CONTEGGI

- Regola della somma
  Divido in due casi disgiunti e sommo
  ⚠ disgiunti
  $\#(A \cup B) = \#A + \#B \qquad A \cap B = \emptyset$

- Regola del prodotto
  Se devo compiere due scelte indipendenti con n e m alternative, in tutto ho $n \cdot m$ possibilità
  ⚠ indipendenti
  $\#(A \times B) = \#A \cdot \#B$

- \# sottoinsiemi di A $\qquad \#A = n \qquad \#B = m$

$A = \{ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$

$2 \times 2 \times 2 \dots = 2^n$

- \# funzioni da A a B

$m \times m \times m \dots = m^n$

$A = \{ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$

$B = \{ \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$

- \# permutazioni di A

$A = \{ \bullet \quad \bullet \quad \cancel{\bullet} \quad \dots \}$

$\sqcup \quad \sqcup \quad \sqcup \quad \dots$

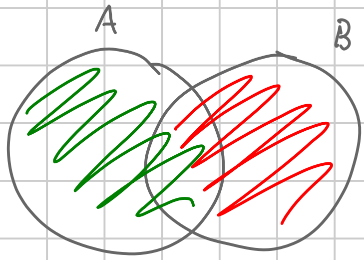
$n \times (n-1) \times (n-2) \dots = n!$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \#\text{modi di scegliere } k \text{ elementi fra } n$$

Principio di Inclusione - Esclusione (PIE)

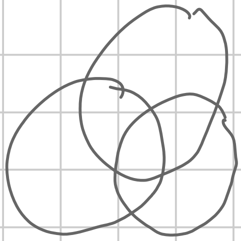
- quanti sono i numeri da 1 a 100 divisibili per 2 o per 5 ?

$$\underset{\uparrow \atop 2}{50} + \underset{\uparrow \atop 5}{20} - \underset{\uparrow \atop 2 \text{ e } 5}{10} = 60$$



$$\#(A \cup B) = \underline{\#A} + \underline{\#B} - \#(A \cap B)$$

$$\#(A \cup B \cup C) = \#A + \#B + \#C - \#(A \cap B) - \#(B \cap C) - \#(C \cap A) + \#(A \cap B \cap C)$$



$$\#(A_1 \cup \dots \cup A_n) = (\text{somma delle } \#)$$
$$- (\text{somma delle } \# \text{ delle intersezioni a 2 a 2})$$
$$+ \dots$$
$$+ (-1)^{k+1} (\text{somma delle } \# \text{ delle intersezioni a } k \text{ a } k)$$

- in quanti modi posso colorare una 3×3 di bianco e rosso senza 2×2 bianco ?

Conto il complementare

A_i = { colorazioni con il quadrato i bianco}

$$\#(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 4 \cdot 2^5 - (4 \cdot 2^3 + 2 \cdot 2^2) + 4 \cdot 2 - 1 \cdot 1$$

$\# A_1 = 2^5$

$\#(A_1 \cap A_2) = 2^3$

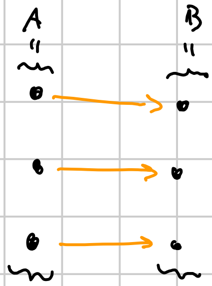
$\#(A_1 \cap A_3) = 2^2$

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 2$

$\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = 1$

Biiezioni (bigezioni)

$f: A \to B$ biiettiva allora $\# A = \# B$



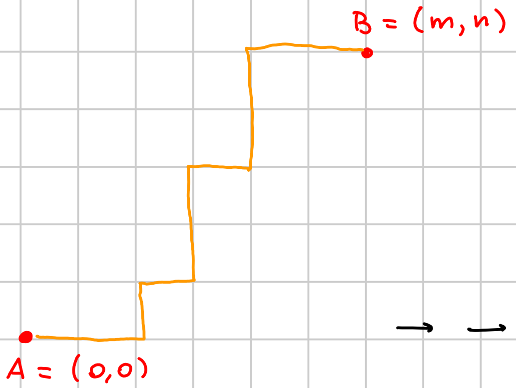
- # modi di scrivere n come somma $\overset{\text{ordinata}}{\vee}$ di k interi ≥ 0

$4 = 3 + 1 + 0 \quad (\neq 3 + 0 + 1)$

$\bullet \quad \bullet \quad \bullet\, | \quad \bullet\, |$

$\bullet \quad \bullet \quad \bullet\, |\, | \quad \bullet$

$\# \_\_ = \#$ stringhe con n $\bullet$ e $k-1$ $|$ $= \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$

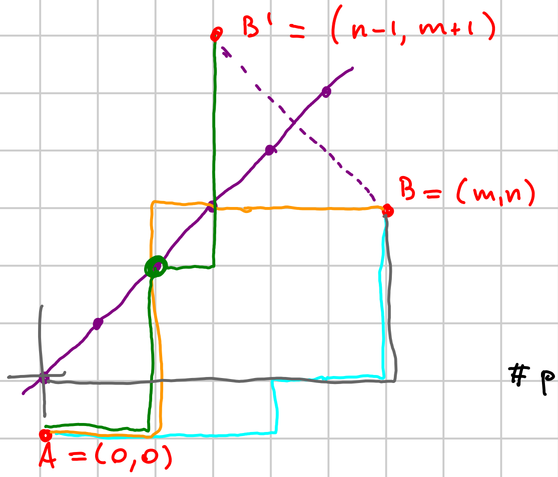
- 

percorsi monotoni da A a B

$\rightarrow \; \rightarrow \; \uparrow \; \rightarrow \; \uparrow \; \uparrow \; \rightarrow \; \uparrow \; \uparrow \; \rightarrow \; \rightarrow$

$\rightarrow \times m \qquad \uparrow \times n$

$\#$ percorsi $= \#$ stringhe con $m \rightarrow$ e $n \uparrow$ $= \binom{m+n}{m} = \binom{m+n}{n}$

- 

percorsi monotoni sotto la diagonale

Contiamo il complementare

$\#$ percorsi cattivi $= \#$ percorsi da A a B'

$= \binom{m+n}{m+1}$

percorsi sotto la diagonale $= \binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+1}$

Ricorsione

spezzo un conteggio in più sotto-conteggi uguali ma più piccoli

- \# permutazioni di $\{1, \dots, n\}$ che spostano ogni elemento al più di 1 posto $= A_n$ (n non può scambiarsi con 1)

Considero n

- n rimane fermo, lo ignoro: ho A_{n-1} permutazioni
- n va al posto di $n-1$. $n-1 \quad n \rightsquigarrow$ li ignoro

ho A_{n-2} permutazioni

$A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$ $\qquad A_1 = 1 \qquad A_2 = 2 \qquad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad \dots$

- \# stringhe lunghe n di A e B senza A consecutive

$n=1$	$n=2$	$n=3$	
A, B	AB, BA, BB	ABA, ABB, BAB, BBA, BBB	...

$A_n =$ # stringhe lunghe n che finiscono per A
$B_n =$ # B

$$\begin{cases} A_n = B_{n-1} = S_{n-2} \\ B_n = A_{n-1} + B_{n-1} = S_{n-1} \end{cases}$$

[redacted] $A_n + B_n =$ [redacted]

$S_1 = 2$
$S_2 = 3$

DOUBLE COUNTING (DC)

$\overset{=}{\text{contare}}$ (o $\overset{\le}{\text{stimare}}$) una stessa quantità in due modi diversi

- $1 + 2 + 3 + \dots + n = ?$

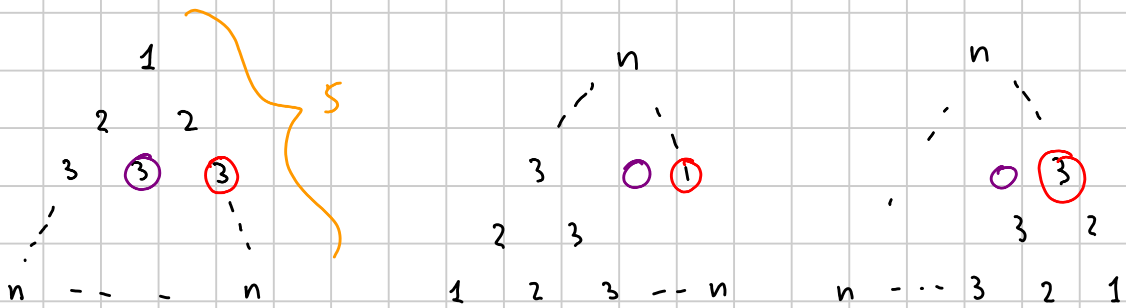
$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\
n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\
n+1 & n+1 & n+1 & \dots & n+1 & n+1
\end{array} \longrightarrow 1 + \dots + n = S$$

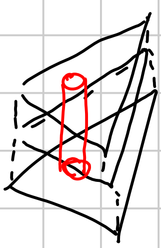
DC sulla somma della tabella

per righe: $2S$
$\quad\quad\quad\quad\;\; \|$
per colonne: $n(n+1)$

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = ? = S$





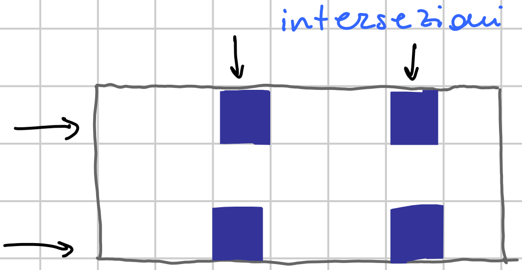
DC sulla somma totale

per piani: $3S$
$\quad\quad\quad\quad\;\; \|$
per colonne: $(2n+1)\,\dfrac{n(n+1)}{2}$

$$S = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

- tabella 3×7 colorata di blu e rosso.

TESI: esistono 2 righe e 2 colonne le cui 4 intersezioni hanno lo stesso colore



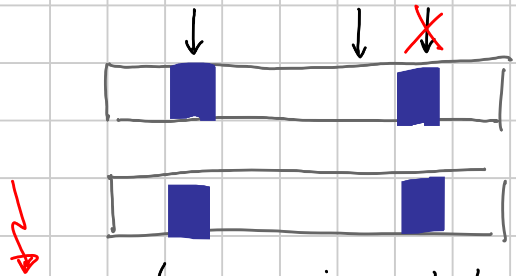
Q = # coppie di caselle che
- sono dello stesso colore
- stanno nella stessa colonna

Per assurdo la tesi è falsa

- per colonne : ogni colonna ne ha almeno una

[redacted]

- per coppie di righe :



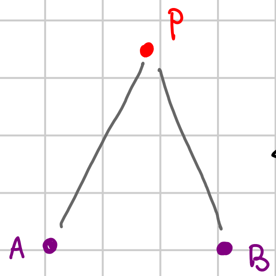
[redacted] $3 \cdot 2 =$ [redacted]

(per pigeonhole)

- IMO 2015 – 1 (b)

  S insieme di $n \geq 3$ punti nel piano
  - S è bilanciato se $\forall A, B \; \exists P$ t.c. $PA = PB$
  - S è eccentrico se $\forall A, B, C \; \nexists P$ t.c. $PA = PB = PC$

  Per quali n esiste S bilanciato e eccentrico?



DC sul # di cose $= Q$

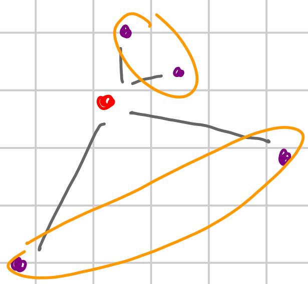
- dal pdv di A, B

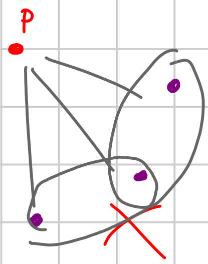
  fisso A, B . S è bilanciato → trovo almeno un P

  [redacted]

- dal pdv di P

  S è eccentrico → le coppie A, B sono a due a due disgiunte



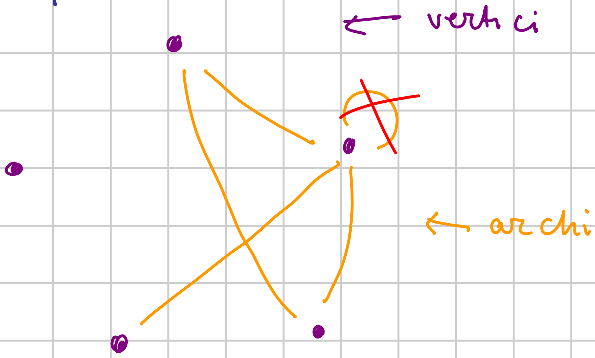


[redacted]

$$\frac{n-1}{2} \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor \leq \frac{n-1}{2} \implies \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor = \frac{n-1}{2} \implies n \text{ dispari}$$

Per n dispari trovo l'esempio.

Grafi



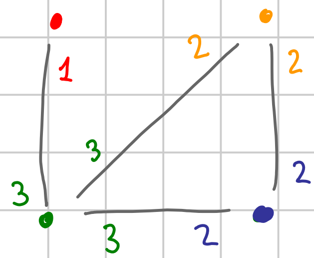
Se v è un vertice
$\deg v = \#$ archi aventi v come estremo

- $\displaystyle\sum_{v \text{ vertice}} \deg v = ? = 2 \,\#\text{archi}$

ogni arco viene contato 2 volte

<u>OSS</u> il RHS è pari, quindi il # vertici con grado dispari è pari

- $\displaystyle\sum_{v \text{ vertici}} (\deg v)^2 = \sum_{u - v} (\deg u + \deg v)$

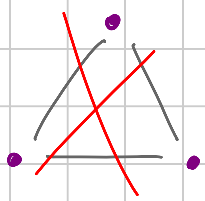


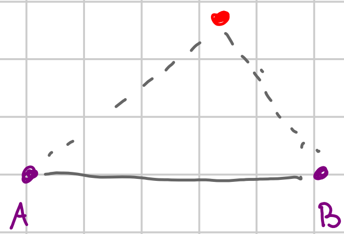
DC sulla somma delle etichette

per archi: ottengo RHS

per vertici: ottengo LHS

- quanti archi ha al più un grafo senza triangoli?





$n = \#$ vertici
$e = \#$ archi

<u>OSS</u> ogni vertice è collegato al più a uno fra A e B

$\deg A + \deg B \leq n$

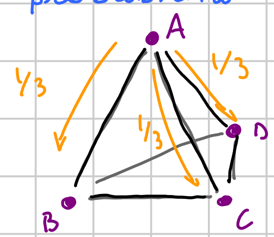
disug. misteriose (QM-AM)

[redacted] $RHS = LHS = \sum_v (\deg v)^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum \deg v\right)^2 =$ [redacted]

$e \leq \frac{n^2}{4}$

ESERCIZI

- \# sequenze debolmente crescenti lunghe m a valori in $\{1, \dots, n\}$
- almeno un punto dagli es. 118 e 119 ← (se non capite la notazione chiedete)
- una pulce salta sui vertici di un tetraedro
  probabilità che dopo n mosse sia al punto di partenza?
  (ricorsivamente)



- \# stringhe bilanciate di $2n$ parentesi tonde ($n \times$ (, $n \times$))
  (ogni parentesi deve aprirsi prima di chiudersi)
  es ( ) (( ) (( ))) sì   ( ) (( ))) (( ) NO
- prob. 10

se finite prima chiedete e ne avrete altri ☺

CORREZIONE

- $a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \dots \quad a_m$

  $\downarrow +1 \quad \downarrow +2 \quad \downarrow +3 \quad \dots \quad \downarrow +m$

  $a_1 + 1 \quad a_2 + 2 \quad a_3 + 3 \quad \dots \quad a_m + m$

  - str. crescente
  - è a valori $\{2, \dots, n+m\}$

$2 \quad 3 \quad \dots \quad n+m-1 \quad n+m$ ⤳ ne scelgo m

$\# \dots = \binom{n+m-1}{m}$

- X t.c. $\#X = n$ $\quad Y = \mathcal{P}(X)$

$$\#\{(A,B) \in Y \times Y \;:\; A \cap B = \emptyset\}$$

$$X = \{\, \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$$

B

A

$$3 \times 3 \times 3 \quad \dots \quad = 3^n$$

- $$\sum_{(A,B) \in Y \times Y} |A \cup B| = n \cdot 3 \cdot 4^{n-1}$$

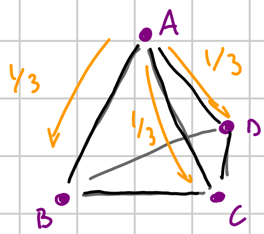
dal pdv degli elementi

fisso un elemento $x \in X$

$$X = \{\, x \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \dots \}$$

$$3 \times 4 \times 4 \times 4 \quad = 3 \cdot 4^{n-1}$$

A, B, $A \cap B$ $\qquad$ A, B, $A \cap B$, $\emptyset$

- 

parte in A

A_n = prob. di essere in A dopo n mosse

B_n, C_n, D_n $\}$ analoghi

$$B_n = C_n = D_n$$

$$A_n = \frac{1}{3}(B_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-1}) = B_{n-1} = \frac{1}{3}A_{n-2} + \frac{2}{3}B_{n-2} = \frac{1}{3}A_{n-2} + \frac{2}{3}A_{n-1}$$

$$B_n = \frac{1}{3}(A_{n-1} + C_{n-1} + D_{n-1}) = \frac{1}{3}A_{n-1} + \frac{2}{3}B_{n-1}$$

$$A_0 = 1 \qquad A_1 = 0$$

$$A_n = \frac{1}{3}(1 - A_{n-1})$$

$$A_n + 3B_n = 1$$

$$B_{n-1} = \frac{1}{3}(1 - A_{n-1}) = A_n$$

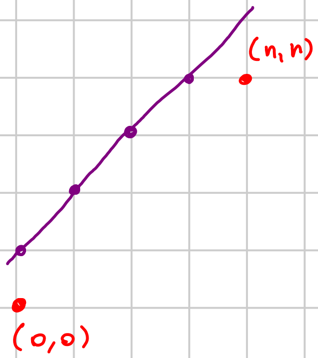
- **oss** una stringa è bilanciata
  $\iff$ in ogni prefisso $\#(\geq \#)$

$(\;) \; (\; (\;) \; (\; (\;) \;) \;)$

lui è un prefisso

$(\Rightarrow)$ (a voce)

$(\Leftarrow)$ $(\;) \; (\; (\;) \; (\; (\;) \;) \;)$ (a voce)



$(\rightsquigarrow \rightarrow$

$) \rightsquigarrow \uparrow$

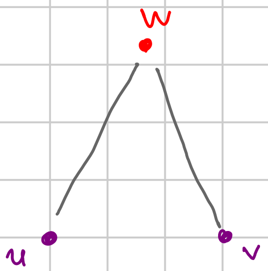
\# stringhe bilanciate

$= \#$ percorsi da $(0,0)$ a (n,n) sotto la diagonale

$$= \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

numeri di Catalan

- $12k$ vertici, tutti i gradi sono $3k+6$
  $\forall \; u,v$ ci sono N vertici collegati a entrambi.



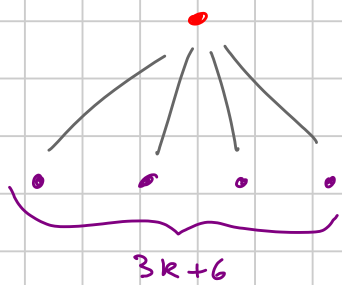
$Q = \#$ "V" DC su Q

dal pdv u,v

$$Q = N \cdot \binom{12k}{2}$$

dal pdv di w

$$Q = \binom{3k+6}{2} \cdot 12k$$



$$N\binom{12k}{2} = 12k\binom{3k+6}{2}$$

$$N = \frac{\binom{3k+6}{2}12k}{\binom{12k}{2}}$$ è intero

$$= \frac{(3k+6)(3k+5)\cdot \cancel{12k}}{\cancel{12k}\cdot(12k-1)} = \ldots$$ facccio la divisione fra polinomi

[...] $12k-1 \mid$ un qualche numero

l'unica possibilità è $k=3$