1$. $n-1 \leftrightarrows n \rightsquigarrow$ li ignoro

ho A_{n-2} permutazioni

$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ $\quad A_1 = 1 \quad A_2 = 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \ldots$

- \# stringhe lunghe n di A e B senza A consecutive

$n=1$	$n=2$	$n=3$	
A, B	AB, BA, BB	ABA, ABB, BAB, BBA, BBB	...

$A_n =$ \# stringhe lunghe n che finiscono per A
$B_n =$ \# B

$$\begin{cases} A_n = B_{n-1} = S_{n-2} \\ B_n = A_{n-1} + B_{n-1} = S_{n-1} \end{cases}$$

[redacted] $A_n + B_n =$ [redacted]

$S_1 = 2$
$S_2 = 3$

DOUBLE COUNTING (DC)

$=$ contare (o $\leq$ stimare) una stessa quantità in due modi diversi

• $1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\
n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1
\end{array}
\quad \to \quad 1 + \dots + n = S
$$

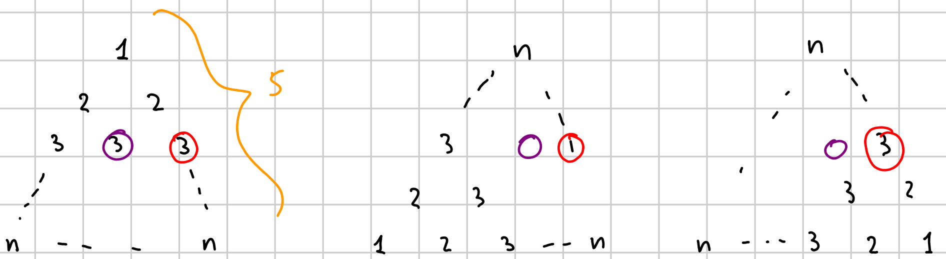
DC sulla somma della tabella

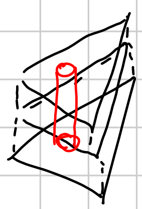
per righe: $2S$

per colonne: $\overset{\shortparallel}{n(n+1)}$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

• $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = ? = S$





DC sulla somma totale

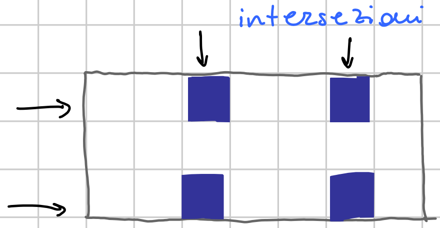
per piani: $3S$

per colonne: $\overset{\shortparallel}{(2n+1)\,\dfrac{n(n+1)}{2}}$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

• tabella 3×7 colorata di blu e rosso.

TESI: esistono 2 righe e 2 colonne le cui 4 intersezioni hanno lo stesso colore

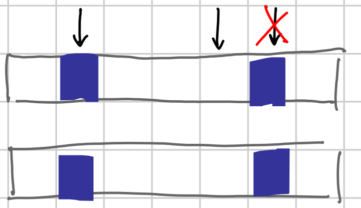


Q = # coppie di caselle che
- sono dello stesso colore
- stanno nella stessa colonna

Per assurdo la tesi è falsa

- per colonne : ogni colonna ne ha almeno una

- per coppie di righe :

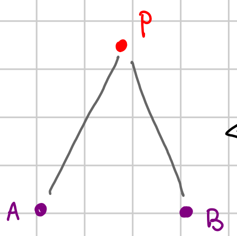


$3 \cdot 2 =$

- IMO 2015 – 1 (b)

S insieme di $n \geq 3$ punti nel piano
- S è bilanciato se $\forall A, B \ \exists P$ t.c. $PA = PB$
- S è eccentrico se $\forall A, B, C \ \nexists P$ t.c. $PA = PB = PC$

Per quali n esiste S bilanciato e eccentrico?



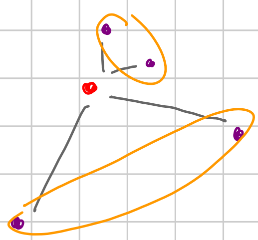
DC sul # di cose $= Q$

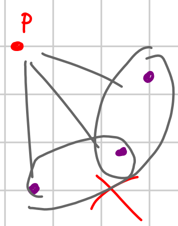
- dal pdv di A, B

fisso A, B . S è bilanciato $\longrightarrow$ trovo almeno un P

- dal pdv di P

S è eccentrico $\longrightarrow$ le coppie A, B sono a due a due disgiunte

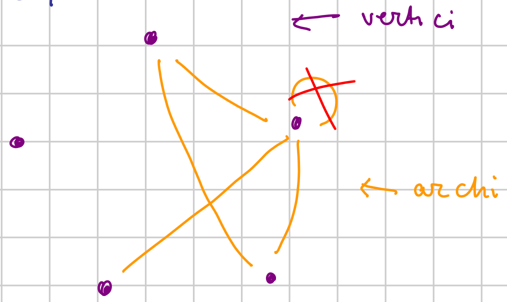




$$\frac{n-1}{2} \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq \frac{n-1}{2} \implies \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} \implies n \text{ dispari}$$

Per n dispari trovo l'esempio.

Grafi



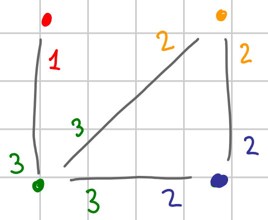
Se v è un vertice
$\deg v = \#$ archi aventi v come estremo

- $\sum_{v \text{ vertice}} \deg v = ? = 2 \,\#\text{archi}$

  ogni arco viene contato 2 volte

  OSS il RHS è pari, quindi il # vertici con grado dispari è pari

- $\sum_{v \text{ vertici}} (\deg v)^2 = \sum_{u-v} (\deg u + \deg v)$

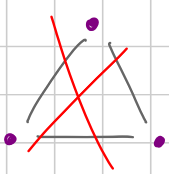


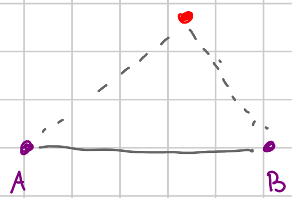
DC sulla somma delle etichette

per archi: ottengo RHS

per vertici: ottengo LHS

- quanti archi ha al più un grafo senza triangoli?





$n = \#$ vertici
$e = \#$ archi

OSS ogni vertice è collegato al più a uno fra A e B

$\deg A + \deg B \leq n$

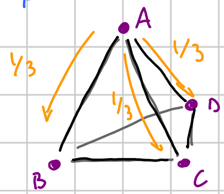
disug. misteriose (QM–AM)

$RHS = LHS = \sum_v (\deg v)^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum \deg v \right)^2 =$

$e \leq \frac{n^2}{4}$

ESERCIZI

- # sequenze debolmente crescenti lunghe m a valori in $\{1, \dots, n\}$
- almeno un punto dagli es. 118 e 119 ← (se non capite la notazione chiedete)
- una pulce salta sui vertici di un tetraedro
  probabilità che dopo n mosse sia al punto di partenza ?
  (ricorsivamente)



- # stringhe bilanciate di $2n$ parentesi tonde ($n \times$ (, $n \times$))
  (ogni parentesi deve aprirsi prima di chiudersi)
  es ( ) (( ) (( ))) sì ( ) (( ))) (( ) NO
- prob. 10

se finite prima chiedete e ne avrete altri :)

CORREZIONE

- $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_m$

  $\downarrow{+1} \quad \downarrow{+2} \quad \downarrow{+3} \quad \dots \quad \downarrow{+m}$

  $a_1+1 \quad a_2+2 \quad a_3+3 \quad \dots \quad a_m+m$

  - str. crescente
  - è a valori $\{2, \dots, n+m\}$

  $2 \quad 3 \quad \dots \quad n+m-1 \quad n+m \rightsquigarrow$ ne scelgo m

  $\# \dots = \binom{n+m-1}{m}$

• X t.c. $\# X = n$ $\quad Y = \mathcal{P}(X)$

$$\#\{(A,B) \in Y \times Y \,:\, A \cap B = \emptyset\}$$

$$X = \{\, \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$$

B

A

$$3 \times 3 \times 3 \quad \dots \quad = 3^n$$

• $$\sum_{(A,B) \in Y \times Y} |A \cup B| = n \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$$

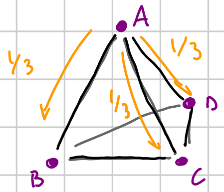
dal pdv degli elementi

fisso un elemento $x \in X$

$$X = \{\, x \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$$

$$3 \times 4 \times 4 \times 4 \quad = 3 \cdot 4^{n-1}$$

$A, B, A \cap B$ $\qquad$ $A, B, A \cap B, \emptyset$

• 

parte in A

A_n = prob. di essere in A dopo n mosse

$\left.\begin{array}{l} B_n \\ C_n \\ D_n \end{array}\right\}$ analoghi

$$B_n = C_n = D_n$$

$$A_n = \frac{1}{3}(B_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-1}) = B_{n-1} = \frac{1}{3}A_{n-2} + \frac{2}{3}B_{n-2} = \frac{1}{3}A_{n-2} + \frac{2}{3}A_{n-1}$$

$$B_n = \frac{1}{3}(A_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-1}) = \frac{1}{3}A_{n-1} + \frac{2}{3}B_{n-1}$$

$A_0 = 1 \qquad A_1 = 0$

$A_n + 3B_n = 1$

$B_{n-1} = \frac{1}{3}(1 - A_{n-1}) = A_n$

$$A_n = \frac{1}{3}(1 - A_{n-1})$$

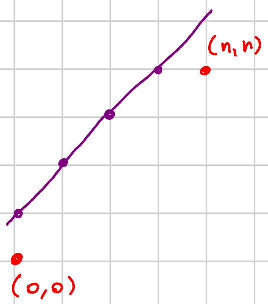
- oss una stringa è bilanciata
  $\iff$ in ogni prefisso $\#(\geq \#)$

( ) (( ) (( )))

lui è un prefisso

(⟹) (a voce)

(⟸) ( ) (( ) (( ))) (a voce)



($\rightsquigarrow$ $\rightarrow$

) $\rightsquigarrow$ $\uparrow$

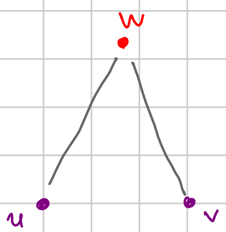
\# stringhe bilanciate

$= \#$ percorsi da $(0,0)$ a (n,n) sotto la diagonale

$$= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

numeri di Catalan

- $12k$ vertici, tutti i gradi sono $3k+6$
  $\forall$ u,v ci sono N vertici collegati a entrambi.



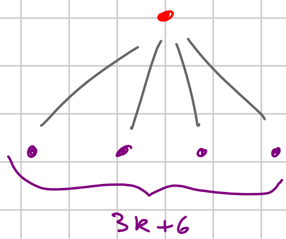
$Q = \#$ "V" DC su Q

dal pdv u,v

$$Q = N \cdot \binom{12k}{2}$$

dal pdv di w

$$Q = \binom{3k+6}{2} \cdot 12k$$



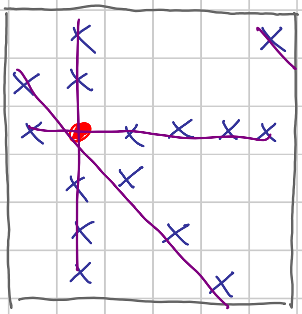
$$N\binom{12k}{2} = 12k\binom{3k+6}{2}$$

$$N = \frac{\binom{3k+6}{2}12k}{\binom{12k}{2}} \quad \text{è intero}$$

$$= \frac{(3k+6)(3k+5)\cdot \cancel{12k}}{\cancel{12k}\cdot(12k-1)} = \ldots$$ facciamo la divisione fra polinomi

$[\ldots]$ $12k-1 \mid$ un qualche numero

l'unica possibilità è $k=3$



C2 - BASIC DelfadOr

Note Title 9/7/2017

INVARIANTI

Situazione dinamica (mosse)

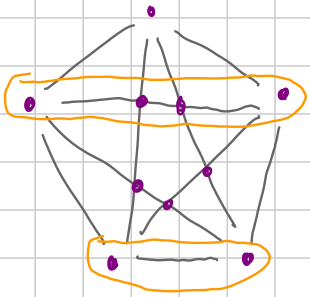
INVARIANTE = quantità legata allo stato che non cambia o cambia in modo controllato in seguito alle mosse

- Invarianti invarianti

Q = invariante

A = stato iniziale B = stato finale

$Q_A \neq Q_B \Rightarrow$ non posso raggiungere B

- 

• = lampadine (all'inizio spente)

MOSSA = cambiare di stato tutte le lampadine su un segmento

Posso accenderle tutte?

OSS ogni mossa coinvolge esattamente 2 vertici

•	•	$\rightarrow$	o	o	+2
o	o	$\rightarrow$	•	•	−2
•	o	$\rightarrow$	o	•	+0

Q = # lampadine sui vertici accese (mod 2)

Q è invariante

$Q_{inizio} = 0$ $Q_{fine} = 5 \neq 0 \pmod 2$ ↯

- $20 \times R \quad 21 \times G \quad 22 \times B$

MOSSE: $1 \times R + 1 \times G \longrightarrow 2 \times B$

$1 \times G + 1 \times B \longrightarrow 2 \times R$

$1 \times B + 1 \times R \longrightarrow 2 \times G$

Posso averli tutti dello stesso colore?

	R	G	B
I° mossa	-1	-1	$+2 \equiv -1$
	$+2 \equiv -1$	-1	-1
	-1	$+2 \equiv -1$	-1

guardo mod 3

R	G	B
2	0	1
1	2	0
0	1	2

I 3 numeri sono sempre (in un qualche ordine) 0, 1, 2

Alla fine vorrei due colori a 0 ↯

- Monovarianti (invarianti monotone)

Q = monovariante (stretta)

Se Q può assumere un # finito di valori allora il # mosse è finito

(ad es. se Q è intera, strettamente decrescente e positiva)

- n interi positivi in fila. (z_i)

MOSSA: prendo (x,y) adiacenti con $x > y$ e x a sx di y

li sostituisco con
- $(y+1, x)$
- $(x-1, x)$

TESI: posso fare un # finito di mosse

<u>oss</u> il max dei numeri è invariante (invariante) $= M$

Provo una cosa del tipo $Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z_i$ crescente

Guardando le mosse, voglio i pesi grossi a DX

$\alpha_i = i \rightsquigarrow Q = \sum_{i=1}^{n} i \cdot z_i$

I° $\quad x \,,\, y \qquad\qquad\qquad\qquad y+1 \quad x$

$i \cdot x + (i+1)\,y \longrightarrow i\,(y+1) + (i+1)\,x$

$+ \quad + \qquad\qquad\qquad + \quad + \, i \, +$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad x-1 \quad x$

II° $\quad + \quad + \longrightarrow i\,(x-1) + (i+1)\,x$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \quad +$

Q è str. crescente

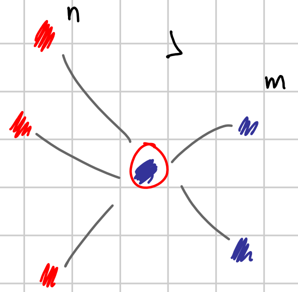
$Q \leq \boxed{\sum_{k=1}^{n} i \cdot M} \rightarrow$ è costante :)

- 12 gnomi (uno per mese) con case

  Ci sono delle amicizie

  Ad ogni mese lo gnomo corrispondente se necessario ridipinge la sua casa per adeguarsi alla maggioranza stretta dei suoi amici

  TESI: dopo un po' nessuno ridipinge più



Q = # coppie di amici con casa diversa

Se uno gnomo ridipinge Q diminuisce strettamente

$Q \geq 0 \rightsquigarrow$ # ridipingimenti è finito

- Invarianti variabili a variazione costante

  ↳ servono a dare informazioni su #mosse

- A e B giocano. All'inizio c'è una pila di n gettoni.

MOSSE:
- eliminare una pila
- spezzare una pila in 4 pile

Perde chi muove per ultimo. Chi vince?

[per casa: il gioco finisce]

Q = # pile

Oss Q cambia parità ad ogni mossa

$Q_{inizio} = 1$ $\qquad$ $Q_{fine} = 0$

⇝ # mosse è dispari (A muove per ultimo e perde)

COLORAZIONI

- Scacchiera 8x8, tolgo due angoli opposti. Posso ricoprirla con tessere 2x1?

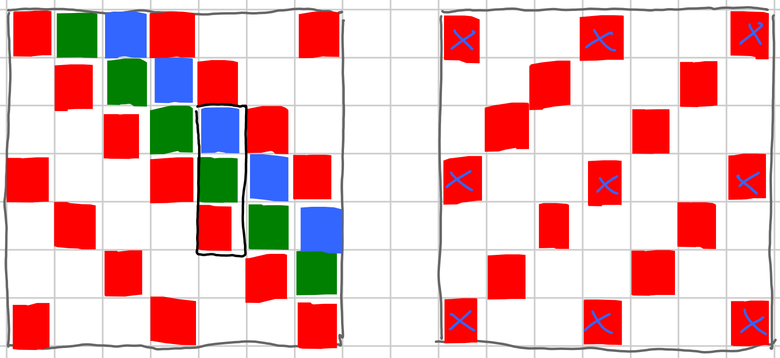
Coloro a scacchi. I due angoli sono dello stesso colore (WLOG bianchi)

30 x □

32 x ■

bianche = # nere ↯

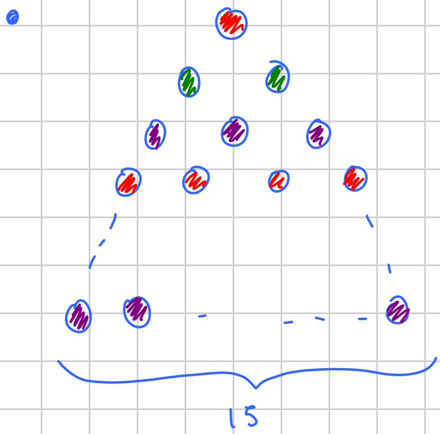
- scacchiera 7x7, ricoperta con 16 tessere 3x1 + un buco. Dove può stare il buco?



Ogni tessera copre esattamente un rosso

⇝ il buco è rosso. (ma secondo entrambe le colorazioni)

⊕ ESEMPI



tessere: O O O

Posso ricoprire il triangolo?

$1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$
$2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$ (44)
$3 \quad 6 \quad 9 \quad 12 \quad 15$

	•	•	•
000	3 ≡ 0	0	0
	0	3 ≡ 0	0
	0	0	3 ≡ 0
%o	1	1	1

guardo mod 3
Il numero di • • • ricoperte è lo stesso (mod 3)

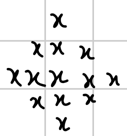
PRINCIPIO DELL'ESTREMALE

tecnica euristica che mi suggerisce di considerare fra molti oggetti quello che massimizza (o minimizza) una certa quantità Q ⚠ il max/min deve esistere

- tabella infinita riempita con interi positivi tali che ognuno è la media dei 4 adiacenti
  TESI: sono tutti uguali

Sia x l'intero più piccolo, a, b, c, d adiacenti
$x = \frac{a+b+c+d}{4}$, ma $x \leq a, b, c, d$, quindi $x = a = b = c = d$

Se c'è un x allora sono tutti x.



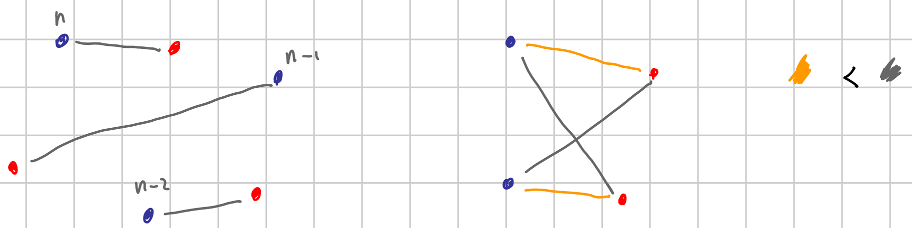
- n città collegate con strade monodirezionali
  $\forall A, B$ posso raggiungerne una dall'altra (percorrendo anche più strade)
  TESI: esiste una città da cui si possono raggiungere tutte le altre

Sia A una città che massimizza il # città da lei raggiungibili (incluse lei stessa)

Per assurdo $\exists B$ t.c. $A \not\rightsquigarrow B$. Allora $B \rightsquigarrow A$
<u>oss</u> $B \rightsquigarrow A$. Se $A \rightsquigarrow C$ allora $B \rightsquigarrow (A) \rightsquigarrow C$

Da B posso raggiungere tutte le città che potevo da A
$\oplus$ B stessa ↯

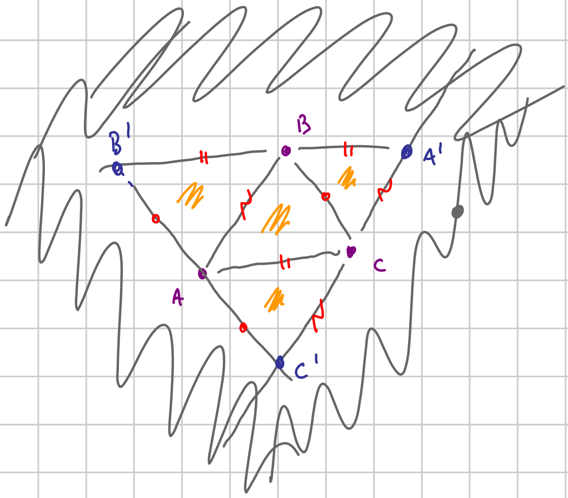
- n punti rossi e n blu sul piano, a 3 a 3 non allineati.
  TESI: posso accoppiarli con segmenti non intersecantisi



Prendo un accoppiamento che minimizza le somme delle lunghezze. Se per assurdo ci fosse un'intersezione faccio uno scambio e ottengo un accoppiamento "più corto" ↯

- $n \geq 3$ punti sul piano. $\forall A,B,C$ Area$(ABC) \leq 1$.
  TESI: $\exists$ triangolo che ricopre tutti i punti e ha area ≤ 4

Prendo A,B,C t.c. Area(ABC) è massima >0 , ≤ 1



$Area(A'B'C') = 4\,Area(ABC) \leq 4 \cdot 1 = 4$

ESERCIZI

- es. 130, 132
- problemi 8, 2
- Ci sono 3 scuole, ciascuna con n studenti. Ogni studente ha esattamente $n+1$ amici complessivamente nelle altre scuole.

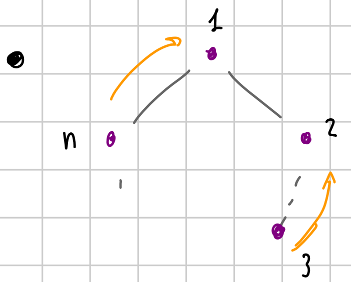
TESI: $\exists$ 3 studenti, uno per scuola, che sono tutti amici

- $n \geq 3$ punti sul piano, $\forall A, B, C$ esiste una striscia larga 1 che li copre.

TESI: $\exists$ una striscia larga 2 che copre tutti i punti

(striscia larga w = insieme dei punti compresi fra 2 rette a distanza w)

CORREZIONI



Se n è dispari si riesce

Se n è pari

a_i = # pedine sul vertice i

$$Q = \sum_{i=1}^{n} i\, a_i \pmod n$$

Q è invariante $\qquad Q_{inizio} = \frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod n$

$Q_{fine} \equiv 0 \not\equiv \frac{n}{2} \pmod n$

- $n = 2014$

$$e_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima carta è} \\ 0 & \end{cases}$$

$\underbrace{\quad \dots\dots \quad}_{49}$

$n \quad \dots\dots \quad 2 \quad 1$

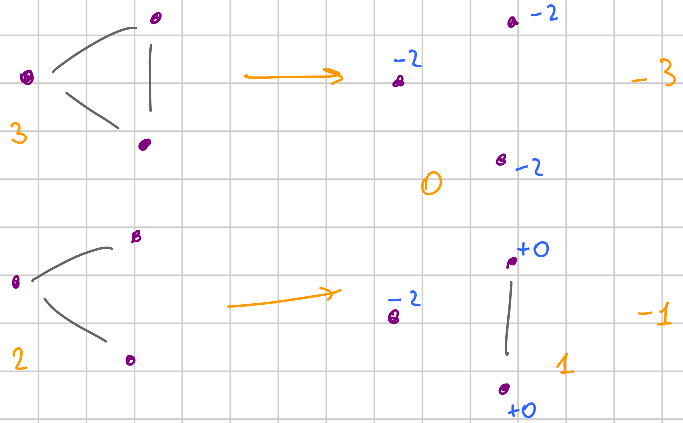
$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \alpha_i$ vorrei che $\alpha_i > \alpha_{i-1} + \dots + \alpha_{i-49}$

$\alpha_i = 2^i \qquad Q = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot 2^i$ Si dimostra che Q è str. decrescente

$Q \geq 0$

- A e B giocano su un grafo

MOSSE.



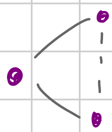
Chi vince? (perde chi non può muovere)

oss # archi è str. decrescente → il gioco finisce

oss la parità di # archi cambia ad ogni mossa

oss la parità dei gradi è invariante

oss il gioco finisce quando tutti i gradi sono ≤ 1



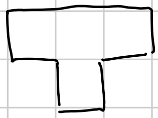
V_0 = # vertici con grado pari

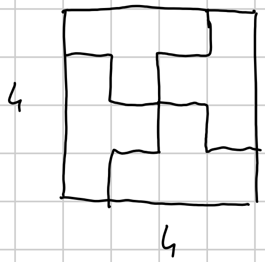
V_1 = # dispari

$\#\text{archi fine} = \frac{1}{2}\sum_{v} (\deg v \text{ alla fine}) = \frac{1}{2} V_1$

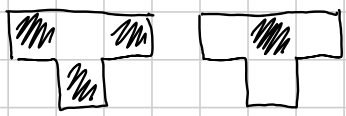
$E = \#\text{archi all'inizio}$

$\#\text{mosse} \equiv E - \frac{1}{2} V_1 \pmod{2}$

- scacchiere $n \times n$, tessere .
  - se n è dispari non posso
  - se $4 \mid n$ posso



  - se $n \equiv 2 \pmod{4}$
    coloro a scacchi



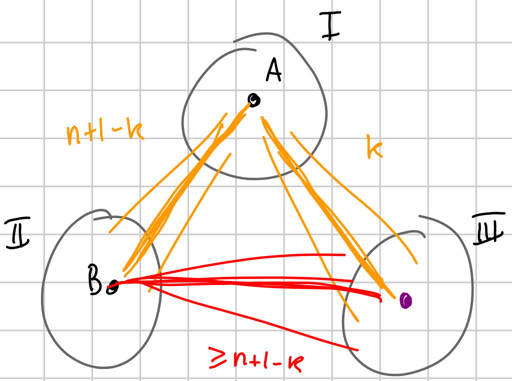
$\#\text{tessere} = \frac{n^2}{4}$ che è dispari

$\#\text{caselle nere} = \text{dispari}$

$\parallel$

$\frac{n^2}{2}$ che è pari

- Prendo A uno studente che ha il max #amici in una scuola

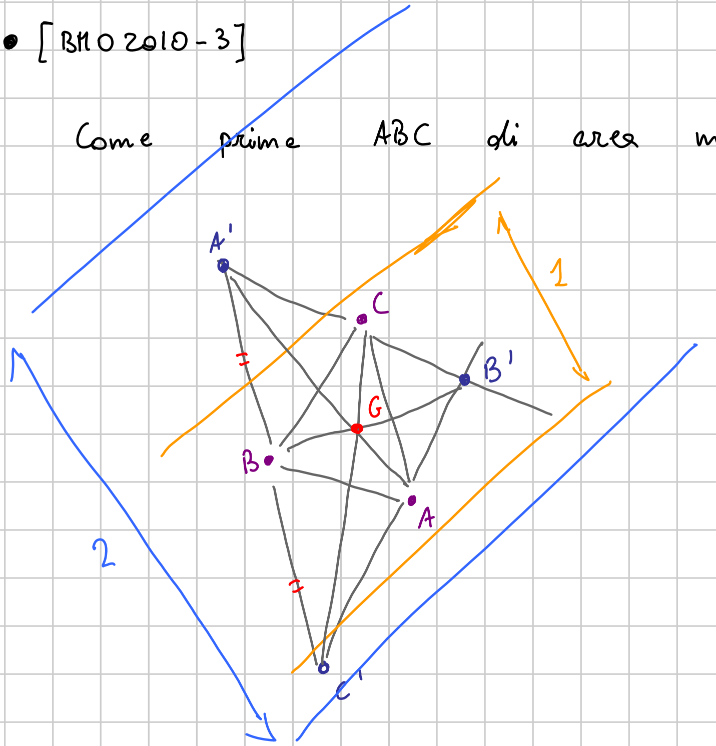


B ha al max k amici in I
$\rightsquigarrow$ ha almeno $n+1-k$ amici in III

in III ci sono n studenti

- [BMO 2010 - 3]

Come prima ABC di area max



G = baricentro

omotetia di centro G
e fattore −2
ABC → A'B'C'
|| → || che ha largh. 2
e ricopre A'B'C'

G1 basic (solo esercizi) Pol senior 17

Note Title 9/4/2017

Es. 3 p.3

$$\sin\left(2\vartheta+\frac{\pi}{4}\right)=\sin 2\vartheta\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos 2\vartheta=$$

$$=2\sin\vartheta\cos\vartheta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta\right)$$

$$\sin 3\vartheta=\sin(2\vartheta+\vartheta)=\sin 2\vartheta\cos\vartheta+\sin\vartheta\cos 2\vartheta=$$

$$=2\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\vartheta+\sin\vartheta\left(\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta\right)=$$

$$=3\sin\vartheta\cos^2\vartheta-\sin^3\vartheta$$

$$\cos 3\vartheta=\cos^3\vartheta-3\sin^2\vartheta\cos\vartheta$$

$$e^{i\cdot 3\vartheta}=\left(e^{i\vartheta}\right)^3$$

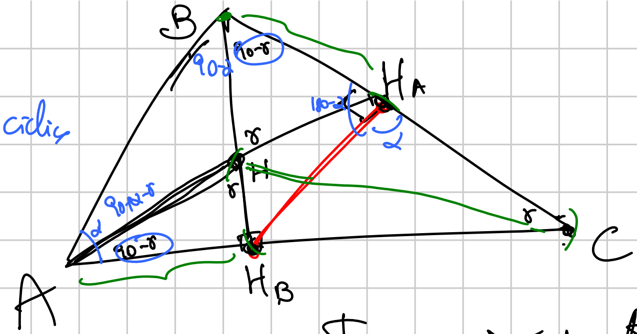
$$\cos 3\vartheta+i\sin 3\vartheta=\left(\cos\vartheta+i\sin\vartheta\right)^3=\ldots$$

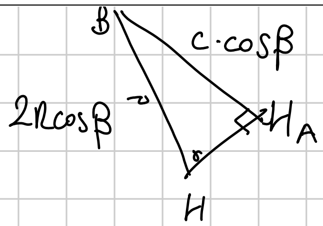
$$\cos^3\vartheta+3i\cos^2\vartheta\sin\vartheta+3i^2\cos\vartheta\sin^2\vartheta+i^3\sin^3\vartheta$$

$$\tan 4\vartheta=\frac{\sin(2\vartheta+2\vartheta)}{\cos(2\vartheta+2\vartheta)}=\ldots$$

Es. 7 $\boxed{\text{AH}}$

ABH_AH_B ciclic





Teo. seni su AHH_B:

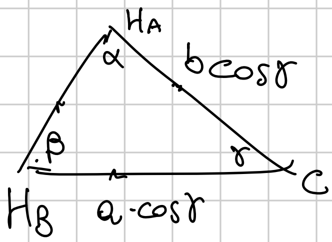
$AH_B = c\cos\alpha$

$$\frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{AH}{1}$$

$$AH = \frac{c\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{b\cos\alpha}{\sin\beta} = \boxed{2R\cos\alpha}$$

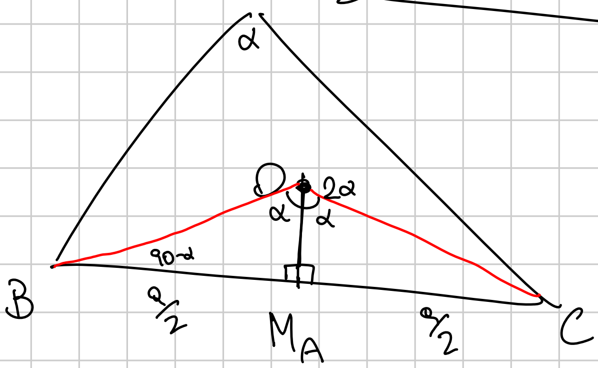
$HH_a = HB\cdot\cos\gamma = 2R\cos\beta\cos\gamma$ (simmetrico in β,γ)

H_BH_C: su H_AH_BC:



$$\frac{H_AH_B}{\sin\gamma} = \frac{b\cos\gamma}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin\beta}\cos\gamma\sin\gamma = 2R\cos\gamma\sin\gamma$$

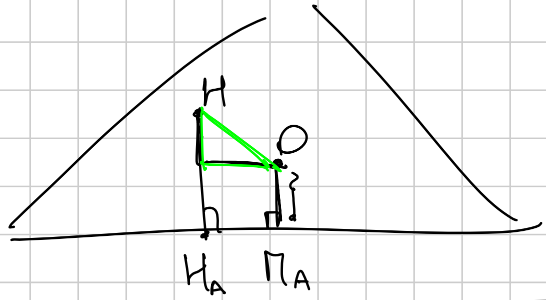
$$= R\sin 2\gamma$$



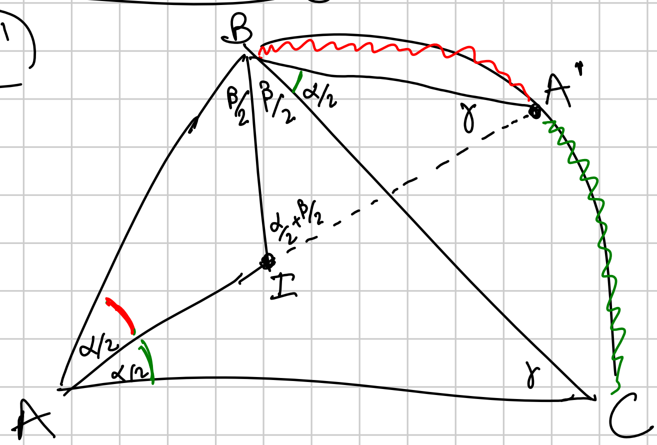
$OB = R$

$$BM_A = \boxed{\frac{a}{2} = R \cdot \sin\alpha}$$

$$OM_A = R \cdot \cos\alpha$$



$\boxed{AI}$ $\boxed{IA'}$



$IA' = BA'$

$$\frac{AI}{\sin \beta/2} = \frac{c}{\sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)} = \frac{c}{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}\right)} =$$

$$= \frac{c}{\sin\left(90 - \frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{c}{\cos \gamma/2}$$

$$AI = \frac{c}{\cos \gamma/2} \cdot \sin \beta/2 = \frac{2R \cdot \boxed{\sin\gamma}}{\cos \gamma/2} \cdot \sin \beta/2 =$$

$$= \frac{2R \cdot 2 \sin \gamma/2 \cancel{\cos \gamma/2}}{\cancel{\cos \gamma/2}} \cdot \sin \beta/2 = 4R \sin \gamma/2 \sin \beta/2$$

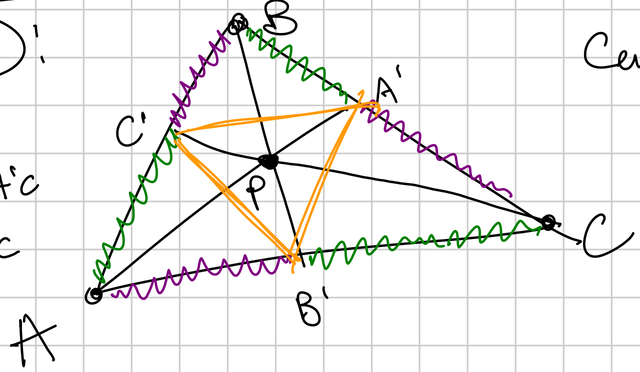
seni su BIA': $\dfrac{BI}{\sin\gamma} = \dfrac{IA'}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}\right)} = \dfrac{IA'}{\sin\left(90-\frac{\gamma}{2}\right)}$

$= \dfrac{IA'}{\cos \gamma/2}$ $\qquad IA' = \dfrac{BI}{\sin\gamma}\cdot\cos\gamma/2 =$

$$= \frac{BI}{2\sin\gamma/2\,\cancel{\cos\gamma/2}}\,\cancel{\cos\gamma/2} = \frac{BI}{2\sin\gamma/2} = \frac{4R\sin\alpha/2\,\sin\gamma/2}{2\sin\gamma/2}$$

$$= 2R\sin\frac{\alpha}{2}$$

12:



$a = BA' + A'C$
$b = AB' + B'C$

Ceva: le tre ceviane si incontrano $\Leftrightarrow$ prodotto verdi = prodotto viola

$$2R\cdot\boxed{S'} = \underbrace{AB'\cdot BC'\cdot CA'}_{\text{prod. viola}} =$$

$$2R\cdot S' = \left(S_{ABC} - S_{AB'C'} - S_{BA'C'} - S_{CA'B'}\right)\cdot 2R =$$

$$= 2R\cdot\left(S_{ABC} - \frac{AC'\cdot AB'\cdot\sin\alpha}{2} - \frac{BA'\cdot BC'\cdot\sin\beta}{2} - \frac{CA'\cdot CB'\cdot\sin\gamma}{2}\right)$$

$$= 2R\cdot S - AC'\cdot AB'\cdot R\sin\alpha - (\text{cicliche}) = \qquad 2R = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$= 2 \cdot R \cdot S \to AC' \cdot AB' \cdot \frac{a}{2}$ – cicliche

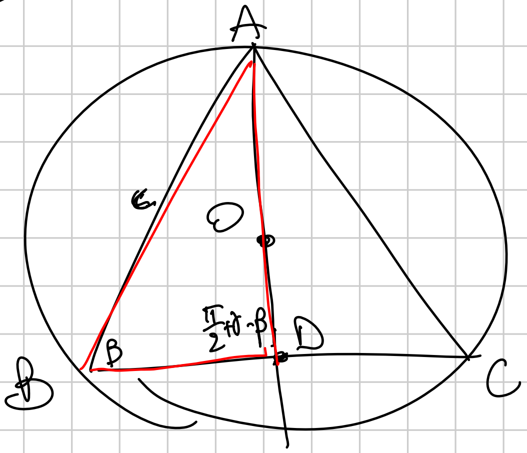
$= \frac{abc}{2} - AC' \cdot AB' \cdot \frac{a}{2}$ – cicliche $\qquad R = \frac{abc}{4S}$

$= \frac{1}{2} \Big[(AB' + B'C) \cdot (BA' + A'C) \cdot (AC' + C'B) - AC' \cdot AB' \cdot (BA' + A'C) \Big]$ – cicliche

6 di questi 8 prodotti si semplificano

$= \frac{1}{2} \left[AB' \cdot BC' \cdot CA' + AC' \cdot BA' \cdot CB' \right] = AB' \cdot BC' \cdot CA'$

Ceva



$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{R}$$

Step 1: mi trovo formula per AD

$AD = \ldots$ (teo. seni su ABD)

$$\frac{AD}{\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \gamma\right)} = \frac{b}{\cos(\beta - \gamma)} = \frac{b}{\cos\beta\cos\gamma + \ldots}$$

$BE =$ (ciclico)

$CF =$ ciclica

... sommate ...

Dovrebbe venire una formula equivalente a

$$\tan\alpha + \tan\beta + \tan\gamma = \tan\alpha \tan\beta \tan\gamma$$

che è sempre vera se α, β, γ sono i lati di un triangolo (es. 11 pag. 3)

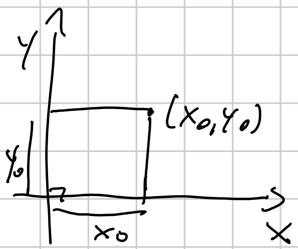
(dim: usa $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ + formula somma tangente)

G2 Basic LucaMac

Note Title 9/5/2017

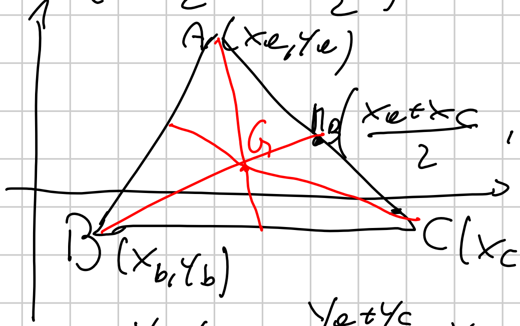
Cartesiane, Complessi e Vettori.

CARTESIANE



$A=(x_0,y_0)$ $B=(x_1,y_1)$ M il punto medio di AB

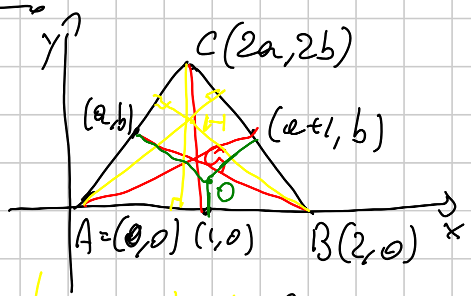
$$M=\left(\frac{x_0+x_1}{2},\frac{y_0+y_1}{2}\right)$$



$BG: \frac{y-y_b}{x-x_b}=\frac{\frac{y_a+y_c}{2}-y_b}{\frac{x_a+x_c}{2}-x_b}$ $AG: \frac{y-y_a}{x-x_a}=\frac{\frac{y_b+y_c}{2}-y_a}{\frac{x_b+x_c}{2}-x_a}$

(generale: le retta per due punti è $\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}$)

$$G=\left(\frac{x_a+x_b+x_c}{3},\frac{y_a+y_b+y_c}{3}\right)$$



$G=\left(\frac{2}{3}(a+1),\frac{2}{3}b\right)$

Calcoliamo H: $CH\perp AB$ $x_H=x_c=2a$

$AH \perp BC$

$$m_{BC}=\frac{y_b-y_c}{x_b-x_c}=\frac{-2b}{2-2a}=\frac{b}{a-1}$$

$m_{AH} = \frac{1-a}{b}$ $\qquad AH: \ y = \frac{1-a}{b} x$

$H = \left(2a, \frac{2a-2a^2}{b}\right)$

Calcoliamo O:

Sta sull'asse di $AB \Rightarrow x_O = 1$

sta sull'asse di AC $\quad y = -\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b} + b$

$O = \left(1, -\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b} + b\right)$

$$\frac{x_H - x_G}{y_H - y_G} \stackrel{?}{=} \frac{x_O - x_G}{y_O - y_G}$$

$$\frac{2a - \frac{2}{3}(a+1)}{\frac{2a-2a^2}{b} - \frac{2}{3}b} \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{2}{3}(a+1)}{-\frac{a}{b} + \frac{a^2}{b} + b - \frac{2}{3}b}$$

$$\frac{b(6a - 2(a+1))}{6a - 6a^2 - 2b^2} \stackrel{?}{=} \frac{b(3 - 2(a+1))}{-3a + 3a^2 + 3b^2 - 2b^2}$$

$$\frac{4a-2}{6a-6a^2-2b^2} \stackrel{?}{=} \frac{1-2a}{-3a+3a^2+b^2}$$

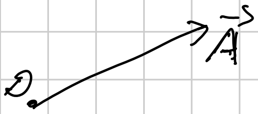
$$\frac{2a-1}{3a-3a^2-b^2} \stackrel{?}{=} \frac{1-2a}{-3a+3a^2+b^2} \qquad \text{Vero!}$$

H, G, O allineati.

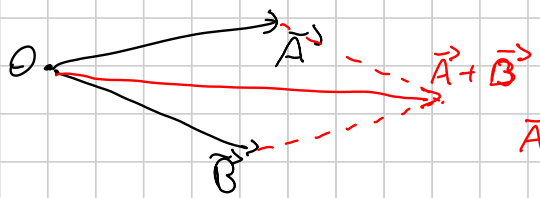
C'è di più: $\quad y_H - y_G = -2(y_O - y_G)$

$x_H - x_G = -2(x_O - x_G) \Rightarrow HG = 2GO$

Vettori:

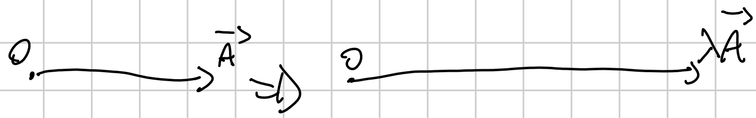


SOMMA:



$\vec{A}+\vec{B} = \vec{B}+\vec{A}$

MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE:



$\lambda = 0$

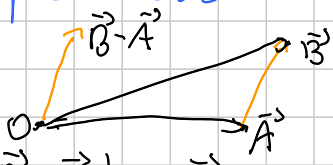
$\lambda = 1$ resta $\vec{A}$

$\lambda = -1$ $\quad -\vec{A}$

- retta del vettore $\vec{A}$

$$\vec{B} = \lambda \vec{A}$$

- retta per 2 due vettori, $\vec{A}, \vec{B}$

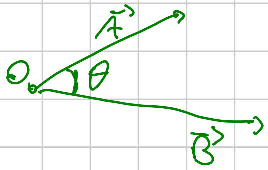


$$r: \lambda(\vec{B}-\vec{A}) + \vec{A}$$

$$r: \lambda\vec{B} + (1-\lambda)\vec{A}$$

SEGMENTO si ha $0 \le \lambda \le 1$

PRODOTTO SCALARE:



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \|\vec{A}\|\cdot\|\vec{B}\|\cdot\cos\theta$$

"quanto è lungo $\vec{A}$"

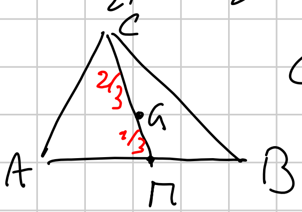
OSS: $\vec{A}\cdot\vec{A} = \|\vec{A}\|^2$

$\vec{A}\cdot(-\vec{A}) = -\|\vec{A}\|^2$

CALCOLIAMO UN PO' DI PT NOTI:

dati $\vec{A}$ e $\vec{B}$ il punto medio $\vec{M}$ è

$$\vec{M} = \frac{1}{2}\vec{B} + \left(1-\frac{1}{2}\right)\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{A} + \frac{1}{2}\vec{B}$$

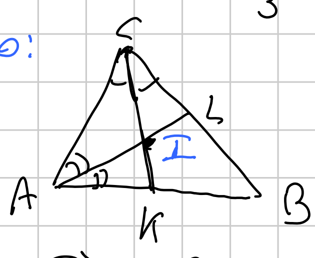


$$CG = 2GM$$

$$\frac{CG}{CM} = 2/3$$

$$\vec{G} = \lambda\vec{C} + (1-\lambda)\vec{M} = \frac{1}{3}\vec{C} + \frac{2}{3}\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}}{3}$$

Incentro:



$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{AK}{AB} = \frac{b}{a+b} \qquad AK = \frac{bc}{a+b}$$

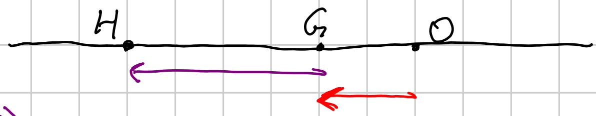
$$\vec{K} = \frac{b}{a+b}\vec{B} + \frac{a}{a+b}\vec{A}$$

$$\frac{CI}{IK} = \frac{AC}{AK} = \frac{b}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{CI}{CK} = \frac{CI}{CI+IK} = \frac{1}{\frac{CI+IK}{CI}} = \frac{1}{1+\frac{IK}{CI}} = \frac{1}{1+\frac{c}{a+b}} = \frac{a+b}{a+b+c}$$

$$\vec{I} = \frac{a+b}{a+b+c}\vec{K} + \frac{c}{a+b+c}\vec{C} = \frac{a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}}{a+b+c}$$

Ortocentro:



$$\vec{H}-\vec{G} = 2(\vec{G}-\vec{O})$$

$$\vec{H} = 3\vec{G}-2\vec{O} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}-2\vec{O}$$

E' molto molto comodo prendere come origine del sistema vettoriale il circocentro O.
In questo caso si ha

$$\vec{H} = \vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$$

OSS: $\vec{A}$ e $\vec{B}$ sono $\perp$ $\Leftrightarrow$ $\vec{A}\cdot\vec{B}=0$

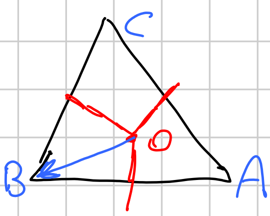
E' vero che $\vec{H}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$?

$$(\vec{H}-\vec{C})\cdot(\vec{B}-\vec{A}) \overset{?}{=} 0$$

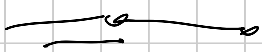
$$(\vec{B}+\vec{A})\cdot(\vec{B}-\vec{A}) \overset{?}{=} 0$$

$$\vec{B}\cdot(\vec{B}-\vec{A})+\vec{A}\cdot(\vec{B}-\vec{A}) = \vec{B}\cdot\vec{B} - \cancel{\vec{B}\cdot\vec{A}} + \cancel{\vec{A}\cdot\vec{B}} - \vec{A}\cdot\vec{A} \overset{?}{=} 0$$

$$\vec{B}\cdot\vec{B} = \|\vec{B}\|^2$$

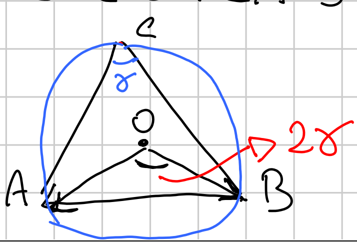


$\vec{B}\cdot\vec{B} = R^2 = \vec{A}\cdot\vec{A}$
Quindi fa proprio O.



$\overline{OH}$

$$OH^2 = \|\vec{OH}\|^2 = \vec{OH}\cdot\vec{OH} = (\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})\cdot(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) =$$
$$= \vec{A}\cdot\vec{A}+\vec{B}\cdot\vec{B}+\vec{C}\cdot\vec{C}+2\vec{A}\cdot\vec{B}+2\vec{A}\cdot\vec{C}+2\vec{B}\cdot\vec{C}$$



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = R^2\cos 2\gamma = R^2 - \frac{4R^2\sin^2\gamma}{2}$$

$$\cos 2\gamma = 1-2\sin^2\gamma$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = R^2 - \frac{1}{2}\left[(2R\sin\gamma)^2\right] = R^2 - \frac{c^2}{2}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{C} = R^2 - b^2/2 \qquad \vec{B}\cdot\vec{C} = R^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$OH^2 = 3R^2 + 2\left(R^2 - \frac{c^2}{2}\right) + 2\left(R^2 - \frac{b^2}{2}\right) + 2\left(R^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$OH^2 = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2).$$

CALCOLIAMO OI

$$OI^2 = \|\vec{OI}\|^2 = \vec{OI}\cdot\vec{OI} = \left(\frac{a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}}{a+b+c}\right)\left(\frac{a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}}{a+b+c}\right) =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\left[(a^2+b^2+c^2)R^2 + 2\left(ab\vec{A}\cdot\vec{B} + ac\vec{A}\cdot\vec{C} + bc\vec{B}\cdot\vec{C}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\left[R^2(a^2+b^2+c^2) + 2R^2(ab+ac+bc) - abc(a+b+c)\right] =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\left[R^2(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)\right] = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$$

$$R = \frac{abc}{4S} \qquad r = \frac{2S}{a+b+c} \qquad \Rightarrow 2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$$

$$OI^2 = R^2 - 2Rr$$

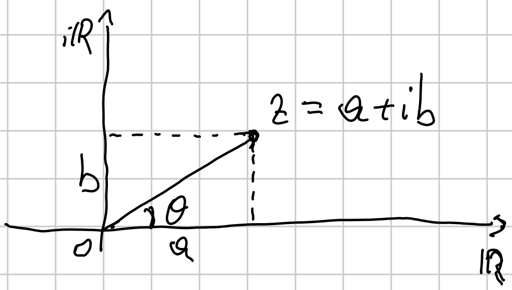
Abbiamo $R^2 - 2Rr \geq 0$

$$\boxed{R \geq 2r}$$

CALCOLATE $\overline{GH}$.

$$GH^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2).$$

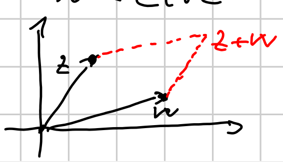
COMPLESSI



$z = a+ib \qquad a,b\in\mathbb{R}$

$$z = a+ib = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|e^{i\theta} = \left(\sqrt{a^2+b^2}\right)e^{i\theta}$$

$z = a+ib \qquad w = c+id \qquad z+w = (a+c)+i(b+d)$

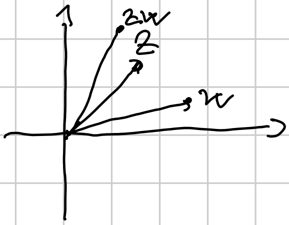


$zw = ac + (ad+bc)i + i^2 bd$ $\qquad i^2 = -1$

$zw = (ac-bd) + i(ad+bc)$

$z = |z|e^{i\theta} \qquad w = |w|e^{i\varphi}$

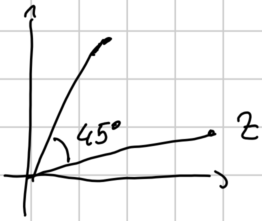
$zw = |z|\cdot|w|\cdot e^{i\theta+i\varphi} = |z|\cdot|w|\cdot e^{i(\theta+\varphi)}$

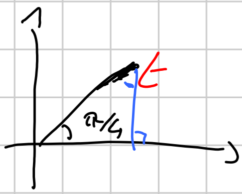


$|zw| = |z|\cdot|w|$

$i = e^{i\theta} = e^{i\pi/2}$

$-1 = e^{i\pi}$



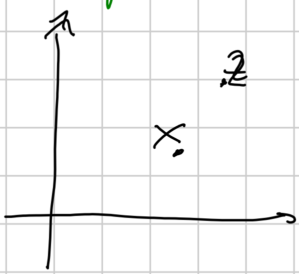


$t = a+ib \qquad |t| = 1 \Rightarrow a^2+b^2 = 1$

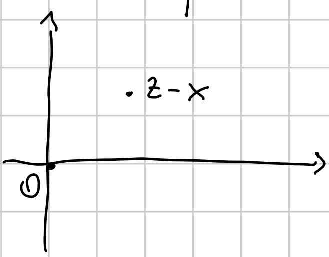
$a = b \geq 0 \qquad a = b = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad t = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$

Quindi per ruotare z di $45°$ intorno all'origine dobbiamo moltiplicarlo per $\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) = e^{i\pi/4}$.

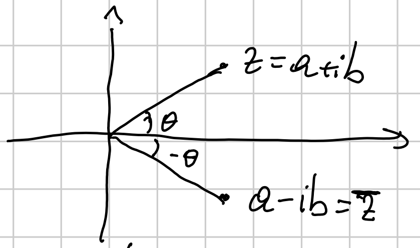
Dato x complesso come ruoto intorno ad x?



fissiamo θ



$z' = (z-x)e^{i\theta} + x$

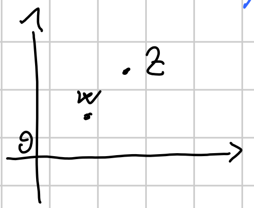


$\bar{z}$ si dice coniugio di z.

$$z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2-(ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2+b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2$$

$$z = |z|e^{i\theta} \qquad \bar{z} = |z|e^{-i\theta}$$

Cosa vol dire $z, w, 0$ allineati?

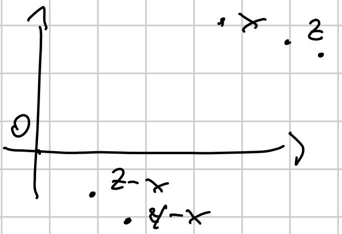


$$z = |z|e^{i\theta} \qquad w = |w|e^{i\varphi}$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = e^{2i\theta} \qquad e^{2i(\pi+\theta)} = \underbrace{e^{2i\pi}}_{1} e^{2i\theta} = e^{2i\theta}$$

Sono allineati se e solo se $\dfrac{z}{\bar{z}} = \dfrac{w}{\bar{w}}$

Cosa vol dire x, y, z allineati?



x, z, y allineati
$\Updownarrow$
$0, z-x, y-x$ allineati

$$\frac{z-x}{\overline{z-x}} = \frac{y-x}{\overline{y-x}}$$

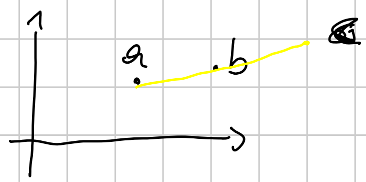
OSS: $\overline{w+t} = \bar{w}+\bar{t}$
$\overline{wt} = \bar{w}\bar{t}$

$$\frac{z-x}{\bar{z}-\bar{x}} = \frac{y-x}{\bar{y}-\bar{x}}$$

Come si trova il punto medio tra a e b?

$$m = \frac{a+b}{2}.$$

Se vogliamo riflettere un punto risp ad un altro, ad esempio a rispetto a b



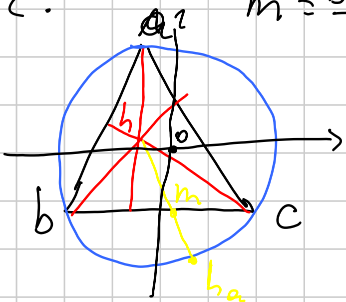
$$\frac{a+c}{2} = b \qquad c = 2b-a$$

Vogliamo riflettere $\underbrace{1+i}_{a}$ rispetto a $\underbrace{3+7i}_{b}$

$$c = 2b - a = 6+14i - 1 - i = 5+13i$$

Vogliamo dimostrare che il simmetrico dell'ortocentro H rispetto al punto medio di BC è sulla circoscritta ed è il diametralmente opposto ad A.

Sol Prendiamo come circoscritta la circonferenza unitaria. Allora $a\bar{a}=1$ $b\bar{b}=1$ $c\bar{c}=1$.
$o=0$ e $h=a+b+c$. $m=\frac{b+c}{2}$



$h_a = 2m - h$

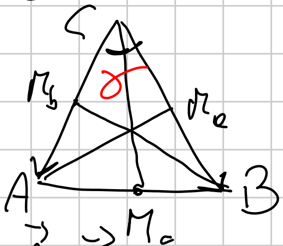
$h_a = b+c-a-b-c$

$h_a = -a$. $(-a)(\overline{-a}) = (-a)(-\bar{a}) = a\bar{a} = 1$

Inoltre $a+(-a)=0$ quindi $-a$ è il diametralmente opposto ad a.

Es: PI: 12, 22, 24
PII: 6, 10, 16
PIII: 2014 B1

P6



$$CM_c^2 + BM_B^2 + AM_A^2$$

$$\vec{M_c} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$$

$$CM_c^2 = \vec{CM_c}\cdot\vec{CM_c} = (\vec{M_c}-\vec{C})(\vec{M_c}-\vec{C}) = \left(\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}-\vec{C}\right)\left(\frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}-\vec{C}\right)$$

Origine vettoriale in $\vec{C}$

$$CM_c^2 = \frac{1}{4}(\vec{A}+\vec{B})(\vec{A}+\vec{B}) = \frac{1}{4}\vec{A}\cdot\vec{A} + \frac{1}{4}\vec{B}\cdot\vec{B} + \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{B} = \frac{1}{4}b^2 + \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{2}\vec{A}\cdot\vec{B}$$

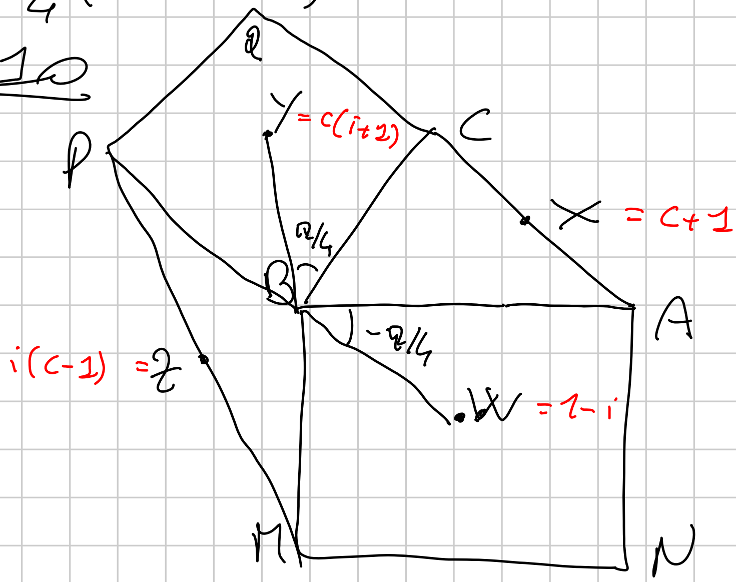
$$CM_c^2 = \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}b^2 + \frac{2}{4}ab\cos\gamma$$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \qquad 2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - c^2$

$CM_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$

$CM_c^2 + AM_A^2 + BM_B^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2 + 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2) =$
$= \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$

P10



$B = 0 \quad A = 2 \quad C = 2c$

$X = c+1$

$BW = \frac{\sqrt{2}}{2} BA$

$w = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right) = 1-i$

$Y = 2c \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right) = c(1+i)$

$m = 2(-i) = -2i$

$p = 2ci = 2ic$

$z = i(c-1)$

$w \overset{?}{=} i(y-x) + x$	$w \overset{?}{=} -i(y-z) + z$
$1-i \overset{?}{=} i(c+ci-c-1) + c+1$	$1-i = -i(c+ci-ci+i) + ci - i$
$1-i \overset{?}{=} \cancel{ic} - \cancel{c} - \cancel{ic} - i + \cancel{c} + 1$	$1-i = -\cancel{ci} + \cancel{c} - \cancel{c} + 1 + \cancel{ci} - i$

Allora YXW e YZW sono isosceli e rettangoli su base YW ⟹ XYZW è quadrato.

P16

$\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2}$ $\quad \vec{N} = \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2}$ $\quad \vec{O} = \frac{\vec{C}+\vec{D}}{2}$ $\quad \vec{P} = \frac{\vec{A}+\vec{D}}{2}$

$MO = NP \iff \|\vec{MO}\| = \|\vec{NP}\| \iff \|\vec{C}+\vec{D}-\vec{A}-\vec{B}\| = \|\vec{A}+\vec{D}-\vec{B}-\vec{C}\|$

$\vec{x} = \vec{C}-\vec{A} \qquad \vec{y} = \vec{D}-\vec{B}$

$\Updownarrow$

$\|\vec{y}+\vec{x}\| = \|\vec{y}-\vec{x}\|$

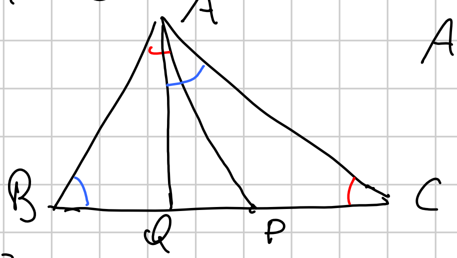
$\iff (\vec{y}+\vec{x})(\vec{y}+\vec{x}) = (\vec{y}-\vec{x})(\vec{y}-\vec{x}) \iff 4\vec{x}\cdot\vec{y} = 0 \iff \vec{x}\cdot\vec{y} = 0$

$\vec{x} = \vec{C}-\vec{A} = \vec{AC} \qquad \vec{y} = \vec{BD}$

$\Updownarrow$

$AC \perp BD \iff \vec{AC}\cdot\vec{BD} = 0$

IMO 4 2014



$ABP \sim CBA$

$\frac{BP}{AB} = \frac{BA}{CB} \qquad BP = \frac{c^2}{a}$

$\frac{BP}{BC} = \frac{c^2}{a^2}$

$\vec{P} = \frac{c^2}{a^2}\vec{C} + \frac{a^2-c^2}{a^2}\vec{B}$

$\vec{Q} = \frac{b^2}{a^2}\vec{B} + \frac{a^2-b^2}{a^2}\vec{C}$

$ACQ \sim BCA$

$\frac{CQ}{AC} = \frac{CA}{BC} \qquad CQ = \frac{b^2}{a}$

$\vec{M} = 2\vec{P} - \vec{A} = \frac{2c^2}{a^2}\vec{C} + \frac{2a^2-2c^2}{a^2}\vec{B} - \vec{A}$

$\vec{N} = \frac{2b^2}{a^2}\vec{B} + \frac{2a^2-2b^2}{a^2}\vec{C} - \vec{A}$

$BM: \lambda\left(\frac{2c^2}{a^2}\vec{C} + \frac{2a^2-2c^2}{a^2}\vec{B} - \vec{A}\right) + (1-\lambda)\vec{B}$

$CN: \mu\left(\frac{2b^2}{a^2}\vec{B} + \frac{2a^2-2b^2}{a^2}\vec{C} - \vec{A}\right) + (1-\mu)\vec{C}$

$\vec{X} = \frac{1}{2b^2+2c^2-a^2}\left(-a^2\vec{A} + 2b^2\vec{B} + 2c^2\vec{C}\right)$

$\lambda = \frac{a^2}{2b^2+2c^2-a^2} = \mu$

Resta da verificare $\vec{X}\cdot\vec{X} \overset{?}{=} R^2$ (origine in O)

$R^2(2b^2+2c^2-a^2)^2 \overset{?}{=} (-a^2\vec{A}+2b^2\vec{B}+2c^2\vec{C})(-a^2\vec{A}+2b^2\vec{B}+2c^2\vec{C})$

$$RHS = (a^4+4b^4+4c^4)R^2 - 4a^2b^2\underbrace{\left(R^2-\frac{c^2}{2}\right)}_{\vec{A}\cdot\vec{B}} - 4a^2c^2\underbrace{\left(R^2-\frac{b^2}{2}\right)}_{\vec{A}\cdot\vec{C}} +$$

$$+ 8b^2c^2\underbrace{\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)}_{\vec{B}\cdot\vec{C}}$$

$$RHS = R^2(2b^2+2c^2-a^2)^2 + \cancel{2a^2b^2c^2} + \cancel{2a^2b^2c^2} - \cancel{4a^2b^2c^2} = LHS$$

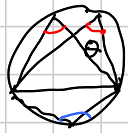
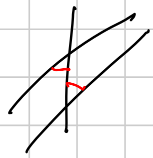
Abbiamo dimostrato che ABXC è ciclico.

Geometria 3 – Basic

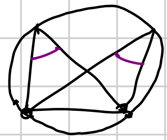
Kfp

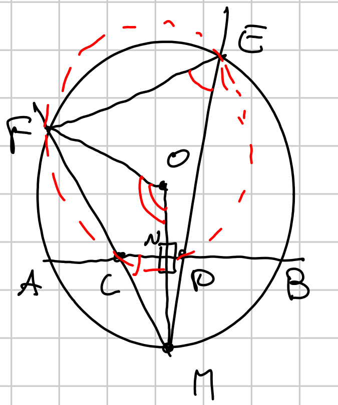
Note Title 9/7/2017

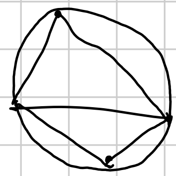
– Angoli

- somma angoli in $\triangle$ è π
-  $\widehat{BCO} = \pi - \theta$
- 

Problema di riscaldamento







TS: CDEF

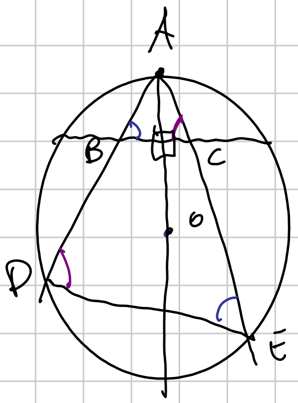
$OM \perp AB$

$\widehat{MOF} = 2\widehat{MEF}$

$\triangle MOF$ è isoscele

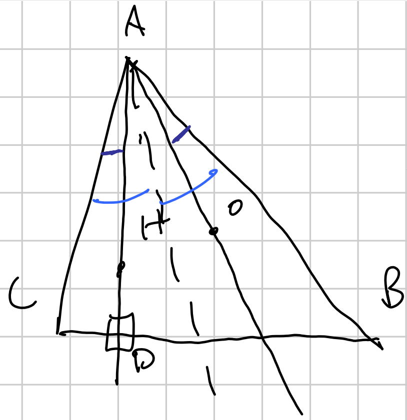
$\widehat{OMF} = \widehat{OFM}$ $\quad \widehat{OMF} = \frac{\pi - \widehat{MOF}}{2} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MEF}$

$$\boxed{\widehat{NCM}} = \frac{\pi}{2} - \widehat{OMF} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \widehat{MEF} = \boxed{\widehat{MEF}}$$



AO è altezza di $\triangle ABC$

e passa per il circocentro di $\triangle ADE$



$$\widehat{AOB} = 2\,\widehat{ACB} = 2\gamma$$

$$\widehat{OAB} = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

$$\parallel$$

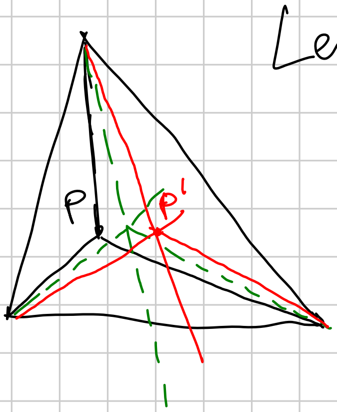
$$\widehat{CAD} = \frac{\pi}{2} - \gamma$$

O e H sono coniugati isogonali

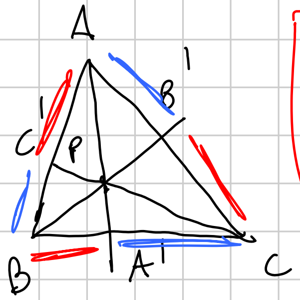
$I \longleftrightarrow I$

$G \longleftrightarrow$ Lemoine

Lemma: $\forall P$ nel piano, $\exists P'$ coniugato isogonale.

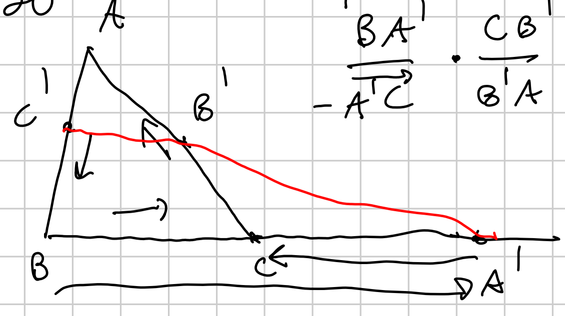


Ceva

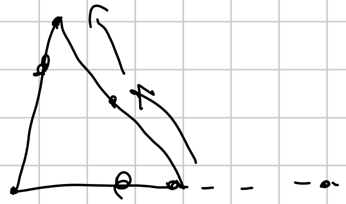


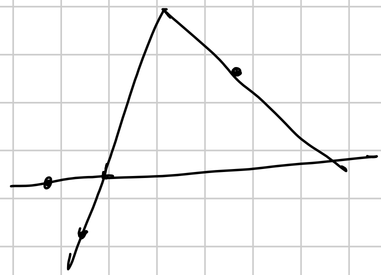
$$\boxed{\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B} = 1}$$

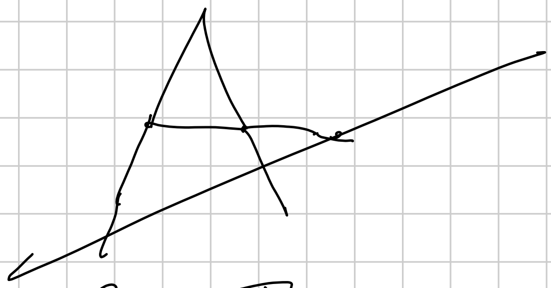
Menelao



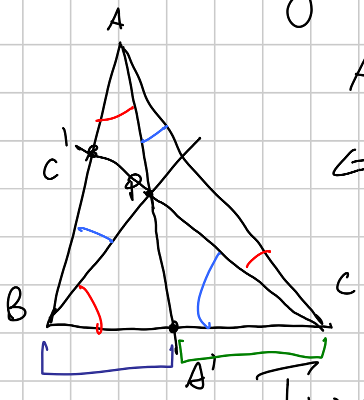
$$\frac{+\overrightarrow{BA'}}{-\overrightarrow{A'C}}\cdot\frac{\overrightarrow{CB'}}{\overrightarrow{B'A}}\cdot\frac{\overrightarrow{AC'}}{\overrightarrow{C'B}} = -1$$







Ceva Trigonometrico



AP, BP, CP concorrono

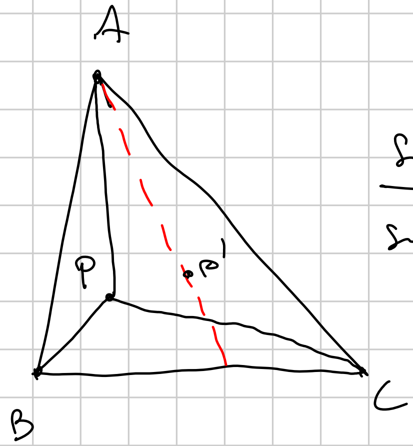
$\Longleftrightarrow$

$$\boxed{\frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{PAC}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACP}}{\sin \widehat{PCB}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBP}}{\sin \widehat{PBA}} = 1}$$

$\widehat{ABA'}$

Traccia di dim: $\dfrac{BA'}{A'A} = \dfrac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \beta}$

$$BA' = \boxed{AA'} \, \frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \beta}$$



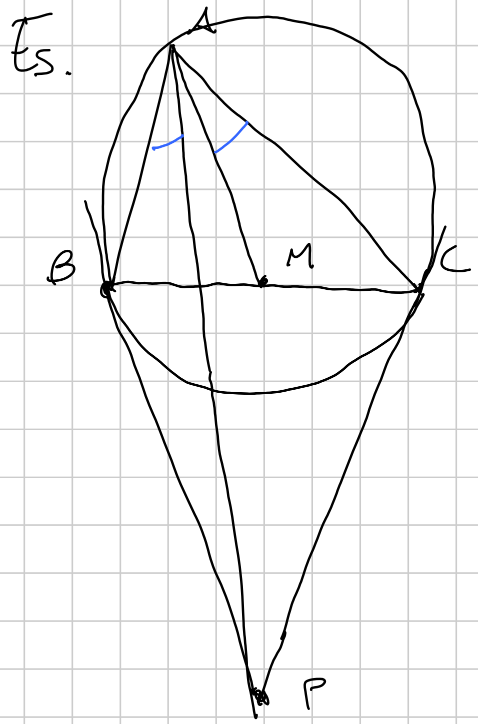
$$\frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{PAC}} \cdot \frac{\sin \widehat{ACP}}{\sin \widehat{PCB}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBP}}{\sin \widehat{PBA}} = 1$$

$\triangle$

$$\widehat{BAP} = \widehat{P'AC}$$
$$\widehat{PAC} = \widehat{BAP'}$$

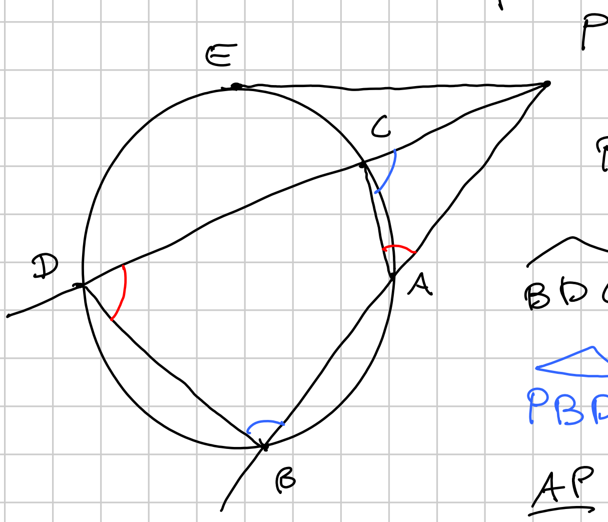
$$\frac{\sin \widehat{BAP'}}{\sin \widehat{P'AC}} = \left(\frac{\sin \widehat{BAP}}{\sin \widehat{PAC}} \right)^{-1}$$

Es.



$$\widehat{BAP} = \widehat{MAC}$$

Potenza di un punto



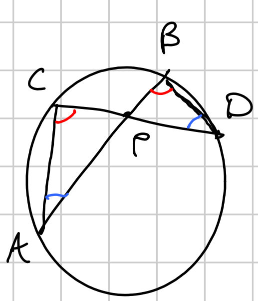
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$\widehat{BDC} = \pi - \widehat{CAB} = \widehat{CAP}$$

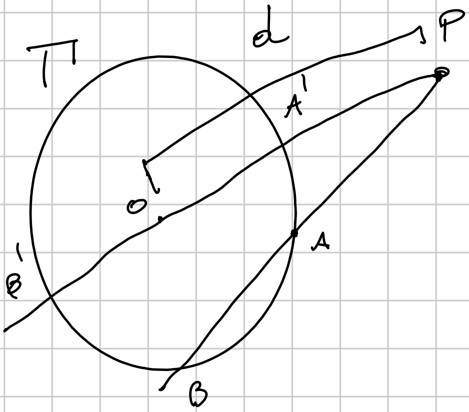
$$\triangle PBD \sim \triangle PCA$$

$$\frac{AP}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

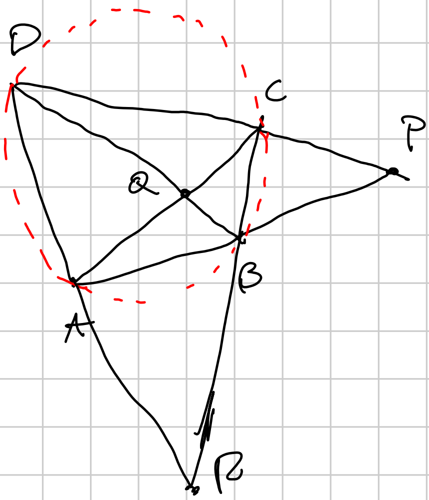
$$PA \cdot PB = PE^2$$



$$PC \cdot PD = PB \cdot PA$$



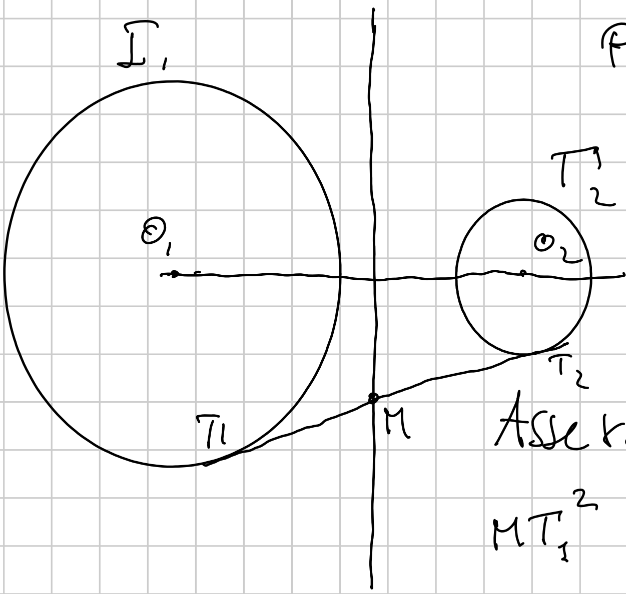
$$\mathrm{pow}_{\Pi}(P) = PA' \cdot PB' =$$
$$= (d-R)(d+R) = d^2 - R^2$$



$$PB \cdot PA = PC \cdot PD$$
$$QB \cdot QD = QA \cdot QC$$

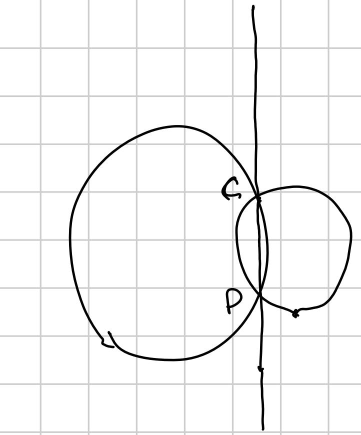
Asse radicale

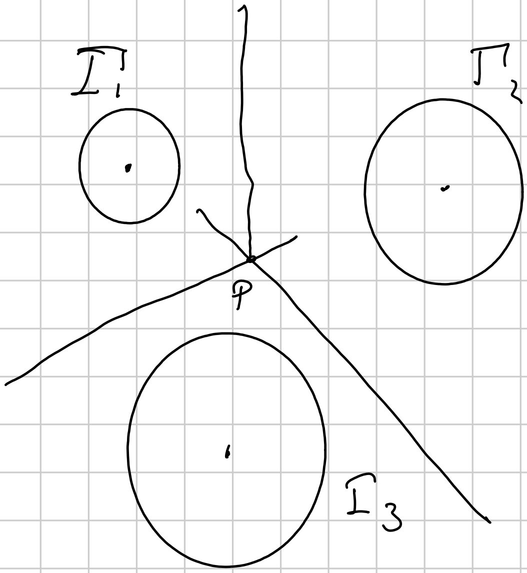
$$P: \mathrm{pow}_{\Gamma_1}(P) = \mathrm{pow}_{\Gamma_2}(P)$$



Asse radicale $\perp O_1O_2$

$$MT_1^2 = MT_2^2 \Rightarrow MT_1 = MT_2$$





r_1 As. rad. Γ_2, Γ_3

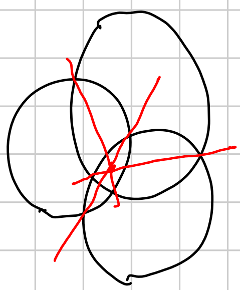
r_2

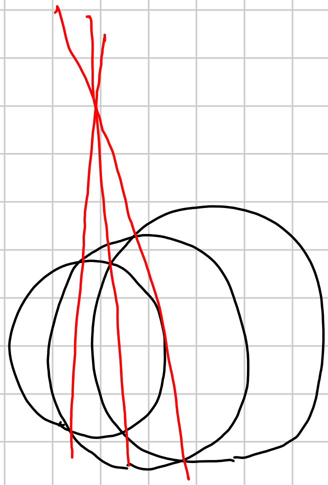
r_3

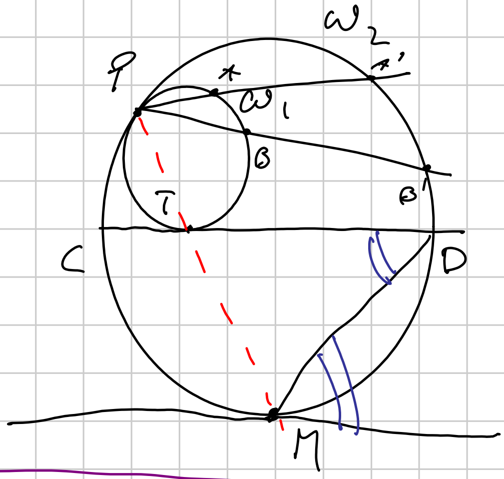
r_1, r_2, r_3 concorrono

$pow_{\Gamma_1}(P) = pow_{\Gamma_3}(P) \qquad pow_{\Gamma_3}(P) = pow_{\Gamma_2}(P)$

$$\boxed{pow_{\Gamma_1}(P) = pow_{\Gamma_2}(P)}$$







P, T, M allineati

$$\frac{PA}{PA'} = \frac{PB}{PB'}$$

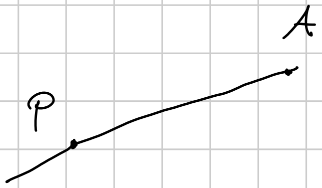
P, A, A'

CD tange ω_1 $\Rightarrow$ C'D' tange ω_2

$\widehat{CDM}$ sta su $\widehat{CM}$
l'altro sta su $\widehat{DM}$

Omotetie

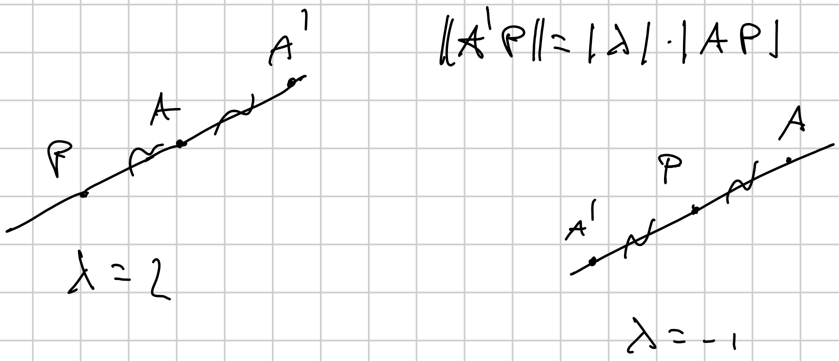
P centro $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$



$A \longrightarrow A'$

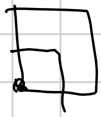
$A' \in AP$
$\lambda > 0$ semiretta PA
$\lambda < 0$ altra semiretta

$|A'P| = |\lambda| \cdot |AP|$



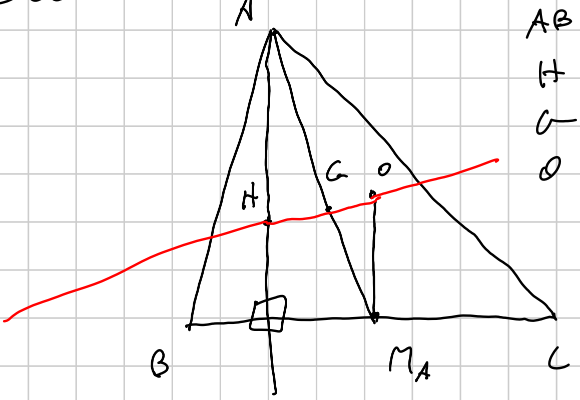
rette $\to$ rette parallele
Conserva angoli
Conserva un po' tutto
A PARTE lunghezze e aree

$\overline{AB}$ $\quad \overline{A'B'} = |\lambda|\,\overline{AB}$



Aree $\longrightarrow$ fattore λ^2

Retta di Eulero



$\triangle ABC$ triangolo

H ortocentro

G baricentro

O circocentro

$\overline{AG} = 2\,\overline{GM_A}$

Omotetia centro G $\quad \lambda = -\frac{1}{2}$

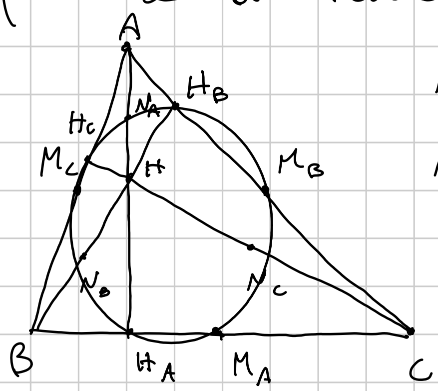
$A \longrightarrow M_A$

$AH \longrightarrow M_A O$ $\quad H \longrightarrow O$

$BH \longrightarrow M_B O$ $\quad H, G, O$ allineati

$CH \longrightarrow M_C O$ $\quad \overline{GH} = 2\,\overline{OG}$

Circonferenza di Feuerbach

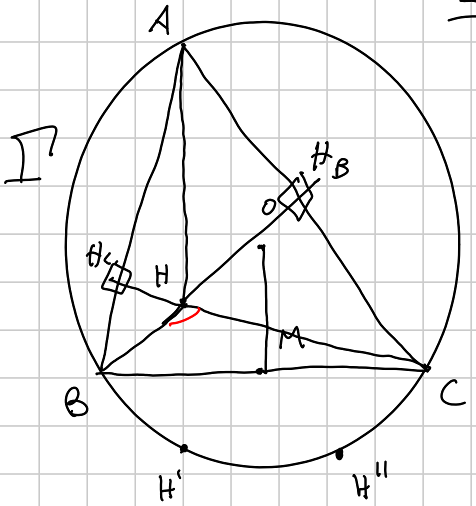


$M_A, M_B, M_C, H_A, H_B, H_C$

N_A, N_B, N_C

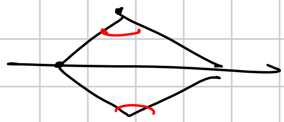
N_A pto medio di AH

Lemmi



1. • H' sym di H wrt BC
• H'' sym di H wrt M

$H', H'' \in \Gamma$



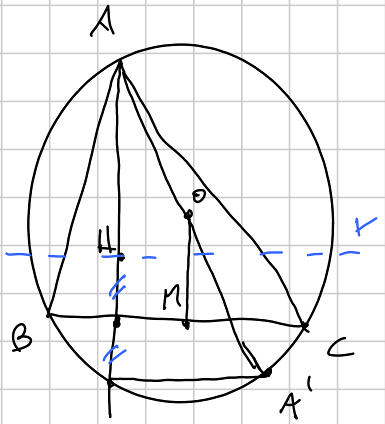
$$H' \in \Gamma \iff \widehat{BH'C} + \widehat{BAC} = \pi$$

$$\widehat{BH'C} = \widehat{BHC}$$

$$\widehat{CBH_B} = \frac{\pi}{2} - \gamma \qquad \widehat{BCH_C} = \frac{\pi}{2} - \beta$$

$$\widehat{BHC} = \pi - \widehat{CBH_B} - \widehat{BCH_C} = \beta + \gamma$$

$$\widehat{BHC} + \widehat{BAC} = \beta + \gamma + \alpha = \pi$$



Omotetia di centro A' e fattore 2

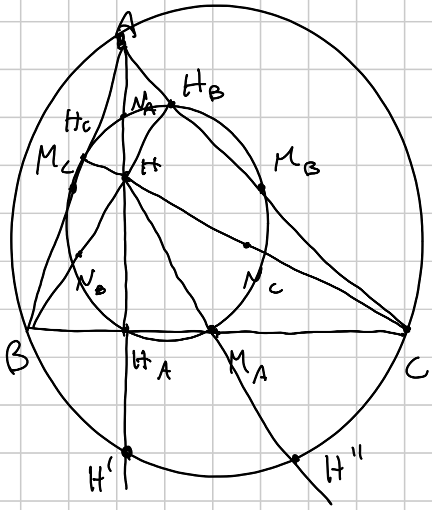
$O \longrightarrow A$

$OM \longrightarrow AH$

$(\cap M) \longrightarrow H$

$BC \longrightarrow r$

$$\boxed{\begin{array}{c} r \xrightarrow{f} r' \\ s \xrightarrow{f} s' \\ r \cap s = P \\ r' \cap s' = f(P) \end{array}}$$



$HH_A = H_A H_1$

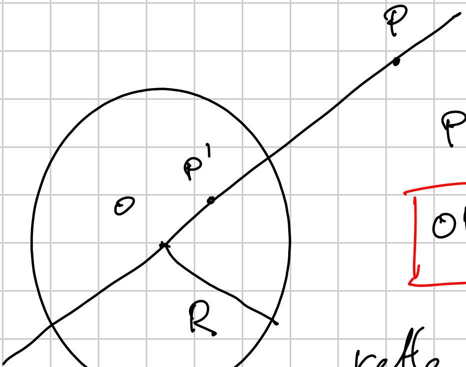
$HM_A = M_A H_{11}$

Omotetia di centro H e fattore $\frac{1}{2}$

A, B, C, H', H'' ciclici pre-omotetia.

N_A, N_B, N_C, H_A, M_A ciclici
H_B M_B
H_C M_C

Inversione (♡)



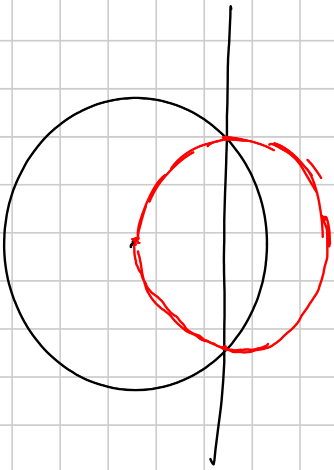
$P \to$ semiretta OP

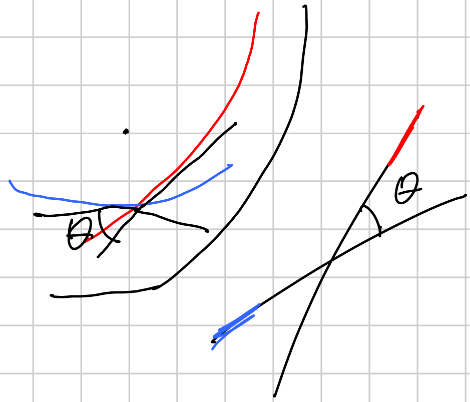
$\boxed{OP \cdot OP' = R^2}$ (involuzione)

rette passanti per O $\to$ rette passanti per O

Circonferenze non passanti per O in circ. non passanti per O.

rette non passanti per O $\longleftrightarrow$ Circonferenze per O

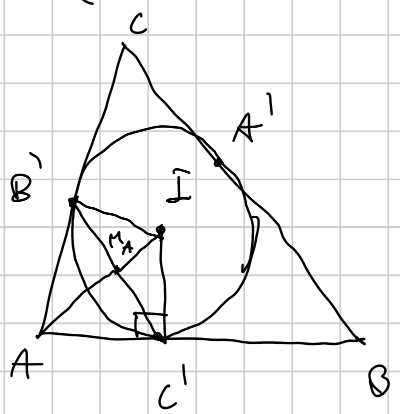




Euristica: se tanti cerchi passano per P, inverti in P.

- Inscritta

- Centro in un vertice (A) e raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$ (+simmetria wrt bisettrice in A)

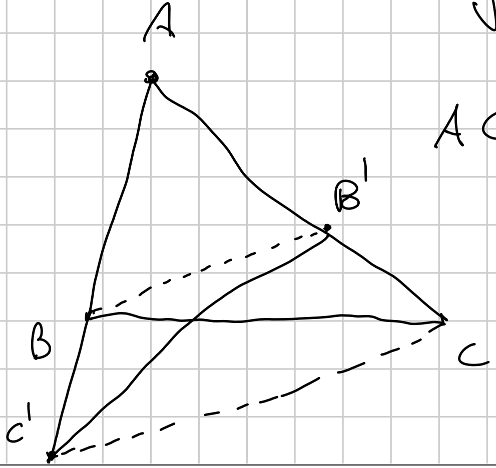


M pto medio B'C'

$A \leftrightarrow M$

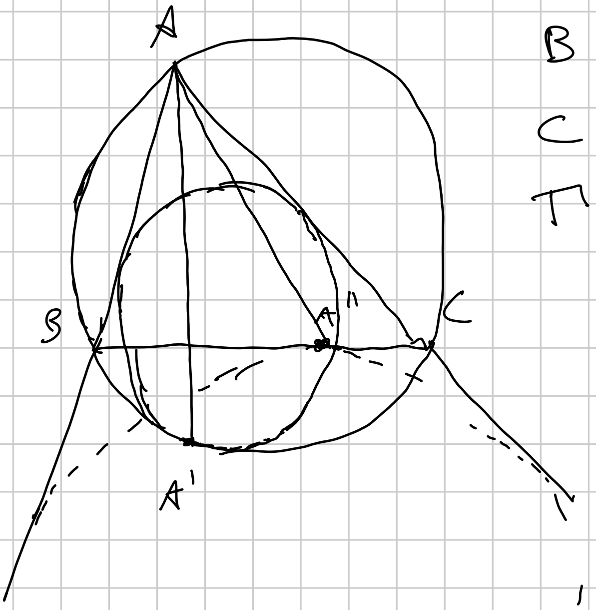
$IM \cdot IA = r^2$

II



$\sqrt{AB \cdot AC}$

$AC' \cdot \cancel{AC} = AB \cdot \cancel{AC}$



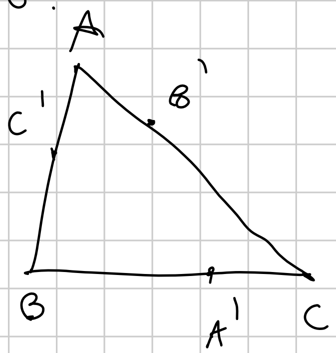
$B \longrightarrow C$

$C \longrightarrow B$

$\Gamma \longrightarrow BC$

$\widehat{BAA'} = \widehat{A''AC}$

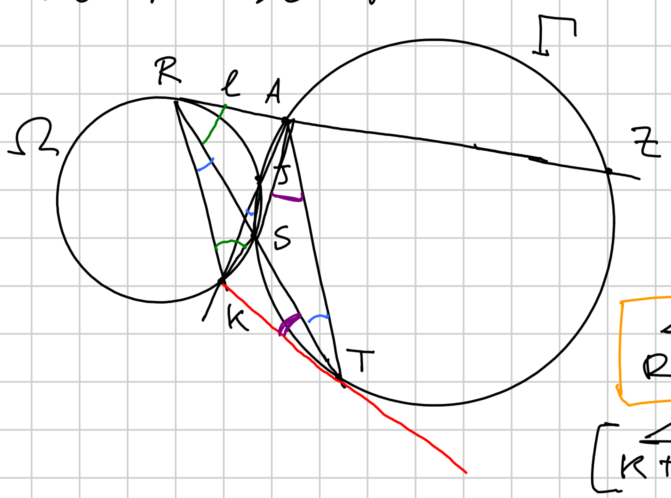
- Esercizio 36.
- (Miquel)



$\odot(AB'C')$
$\odot(BA'C')$
$\odot(CA'B')$

concorrono

IMO 4 - 2017



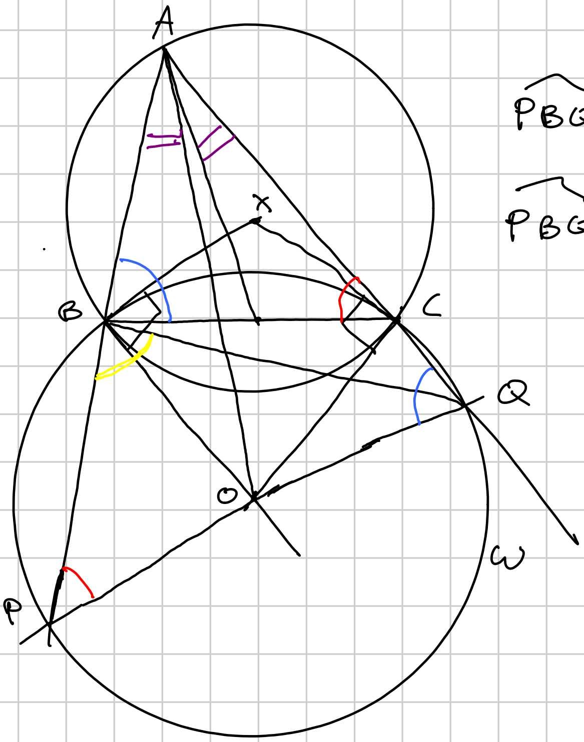
$\widehat{KRS} = \widehat{KJS} = \widehat{ATS}$

$\Rightarrow RK \parallel AT$

$\boxed{\triangle RKS \sim \triangle TRA}$

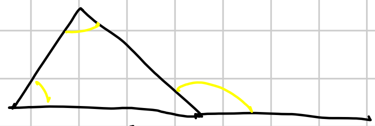
$[\triangle KTR \sim \triangle SAT]$ Equiv. alla tesi

$\iff \frac{TS}{TA} = \frac{RK}{RT} \iff \frac{RS}{TA} = \frac{RK}{RT} \iff \frac{RS}{RK} = \frac{TA}{RT}$



$\widehat{PBQ} = \frac{\pi}{2}$

$\widehat{PBQ} = \widehat{BQC} + \widehat{BAC}$



$\widehat{BQC} = \frac{\widehat{BOC}}{2}$

$\widehat{BXC} = 2\alpha$

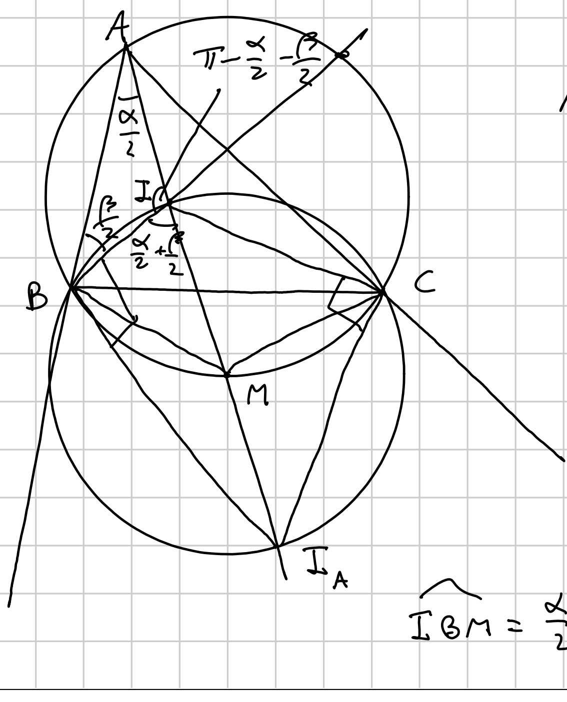
$XBOC \Rightarrow \widehat{BOC} = \pi - 2\alpha$

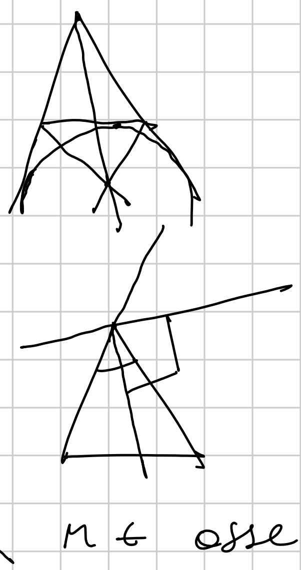
$\widehat{BQC} = \frac{\pi}{2} - \alpha$

$\widehat{PBQ} = \frac{\pi}{2} - \alpha + \underbrace{\widehat{BAC}}_{\alpha} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow AO$ mediana di $\triangle APQ$

$\triangle APQ \sim \triangle ACB$





M ∈ asse BI

(CI)

$\triangle BIM$ isoscele di vertice M

$\widehat{IBM} = \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$

Teoria dei Numeri 1 - Basic

Note Title 9/5/2017

Tess

Equazioni diofantee

trovare le soluzioni intere $3a-2b=1$

$$a^n+b^n=c^n$$

- Disuguaglianze
- Congruenze

Testo: $A=B$, riesco a dimostrare $A>B\cdot 1000$

allora non ci sono soluzioni

oppure

A è dispari, B è pari, dunque niente soluzioni

Disuguaglianze

Es: $a^n+b^n+c^n=0$ per infiniti $n>0$ interi e dispari

determinare tutti i possibili valori di a,b,c

Oss: posso prendere la variabile non più piccola e chiamarla wlog "a", $a^n=-b^n-c^n$

$$1=-\left(\frac{b}{a}\right)^n-\left(\frac{c}{a}\right)^n$$

$|a| \geq |b| \qquad |a| \geq |c|$

$\left|\frac{b}{a}\right|, \left|\frac{c}{a}\right| \leq 1$ se non avessi nessuna $=$

se $\left|\frac{b}{a}\right| \leq 0{,}999$

$\left|\frac{b}{a}\right|^n \leq 0{,}00001$ (per n abbastanza grande)

$$\left| -\left(\frac{b}{a}\right)^n - \left(\frac{c}{a}\right)^n \right| \leq \left|\left(\frac{b}{a}\right)\right|^n + \left|\left(\frac{c}{a}\right)\right|^n \leq 0{,}00002 < 1$$

$\Rightarrow$ wlog $|a| = |b|$, allora il problema è finito

non posso avere $a = b$, quindi $a = -b$

quindi $c = 0$.

TST 2014 6, siano a, b, c; p, q, r interi positivi

t.c. $a^p + b^q + c^r = a^q + b^r + c^p = a^r + b^p + c^q$

Tesi: $a = b = c$ oppure $p = q = r$

Sol: wlog $a \geq b \geq c$, $p \geq q$, $p \geq r$

without loss of generality

Ci sono 2 casi $q \geq r$, $q < r$

Caso $q \geq r$: Idea: $a^p + b^q + c^r$ sembra il membro più grande

$$a^p + b^q + c^r \overset{?}{\underset{\text{Hope}}{\geq}} a^q + b^r + c^p$$

$q = r + x \quad x \geq 0$; $p = r + x + y \quad y \geq 0$

$$\boxed{a^{r+x}(a^y - 1) + b^r(b^x - 1)} \overset{?}{\geq} \boxed{c^r(c^{x+y} - 1)}$$

$a^r \geq c^r \qquad b^r \geq c^r$

$$\square \underset{\Uparrow}{\geq} c^r \cdot a^x(a^y-1) + c^r(b^x-1) \underset{\Uparrow}{\overset{?}{\geq}} \square$$

è vera

la nuova speranza

$$a^x(a^y-1) + b^x \geq c^{x+y}$$ ...finite i dettagli.

Disuguaglianze 2.0

Se $0 < x < 1$ allora x non è intero

Es: determinare tutti gli interi n t.c.

$\frac{2017}{n+3}$ è intero

Oss: se $n >> 0$ allora $0 < \frac{2017}{n+3} < 1$

se $n << 0$ " $-1 < \frac{2017}{n+3} < 0$

Es: T1 n° 13 quanti sono gli n t.c.

$n^2 + 85n + 2017$ è $\square$

Sol: $n^2 + 85n + 2017 = a^2$

$(n+44+b)^2$

" $=(n+b)^2$ (ora cerco b)

$85n + 2017 = 2nb + b^2$

$$n = \frac{2017 - b^2}{2b - 85} \in \mathbb{Z}$$

allora

$$4n = \frac{4 \cdot 2017 - (2b)^2}{2b - 85}$$ è intero

$$4n = Q(2b) + \frac{4\cdot 2017 - (85)^2}{2b-85} \quad \square$$

Es: Cesenatico2 Dimostrare che esistono, fissato $n \in \mathbb{Z}$, solo finite terne di interi (a,b,c) t.c.

$$\begin{cases} a+b-c=n \\ a^2+b^2-c^2=n \end{cases}$$

Sol: $a = n-b+c$

$$n^2+b^2+\cancel{c^2}-2nb+2nc-2bc+b^2-\cancel{c^2}=n$$

$$b^2-bc-nb+nc+\frac{n^2-n}{2}=0$$

ora $c = \dfrac{b^2-nb+\frac{n^2-n}{2}}{b-n} \in \mathbb{Z}$

$$c-b = \frac{\frac{n^2-n}{2}}{b-n} \in \mathbb{Z}$$ ho solo finite possibilità per b

---

$c = a+b-n$

$$a^2+b^2-(a+b-n)^2=n$$

$$-n^2-2ab+2an+2bn=n$$

$$-2(a-n)(b-n)+n^2=n$$

$$(a-n)(b-n)=\frac{n^2-n}{2}$$ ...fine

$$a-c=n-b$$

$$a^2-c^2=n-b^2$$

$$a+c=\frac{n-b^2}{n-b}=Q(b)+\frac{n-n^2}{n-b}$$ ....fine.

Congruenze

$a \mid b$ "a divide b" $\exists\, c \in \mathbb{Z}$ t.c. $b = ac$

$(n \mid 0\ ,\ 1 \mid n\ ,\ -1 \mid n)$

p è un numero primo quando

$p > 1$ intero, $p = ab \Rightarrow p = a \vee p = b$

$p \mid ab \Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$

Dato n intero $a \equiv b$ è una relazione di equivalenza

$\iff n \mid a - b$

$\iff$ il resto della divisione tra a e n e " b e n è lo stesso

si usa lavorare con dei rappresentanti:

$0, \dots, n-1$ oppure $-\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \dots, \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

a meno di off by 1

Le operazioni vengono rispettate!

- se $a \equiv b$ e $c \equiv d \Rightarrow a + c \equiv b + d$
- " $\Rightarrow ac \equiv bd$

Non è vero che: $\cancel{\frac{a}{c} \equiv \frac{b}{d}}$

$$\cancel{a^c \equiv b^d}$$

Es: $5a \equiv 5b \quad (6)$

$\Rightarrow a \equiv b \quad (6)$

infatti moltiplicando per 5 entrambi i membri

ottengo, $25 \equiv 1 \quad (6)$

Es: $5a \equiv 5b \quad (10)$

$\cancel{\Rightarrow} \; a \equiv b \quad (10)$

$\Rightarrow a \equiv b \quad \left(\frac{10}{5}\right)$

In generale, per dividere per a, cerchiamo un intero b t.c. $a \cdot b \equiv 1 \quad (n)$

$\Longleftrightarrow n \mid ab-1 \Longleftrightarrow \exists\, k$ t.c. $ab+nk=1$

"si può dividere per a mod n" $\Leftrightarrow \exists\, b, k$ t.c. $ab+nk=1$

$\Leftrightarrow ax+ny=1$ ha soluzioni intere.

Oss: se $d \mid a$, $d \mid n \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = \pm 1$

deve essere $(a,n)=1$

$$(\,\mathrm{MCD}(a,n)=1\,)$$

Oss. generalizzante: se avessi avuto questa diofantea $ax+by=c$, la condizione sarebbe stata $(a,b) \mid c$

Th (Bezout): se $(a,b) \mid c \Rightarrow \exists\, x,y$ interi t.c. $ax+by=c$

Dim: intanto se so risolvere per $c=1$, so risolvere tutto: siano x_0, y_0 soluzioni $ax_0+by_0=1$

allora cx_0, cy_0 " $ax+bx=c$

si dimostra per induzione estesa su $|a|+|b|$

si usa la divisione euclidea

$a=qb+r$ con $0 \leq r < b$

$ax+by=1$

$(qb+r)x+by=1$

$rx+b(y-qx)=1$

è del tipo $ax+by=1$ con $a \leftarrow r,\ b \leftarrow b$

Per ipotesi induttiva $\exists\, x_0, y_0$ t.c.

$rx_0+by_0=1$

ma allora ponendo $x=x_0$, $y=y_0+qx_0$, risolvo l'equazione di partenza

Attenzione al P.B: è quando $a=0 \vee b=0$

Th (Wilson): $(p-1)! \equiv -1 \quad (p)$

Dim: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2) \cdot (p-1) = (p-1)!$

Oss: posso accoppiare elementi inversi

Verifica 1: $a \not\equiv b \Rightarrow a^{-1} \not\equiv b^{-1}$

sono gli inversi moltipl.

$$a^{-1} \equiv b^{-1}$$

$$\Rightarrow a a^{-1} \equiv a b^{-1}$$

$$\Rightarrow 1 \equiv a b^{-1}$$

$$\Rightarrow b \equiv a (b^{-1} b)$$

Verifica 0: se x, y sono entrambi inversi di a

$$\Rightarrow x \equiv y$$

Verifica 2: $a \not\equiv a^{-1}$ tranne che se

$$a \equiv a^{-1} \Leftrightarrow a^2 \equiv 1$$

$$(a-1)(a+1) \equiv 0 \quad (p)$$

$$\Rightarrow p \mid (a-1)(a+1)$$

$$\Rightarrow a \equiv 1 \quad \vee \quad a \equiv -1$$

Ora tutto si semplifica e ottengo

$$(p-1)! \equiv (p-1) 1$$

Residui di quadrati o di potenze

Es: mod 3 : $\cdot$ 0, 1, 2
$\square$: 0, 1, 1 $\Rightarrow$ $3a-1=b^2$

Verificate per esercizio che non tutte le classi di resto sono possibili come residui quadratici mod 4, 5, 7, 8

Es: mod 7 : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6
$\square$: 0, 1, 1, −1, 1, −1, −1

Es (IMO 2017.1) : a_0 fissato

e $a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{se } a_n \text{ è } \square \\ a_n + 3 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Sol: Oss: la congruenza mod 3 gioca un ruolo importante

Oss: se $a_0 \equiv 0 \ (3) \Rightarrow a_n \equiv 0 \ (3)$

(induzione di 1 riga)

Oss: se applico (definit.) solo la seconda mossa allora a_0 non soddisfa la tesi

Per esempio $a_0 \equiv -1 \ (3)$

Rimane $a_0 \equiv 1$

Per induzione su a_0, mi riconduco sempre al caso $a_0 \equiv -1$ ($a_n \equiv -1$)

Esercizi:

P. 10 : 40, 41 (42, 43) 46, 49, 55

P. 42 : 2, 3, 6, 8

Bonus 1 : trovare tutte le terne (a,b,c) di razionali t.c.
$$7 = a^2+b^2+c^2$$

Bonus 42: $x,y>0$ interi, risolvere
$$x^3+y^3 = x^2+42xy+y^2$$

Hint: – trovare bound dall'alto
– semplificare i casi con accortezze.

Correzione

es 40 $\quad (x-y)(x+y)=2000$

oss: $x-y \equiv x+y \ (2)$

$(a-\dots)(b-\dots) = \dots$

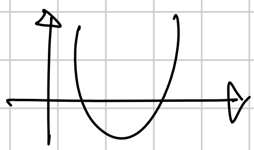
$(n+2)(m-1) = \dots$

es 41 $\quad \dfrac{n+7}{2n+1} \in \mathbb{Z} \iff \dfrac{2n+14}{2n+1} \in \mathbb{Z}$

$\iff \dfrac{13}{2n+1} \in \mathbb{Z}$

$-1 \overset{?}{<} \dfrac{3(5-n)}{2n^2+1} \overset{?}{<} 1$, stare attenti al caso $=0$

$-2n^2-1 < 15-3n$, $\quad P(n)>0$



es 46 : $5x+8y=22$ $\quad(-3,2)=1 \longrightarrow (-66,44)$ $\quad +n8 \quad -n5$

$5x+3y=1$ $\quad(-1,2)$

$2x+3y=1$ $\quad(-1,1)$

guardare le sol. di $5x+8y=0$ $\quad (8n,-5n)$

es 49: $24 \mid n(n^2-1)(5n+2)$

$3 \mid (n^3-n)$

$8 \mid$ $\quad n=0,1$ guardo n mod 2

$n(n-1)\cdot(n+1)(5n+2)$

meglio guardare n mod 4 (meno casi)

es 55: $3^y-x^2=41$

mod 4 ; $(-1)^y-x^2\equiv 1$

-1	0	$\equiv -1$
-1	-1	-2
1	0	1
1	-1	0

$2 \mid y$ $\quad \left(3^{\frac{y}{2}}-x\right)\left(3^{\frac{y}{2}}+x\right)=p$ ....

Es 2: per quali p, $x^2+px-444p$ ha sol. intere

$\Rightarrow \underset{\|}{\Delta} = \square$

$p^2+4\cdot 444p = a^2$

mod p, $a^2\equiv 0 \Rightarrow a\equiv 0 \Rightarrow a=pb$

$$p + 4 \cdot 444 = p b^2$$

mod p, $p \mid 4 \cdot 444$ ...

Es 3 trovare a t.c. $59 \mid 2002a + 3$

$$2002a + 3 \equiv 0$$
$$-4a \equiv -3$$
$$4a \equiv 3$$

$$15 \cdot 4 \equiv 60 \equiv 1 \quad (59)$$
$$a \equiv 3 \cdot 15$$

Es 6: $\mathrm{MCD}\left(\{ p^4 - q^4, \; p, q > 10 \text{ primi} \}\right)$

provo con $p = 13$, $q = 11$
e ottengo $2 \cdot 24 \cdot 290 = 2^5 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 29$

se scelgo $p = 29$ $q \neq 29$, il 29 sparisce!

neanche 2^5 è il bound corretto

$2^4 \cdot 3 \cdot 5$,

$$(p-q)(p+q)(p^2+q^2)$$

mod 3 $p, q \equiv 1, 2$

mod 5 non sono tanti casi

(p,q)

$q \backslash p$	1	2	3	4
4	✓	✗	✗	✓
3	✓	✓	✓	✗
2	✓	✓	✗	✗
1	✓	✗	✗	✗

Es 8 $\max\{(\underset{d_n}{100 + n^2}, 100 + n^2 + 2n + 1)\} = ?$

$$(100 + n^2, 100 + n^2 + 2n + 1) =$$
$$(100 + n^2, 2n + 1) =$$
$$(4 \cdot 100 + (2n)^2, 2n + 1) =$$

$(401 \quad , 2n+1) \mid 401$

$d_n \leq 401$, provo $n = 200$ per vedere che $d_n = 401$

Bonus 1 $\quad a^2+b^2+c^2 = 7d^2$ (assumo $MCD = 1$, a meno di semplif.)

perché $d \neq 0$

mod 4 ci sono 2 r.q.

mod 8 " 3 r.q. $\to 0, 1, 4$

$a^2+b^2+c^2+d^2 \equiv 0$

$\Rightarrow a, b, c, d$ sono pari

ma avevo assunto $(a,b,c,d) = 1$

Bonus 42 (BMO 2017.1) $\quad x, y > 0$

$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2$$

uso disug. cerco di dire che LHS > RHS

$$RHS = (x+y)^2 + 40xy \leq (x+y)^2 + 40\left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$
$$= 11\,(x+y)^2$$

ora so che vale la dis.

$$x^3+y^3 \leq 11 \cdot (x+y)^2$$

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 \leq x^2 - xy + y^2 \overset{?}{\leq} 11 \cdot (x+y)$$

$$x^2+2xy+y^2 \leq 4x^2 - 4xy + 4y^2$$
$$6xy \leq 3x^2 + 3y^2 \quad \checkmark$$

Quindi: ho che

$$\frac{1}{4}(x+y)^2 \leq 11 \cdot (x+y)$$

$$\Longrightarrow \quad x+y \leq 44$$

$0 < x$, $0 < y$, $x+y \leq 44$

Ora, per diminuire i casi, uso <u>congruenze</u>

Metodo alternativo:

$$x^3+y^3 = x^2+42xy+y^2$$

$s = x+y$, $p = xy$

$$s^3 - 3sp = s^2 + 40p$$

$$p = \frac{s^3-s^2}{3s-40} \qquad \text{.... fine!}$$

Teoria dei Numeri 2 - Basic

Note Title 9/6/2017

Tess

Es: quanti sono gli interi $2001 \leq n \leq 2099$ t.c.

(TI 14) $$1 + n + \frac{n^2}{2!} + \frac{n^3}{3!} + \frac{n^4}{4!} + \frac{n^5}{5!} + \frac{n^6}{6!} \in \mathbb{Z}$$

Sol: Oss: $6!\, p(n) \in \mathbb{Z}$

Idea: guardare ogni primo

(sono solo $p \mid 6!$, $2, 3, 5$)

Proviamo con $p=5$

$$\underbrace{6! + 6!n + \frac{6!}{2!}n^2 + \dots}_{} + 6 \cdot n^5 + n^6 \equiv 0 \quad (5)$$

$$n^5 + n^6 \equiv 0 \quad (5)$$

$$\iff 5 \mid n^5 \cdot (n+1) \iff 5 \mid n \ \vee \ 5 \mid n+1$$

$$\iff n \equiv 0 \ \vee \ n \equiv -1 \quad (5)$$

Proviamo con $p=3$

dovrei guardare mod 9, intanto guardo mod 3

.... $3 \mid n^6 \implies n \equiv 0 \ (3)$

lo stesso si vede per $p=2$, $n \equiv 0 \ (2)$

$$\begin{cases} n \equiv 0 & (2) \\ n \equiv 0 & (3) \\ n \equiv 0 & (5) \end{cases} \qquad \begin{cases} n \equiv 0 & (2) \\ n \equiv 0 & (3) \\ n \equiv -1 & (5) \end{cases}$$

Th (Cinese del resto):

se ho un sistema di congruenze:

$$\begin{cases} x \equiv a_1 & (m_1) \\ x \equiv a_2 & (m_2) \end{cases}$$

se $(m_1, m_2) = 1$ allora $\exists$ unica sol. x modulo $m_1 \cdot m_2$

Dim: cerco $x = h m_1 + a_1$

voglio trovare h t.c. $x \equiv a_2 \ (m_2)$

$$h m_1 + a_1 \equiv a_2 \quad (m_2)$$

$$h m_1 \equiv a_2 - a_1$$

$\exists$ l'inverso molt. di m_1 mod m_2 (m_1, m_2 sono coprimi)

$$\Rightarrow h \equiv (a_2 - a_1) m_1^{-1} \quad (m_2)$$

Ora $x = h m_1 + a_1$ sicuramente funziona

Per l'unicità: supponiamo che x_0, x_1 siano soluzioni del sistema, allora

$$x_0 \equiv x_1 (m_1 \cdot m_2) \iff m_1 m_2 \mid x_0 - x_1$$

$$\iff m_1 \mid x_0 - x_1 \;\wedge\; m_2 \mid x_0 - x_1$$

perché $(m_1, m_2) = 1$

ma queste condizioni traducono l'ipotesi.

Oss: Cosa faccio se mi ritrovo moduli non coprimi?

Es: $\begin{cases} x \equiv 7 & (10) \\ x \equiv 8 & (15) \end{cases}$

$\rightarrow \begin{cases} x \equiv 7 & (2) \\ x \equiv 7 & (5) \\ x \equiv 8 & (3) \\ x \equiv 8 & (5) \end{cases}$ problema $\Rightarrow$ No soluzioni

Es: (IMO 2016.4)

$P(n) = n^2 + n + 1$ det. il min b t.c.

$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$ sia "profumato"

per un opportuno a intero non negativo.

Sol: [...]

min $b = 6$

non si fa di meglio usando tecniche di N1 vedi N1.8

si ricava che $(p(n), p(n+1)) = 1$

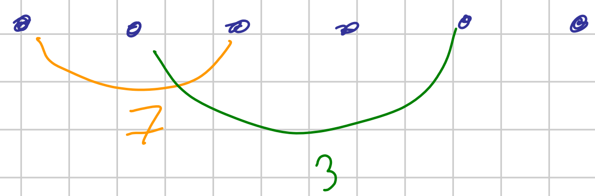
$$(p(n), p(n+2)) \mid 7$$

$$(p(n), p(n+3)) \mid 3$$

$\vdots$

se $n \equiv 2 \ (7)$ allora ho il 7

se $n \equiv \_\_ \ (3)$



Per il th cinese:

$$\begin{cases} a+1 \equiv 2 & (7) \\ a+2 \equiv \_\_ & (3) \end{cases}$$

$\square$

Potenze mod n

Non è vero che $a \equiv b$, $c \equiv d \ (n) \Rightarrow a^c \equiv b^d \ (n)$

Però osserviamo che $a^0, a^1, a^2 \dots$ è definit. periodica

Dim:

Oss1: $a^{n+1} \equiv f(a^n) \quad (m)$

Oss2: per Pigeonhole devono esistere $n_1, n_2 \geq 0$ t.c. $a^{n_1} \equiv a^{n_2} \quad (m)$

Quindi: Oss 1 + Oss 2 $\Rightarrow$ la succ. è periodica

Oss: qualche volta il periodo inizia subito.

Se $(a, m) = 1$ allora $a^{n_1} \equiv a^{n_2}$

ottengo $a^{n_1 - 1} \equiv a^{n_2 - 1}$

$\cdots\cdots a^0 \equiv 1 \equiv a^{n_2 - n_1}$

Quando $m = p$ un primo succede sempre se $a \not\equiv 0$

Oss: ora so solamente che $\exists \; n_1, n_2 \leq m+1$ e dipendono in modo misterioso da a

La ϕ di Eulero

La ϕ è una funzione $: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{N}$

$$\phi(n) = \left| \{ 0 < m \leq n : (m, n) = 1 \} \right|$$

Es: $n = 5$ $\quad 1, 2, 3, 4, \cancel{5}$ quali sono primi con 5? (tutti)

$\Rightarrow \phi(5) = 4$

$n = 10$ $\quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \cancel{10}$ " 10

$\phi(10) = 4$

Oss: se $n = p$ un primo, $\phi(p) = p-1$

$n = p^2$, $\phi(p^2) = (p-1)\frac{p^2}{p} = p^2 - p^{2-1}$

Oss: Quanto vale $\sum_{d \mid n} \phi(d) = ?$ $\underline{\underline{n}}$

Es: $n = 10$

$d = 1, 2, 5, 10$

$\phi(d) = 1, 1, 4, 4$

$\sum \phi(d) = 10$

$n = p$ $\quad \sum \phi(d) = \phi(1) + \phi(p) = 1 + p - 1 = p$

Dim: $n = 10$ $\quad 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$

- primi con 10
- $(d, n) = 2$
- $(d, n) = 5$
- $(d, n) = 10$

x casa: scrivetela per bene.

Fatto: la funzione ϕ è moltiplicativa

$$\phi(ab) = \phi(a)\phi(b) \quad \text{se } (a,b) = 1$$

Dim: induzione estesa

Es $n = 10 = 2 \cdot 5$

$10 = \phi(10) + \phi(5) + \phi(2) + \phi(1)$

$$\begin{cases} 5 = \phi(5) + \phi(1) \\ 2 = \phi(2) + \phi(1) \end{cases}$$

$10 = \phi(5)\phi(2) + \underline{\phi(5)\phi(1)} + \underline{\phi(2)\phi(1)} + \underline{\phi(1)\phi(1)}$

$+ \phi(5\cdot 1) + \phi(2 \cdot 1) + \phi(1 \cdot 1)$

il confronto di ↗ ↗ conclude

Ora so calcolare la ϕ ovunque

Es: $\phi(12) = \phi(4)\phi(3) = 2 \cdot 2 = 4$.

Th (Eulero-Fermat):

Sia $(a, m) = 1$ mi stavo chiedendo quali potessero essere i periodi della succ. $a^0, a^1, \dots$

$$a^{\phi(m)} \equiv 1 \quad (m)$$

Dim: Idea: → $n_1, n_2, \dots, n_{\phi(m)}$ sono le classi di resto coprime

→ $an_1, an_2, \dots, an_{\phi(m)}$

Oss: → ho ancora classi prime con m

Oss: → le classi scritte sono tutte distinte:

$$a n_i \equiv a n_j$$

$$\Rightarrow n_i \equiv n_j \quad \text{(molt. per } a^{-1}\text{, che esiste...)}$$

Idea: moltiplico $\longrightarrow$ c $\longrightarrow$

$$n_1 \cdot \ldots \cdot n_{\phi(m)} \equiv a^{\phi(m)} \cdot n_1 \cdot \ldots \cdot n_{\phi(m)} \quad (m)$$

da cui ... $\quad 1 \equiv a^{\phi(m)}$ $\square$

Th (Piccolo Teorema Fermat)

se $m = p$ $\qquad 1 \equiv a^{p-1}$ se $p \nmid a$

$\qquad\qquad a \equiv a^p \quad \forall a$

Oss fondamentale: i periodi delle potenze di a $\boxed{\text{dividono}}$ $\phi(m)$

$$\underbrace{a^0, a^1, \ldots, a^d}_{\text{ho il periodo}}, \ldots \ldots, a^{\phi(m)}$$

$$a^0 = 1, \quad a^d = 1, \quad a^{\phi(m)} = 1$$

Def: l'intero d che sia il + piccolo > 0 t.c. $a^d \equiv 1 \; (m)$ si chiama $\text{ord}_m(a)$

Oss di prima: $\mathrm{ord}_m(a) \mid \phi(m)$

Es: N2.10

$$D = \{ n : n \mid 2^n + 1 \}$$

Sol: sia $n \in D$

$\to 2^n \equiv -1 \quad (n)$

$\boxed{2}^{\boxed{2n}} \equiv 1 \quad (n)$

$\mathrm{ord}_n(2) \mid 2n$

$\mid \phi(n)$

$\to \mathrm{ord}_n(2) \nmid n$

sia p un primo che $\mid n$ allora

$2^n \equiv -1 \quad (n) \Rightarrow 2^n \equiv -1 \quad (p)$

$\mathrm{ord}_p(2) \mid 2n$

$\mathrm{ord}_p(2) \mid \phi(p) = p-1$

se prendevo p il + piccolo primo $\mid n$

allora $(p-1, n) = 1$

chi sarà $(p-1, 2n) \mid 2$

$\Rightarrow \mathrm{ord}_p(2) \mid 2$

$\Rightarrow \quad 2^2 \equiv 1 \quad (p) \qquad$ (def. di $\mathrm{ord}_p(2)$)

$p = 3$

Domanda: se è vero che $a^{p-1} \equiv 1 \quad (p)$
esistono interi a di ordine
esattamente $p-1$? SÌ (non ovvissimo)

" $\quad a^{\phi(n)} \equiv 1 \quad (n)$

" $\quad \mathrm{ord}_n(a) = \phi(n)$?

Non sempre...

La risposta alla 1ª domanda porta a

Def: se $\mathrm{ord}_p(a) = p-1$ $\quad a$ è "generatore" mod p
cioè $\{a^0, a^1, \dots, a^{p-2}\} = \{1, 2, \dots, p-1\}$

Domanda: $\mathbb{Z}/p \longrightarrow \mathbb{Z}/p \quad$ ($\mathbb{Z}/p$ sono le classi di resto mod p)

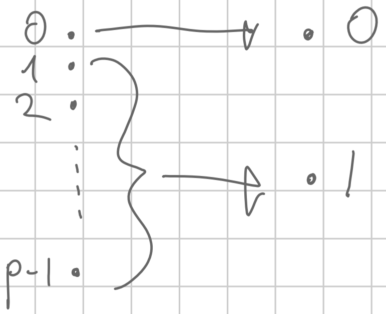
$$n \longmapsto n^2$$

$$n \longmapsto n^3$$

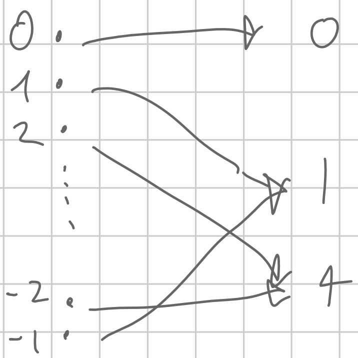
$$n \longmapsto n^a$$

Quand'è che queste funzioni sono iniettive/surgettive?

Nel caso $a = p-1$ ottengo sempre 1 (oppure 0)



nel caso $a = 2$



Stesso discorso per tutti i $d \mid p-1$

Se invece $(a, p-1) = 1$ allora la mappa è iniet.

mi chiedo l'iniettività $r_1^a \stackrel{?}{\equiv} r_2^a \quad (p)$

$$r_1^{a+(p-1)} \equiv r_2^{a+(p-1)} \quad (p)$$

assunto $\boxed{r_1, r_2 \not\equiv 0}$ $(r_1 \cdot r_2^{-1})^a \equiv 1 \quad (p)$

$$x^a \equiv 1 \quad (p)$$

però $\boxed{(a, p-1) = 1}$ esiste $b = a^{-1} \bmod p-1$

$\exists\, b$ t.c. $ab \equiv 1 \ (p-1)$

$1 \equiv (x^a)^b \equiv x^{ab} \equiv x^{1+h(p-1)} \equiv x^1$

$\Rightarrow \quad 1 \equiv x \quad \Rightarrow \quad r_1 \equiv r_2$

Ancora disuguaglianze!

Fatto ovvio: $\quad n \mid m \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ |n| \leq |m| \end{cases}$

Es: BMO 2017.3

Trovare tutte le funzioni $f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m) \qquad \forall\, n, m > 0$$

Sol: Oss: $\quad n \mid m \Rightarrow n \mid m - n$

$$n + f(\boxed{m}) \mid [f(n) + nf(m)] - (n + f(m))n$$
$$\mid f(n) - n^2$$

no m

Ora fisso $n = n_0$ e vedo che succede

$$n_0 + f(m) \mid f(n_0) - n_0^2$$

uso la dis: $\quad f(n_0) - n_0^2 = 0$

$$n_0 + f(m) \le |f(n_0) - n_0^2|$$

$$\Downarrow$$

$$f(m) \le C \qquad \forall m$$

Ora sappiamo che $f(m)$ è limitata

oppure $f(n) = n^2$ sempre

Caso

Oss: per pigeonhole, $\exists\, a \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.

per ∞ valori di m $f(m) = a$

Prendo al posto di n questi valori

$$n + f(m_0) \mid a + n f(m_0)$$

$$n + f(m_0) \mid \big(a + n f(m_0)\big) - \big(n + f(m_0)\big) f(m_0)$$

$$\mid a - f(m_0)^2$$

$$a = f(m_0)^2$$

$$n + f(m_0) \le |a - f(m_0)^2|$$

$$n \le C$$

Caso assurdo

Quindi: $a = f(m)^2$ per ogni m.

Esercizi

P.12 61, 66

P.43 4, 9, 10(c), 10(b)

P.42 10

Bonus 3

Dimostrare che NON esistono generatori mod $p \cdot q$ con $p, q > 2$ primi distinti

Bonus 1 (TF 2016)

Quanto vale $\sum_{k=0}^{1000} k^{2076}$ mod 11?

Bonus 2

Trovare tutte le $f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ t.c.

i) $f(n!) = f(n)! \quad \forall n$

ii) $m-n \mid f(m)-f(n) \quad \forall m, n$

Correzione

Es 61 $\quad 5^n + 3^n + 1 =$ primo $\Rightarrow 12 \mid n$

Oss: mod m $\quad 5^n$ e 3^n (e 1) sono periodiche mod qualcosa, sicuramente mod $\phi(m)$

Cerco m t.c. $4 \mid \phi(m)$

e $3 \mid \phi(m)$ (anche m diversi)

Però, sicuramente scelgo m una potenza di primo (Per il th Cinese)

[sol: $m = 5, 7$]

66: $y \equiv 13^0 + \dots + 13^{666} \ (19)$ Quanto è y?

$$1 + x + \dots + x^{666}$$

voglio moltiplicare per $x-1$ (e dividere

$$y(x-1) \equiv x^{667} - 1$$

... con in mente il seguente passaggio finale:

$$yA \equiv B \Rightarrow y \equiv B \cdot A^{-1}$$

per calcolare B, $x^{667} \equiv x^{(667 \bmod \phi(19))} \equiv x^{\dots}$

Es 4: quali sono le ultime 5 cifre di $5^{5^{5^5}}$?

Tesi $\Leftrightarrow$ Calcolare $x \equiv 5^{5^{5^{5^5}}} \ (10^5)$

Oss: th Cinese faccio (5^5) e (2^5)

Oss: le potenze di 5 sono periodiche

antiperiodo, poi costante 0

periodo $\mid \phi(2^5)$ $= 2^4$

Oss + fine: i periodi mod 2^n sono più piccoli di 2^{n-1}, sono infatti al massimo 2^{n-2} (vedi Medium)

Es 9: dim. che $\forall n, d, m \quad \exists a$

$a,\ a+d,\ a+2d,\ \dots,\ a+(m-1)d$

$p_1^n \mid a\ ;\ p_2^n \mid a+d\ \ - - -$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \equiv 0 & (p_1^n) \\ a \equiv -d & (p_2^n) \\ \vdots \\ a \equiv -(m-1)d & (p_m^n) \end{cases}$$

e la soluzione esiste per th Cinese, perché $p_1^n, p_2^n, \dots, p_m^n$ sono a 2 a 2 coprimi

Es N1.10

trovare tutte le soluzioni di $y^2 = x^5 - 4$

Oss: le disuguaglianze NON aiutano (banalmente)

Oss: non ci sono soluzioni piccole

$\Downarrow$

spero che non ci siano soluzioni

$\Rightarrow$ cerco un assurdo mod m opportuno

Oss: se provo un m t.c. $a \mapsto a^2$, $a \mapsto a^5$ non sono surgettive ho speranze

$\Rightarrow$ devo cercare m t.c. $2 \mid \phi(m)$, $5 \mid \phi(m)$

es: $m = 11$

Bonus 1: $X = \sum_{k=0}^{1000} k^{2016} \mod 11$

Oss: $X \equiv \frac{1001}{11} Y$

dove $Y = \sum_{k=0}^{10} k^{2016}$

Oss: $\phi(11) = 10$ $\quad k^{2016} \equiv k^6$ (se $11 \nmid k$)

rimane $1^6 + 2^6 + \dots + 10^6 \mod 11$

sia g un generatore mod 11, allora

$$1^6 + \ldots + 10^6 \equiv (g^0)^6 + (g^1)^6 + \ldots + (g^{p-2})^6$$

ora finisco moltiplicando per

$1 - (g^0)^6 \not\equiv 0$ perché $g^6 \not\equiv 0$

perché $\text{ord}_{11}(g) = 10$

.... fa $\underline{0}$ $\quad 1 - (g^{p-1})^6 \equiv 0$

Bonus 2 (BMO 2012 . 4)

$f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$:

- $f(n!) = f(n)!$
- $n - m \mid f(n) - f(m)$

Oss: ... $\quad f(1) = 1 \vee 2$
$\quad f(2) = 1 \vee 2$

ci sono 4 casi:

faccio il + difficile: $\quad f(1) = 1 \,,\, f(2) = 2$

.... si riesce a dire che $f(3) = 3$ ....

quindi $\quad f(3!) = f(3)! = 3!$

" $\quad f((3!)!) = (3!)!$

quindi $\exists \infty$ m t.c. $f(m) = m$

$n-m \mid f(n)-f(m)$

fisso $n=n_0$, pongo m tra questi ∞ interi

$n_0-m \mid f(n_0)-m$

$\mid f(n_0)-m-n_0+m$

$\Rightarrow$ $f(n_0)=n_0$

$|n_0-m| \leq |f(n_0)-n_0|$

$\Rightarrow$ $m \leq C$ per $m > n_0$

assurdo perché m può essere arbitr. grande

$\Rightarrow$ ho solo $f(n)=n$.