C2 - BASIC

DelfadOr

Note Title 9/7/2017

INVARIANTI

Situazione dinamica (mosse)

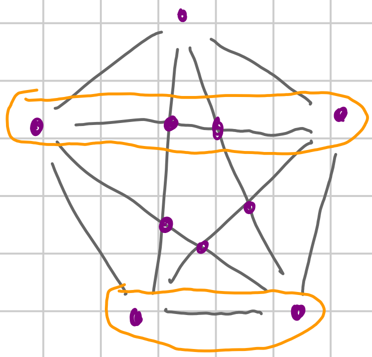
INVARIANTE = quantità legata allo stato che non cambia o cambia in modo controllato in seguito alle mosse

- Invarianti invarianti

Q = invariante

A = stato iniziale B = stato finale

$Q_A \neq Q_B \Rightarrow$ non posso raggiungere B

- 

● = lampadine (all'inizio spente)

MOSSA = cambiare di stato tutte le lampadine su un segmento

Posso accenderle tutte?

OSS ogni mossa coinvolge esattamente 2 vertici

●	●	$\longrightarrow$	o	o	+2
o	o	$\longrightarrow$	●	●	−2
●	o	$\longrightarrow$	o	●	+0

Q = # lampadine sui vertici accese (mod 2)

Q è invariante

$Q_{inizio} = 0$ $Q_{fine} = 5 \neq 0 \pmod 2$ ↯

- $20 \times R \quad 21 \times G \quad 22 \times B$

  MOSSE: $1 \times R + 1 \times G \longrightarrow 2 \times B$

  $1 \times G + 1 \times B \longrightarrow 2 \times R$

  $1 \times B + 1 \times R \longrightarrow 2 \times G$

  Posso averli tutti dello stesso colore?

	R	G	B
I° mossa	-1	-1	$+2 \equiv -1$
	$+2 \equiv -1$	-1	-1
	-1	$+2 \equiv -1$	-1

guardo mod 3

R	G	B
2	0	1
1	2	0
0	1	2

I 3 numeri sono sempre (in un qualche ordine) 0, 1, 2

Alla fine vorrei due colori a 0 ↯

- Monovarianti (invarianti monotone)

  Q = monovariante (stretta)

  Se Q può assumere un # finito di valori allora il # mosse è finito (ad es. se Q è intera, strettamente decrescente e positiva)

- n interi positivi in fila. (z_i)

  MOSSA: prendo (x, y) adiacenti con $x > y$ e x a sx di y

  li sostituisco con
  - $(y+1, x)$
  - $(x-1, x)$

  TESI: posso fare un # finito di mosse

OSS il max dei numeri è invariante (invariante) $= M$

Provo una cosa del tipo $Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot z_i$ crescente

Guardando le mosse, voglio i pesi grossi a DX

$\alpha_i = i \rightsquigarrow Q = \sum_{i=1}^{n} i \cdot z_i$

I° $\quad x \,,\, y \qquad\qquad\qquad\qquad y+1 \quad x$

$i \cdot x + (i+1)\, y \longrightarrow i(y+1) + (i+1)\,x$

$+ \quad + \qquad\qquad + \quad + \, i \, +$

II° $\qquad\qquad\qquad\qquad x-1 \quad x$

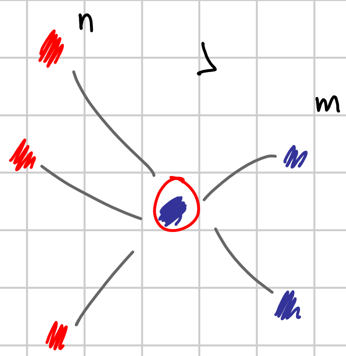
$+ \quad + \longrightarrow i(x-1) + (i+1)\,x$

$+ \quad +$

Q è str. crescente

$Q \leq \boxed{\sum_{k=1}^{n} i \cdot M} \to$ è costante

- 12 gnomi (uno per mese) con case
  Ci sono delle amicizie
  Ad ogni mese lo gnomo corrispondente se necessario ridipinge la sue case per adeguarsi alla maggioranza stretta dei suoi amici
  TESI: dopo un po' nessuno ridipinge più



Q = # coppie di amici con casa diversa

Se uno gnomo ridipinge Q diminuisce strettamente
$Q \geq 0 \rightsquigarrow$ # ridipingimenti è finito

- Invarianti variabili a variazione costante
  ↳ servono a dare informazioni su #mosse

- A e B giocano. All'inizio c'è una pila di n gettoni.

MOSSE: • eliminare una pila
• spezzare una pila in 4 pile
Perde chi muove per ultimo. Chi vince?
[per casa: il gioco finisce]

Q = # pile

Oss Q cambia parità ad ogni mossa

$Q_{inizio} = 1$ $Q_{fine} = 0$

$\rightsquigarrow$ # mosse è dispari (A muove per ultimo e perde)

COLORAZIONI

• scacchiera 8x8, tolgo due angoli opposti. Posso ricoprirla con tessere 2x1?

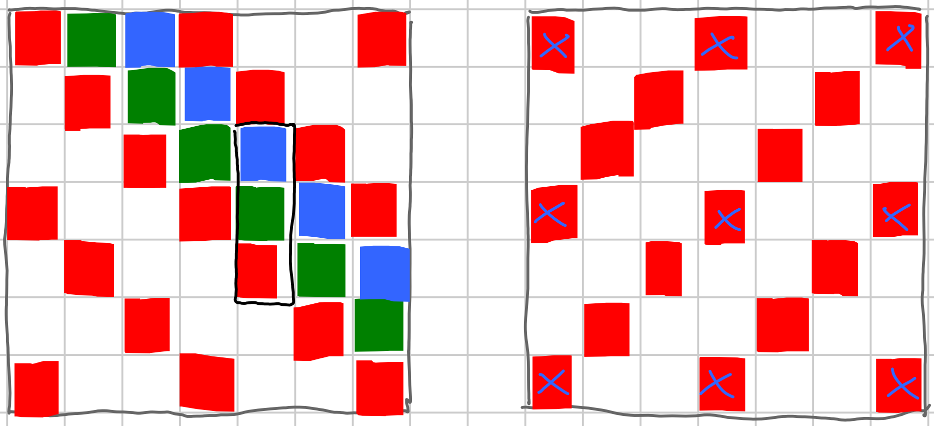
Coloro a scacchi. I due angoli sono dello stesso colore (WLOG bianchi)

30 x □

32 x ■

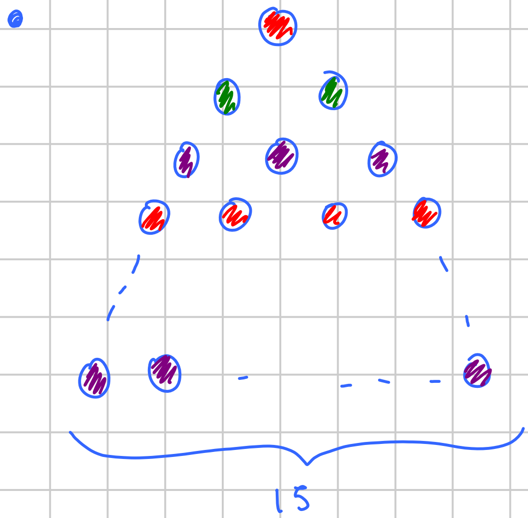
bianche = # nere

• scacchiera 7x7, ricoperta con 16 tessere 3x1 + un buco. Dove può stare il buco?



Ogni tessera copre esattamente un rosso
$\rightsquigarrow$ il buco è rosso. (ma secondo entrambe le colorazioni)

⊕ ESEMPI



tessere: o o o

Posso ricoprire il triangolo?

$1 + 4 + 7 + 10 + 13 = 35$

$2 + 5 + 8 + 11 + 14 = 40$

$3 \quad 6 \quad 9 \quad 12 \quad 15$

	•	•	•
000	3 ≡0	0	0
	0	3 ≡0	0
	0	0	3 ≡0
%	1	1	1

guardo mod 3

Il numero di • • • ricoperte è lo stesso (mod 3)

↯

PRINCIPIO DELL'ESTREMALE

tecnica euristica che mi suggerisce di considerare fra molti oggetti quello che massimizza (o minimizza) una certa quantità Q ⚠ il max/min deve esistere

- tabella infinita riempita con interi positivi tali che ognuno è la media dei 4 adiacenti
  TESI: sono tutti uguali

Sia x l'intero più piccolo, a,b,c,d adiacenti

$x = \frac{a+b+c+d}{4}$, ma $x \leq a,b,c,d$, quindi $x = a = b = c = d$

Se c'è un x allora sono tutti x.

```
  x
 x x x
xx x x x
 x x x
  x
```

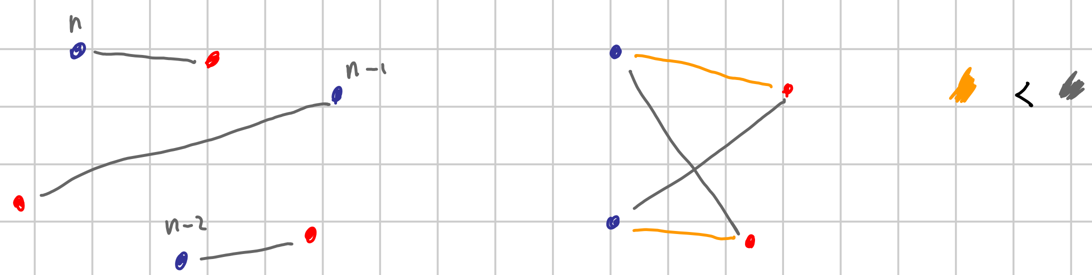
- n città collegate con strade monodirezionali
$\forall A, B$ posso raggiungerne una dall'altra (percorrendo anche più strade)
TESI: esiste una città da cui si possono raggiungere tutte le altre

Sia A una città che massimizza il # città da lei raggiungibili (incluse lei stessa)

Per assurdo $\exists B$ t.c. $A \not\rightsquigarrow B$. Allora $B \rightsquigarrow A$
<u>oss</u> $B \rightsquigarrow A$. Se $A \rightsquigarrow C$ allora $B \rightsquigarrow (A) \rightsquigarrow C$

Da B posso raggiungere tutte le città che potevo da A
$\oplus$ B stessa ↯

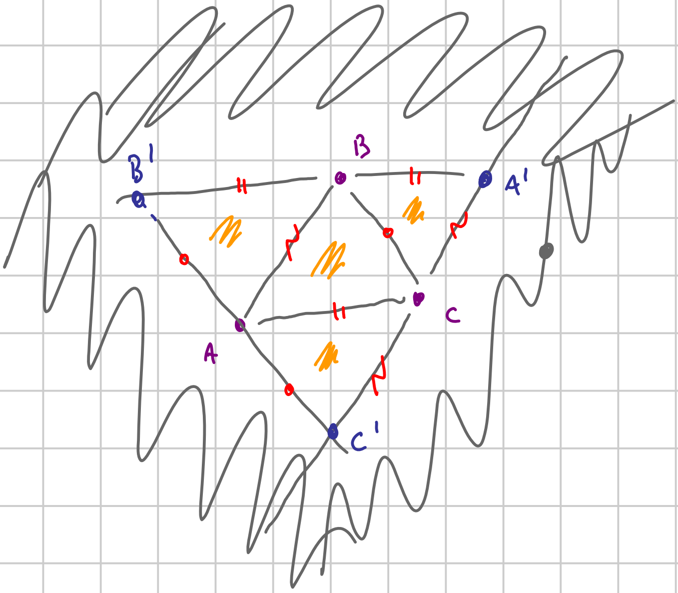
- n punti rossi e n blu sul piano, a 3 a 3 non allineati.
TESI: posso accoppiarli con segmenti non intersecantisi



Prendo un accoppiamento che minimizza le somme delle lunghezze. Se per assurdo ci fosse un'intersezione faccio uno scambio e ottengo un accoppiamento "più corto" ↯

- $n \geq 3$ punti sul piano. $\forall A, B, C$ Area$(ABC) \leq 1$.
TESI: $\exists$ triangolo che ricopre tutti i punti e ha area ≤ 4

Prendo A, B, C t.c. Area(ABC) è massima > 0, ≤ 1



$Area(A'B'C') = 4\,Area(ABC) \leq 4 \cdot 1 = 4$

ESERCIZI

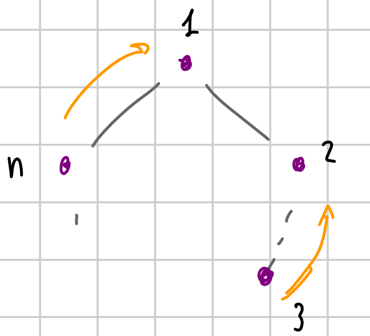
- es. 130, 132
- problemi 8, 2
- Ci sono 3 scuole, ciascuna con n studenti. Ogni studente ha esattamente n+1 amici complessivamente nelle altre scuole.

TESI: $\exists$ 3 studenti, uno per scuola, che sono tutti amici

- $n \geq 3$ punti sul piano, $\forall A, B, C$ esiste una striscia larga 1 che li copre.

TESI: $\exists$ una striscia larga 2 che copre tutti i punti
(striscia larga w = insieme dei punti compresi fra 2 rette a distanza w)

CORREZIONI

- 

Se n è dispari si riesce

Se n è pari

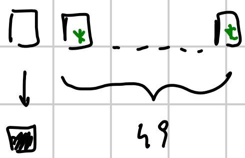
a_i = # pedine sul vertice i

$$Q = \sum_{i=1}^{n} i\, a_i \pmod n$$

Q è invariante $\qquad Q_{inizio} = \frac{n(n+1)}{2} \equiv \frac{n}{2} \pmod n$

$$Q_{fine} \equiv 0 \not\equiv \frac{n}{2} \pmod n$$

• $n = 2014$



$e_i = \begin{cases} 1 & \text{se la } i\text{-esima carta è} \\ 0 & \end{cases}$

$n \quad - - - - \quad 2 \quad 1$

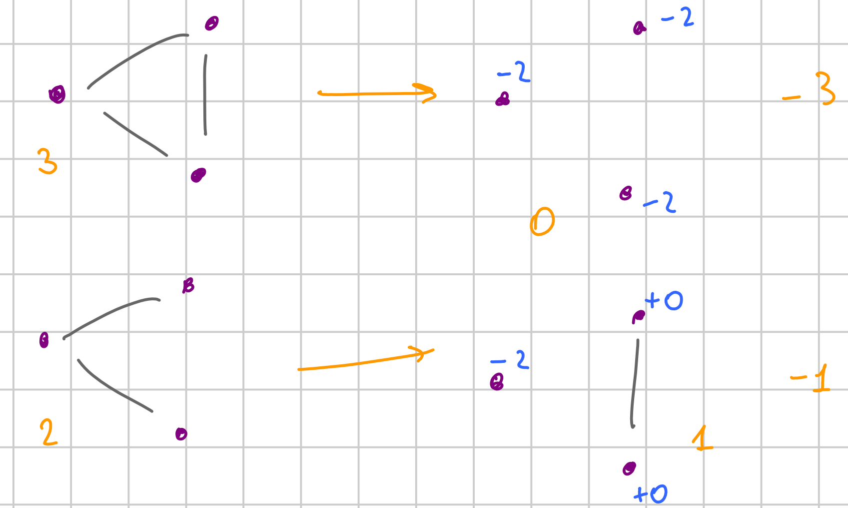
$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot \alpha_i$ vorrei che $\alpha_i > \alpha_{i-1} + \dots + \alpha_{i-49}$

$\alpha_i = 2^i$ $Q = \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot 2^i$ Si dimostra che Q è str. decrescente

$Q \geq 0$

• A e B giocano su un grafo

MOSSE.



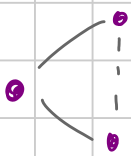
Chi vince? (perde chi non può muovere)

OSS # archi è str. decrescente → il gioco finisce

OSS la parità di # archi cambia ad ogni mossa

OSS la parità dei gradi è invariante

OSS il gioco finisce quando tutti i gradi sono ≤ 1



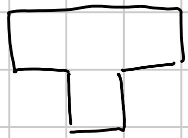
V_0 = # vertici con grado pari

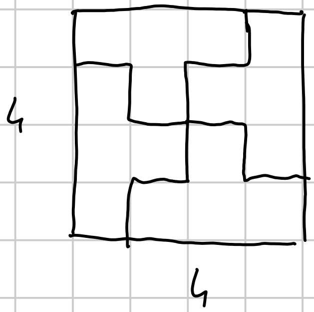
V_1 = # dispari

$$\#\text{archi fine} = \frac{1}{2}\sum_v (\deg v \text{ alla fine}) = \frac{1}{2} V_1$$

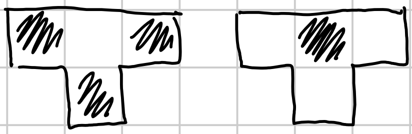
$E = \#$archi all'inizio

$$\#\text{mosse} \equiv E - \frac{1}{2}V_1 \pmod 2$$

- scacchiere $n \times n$, tessere .
  - se n è dispari non posso
  - se $4 \mid n$ posso



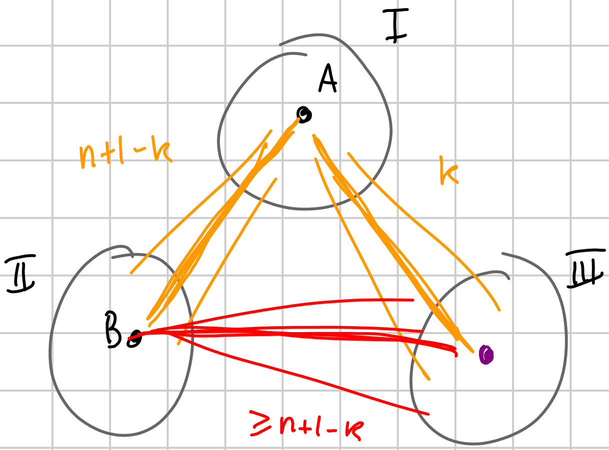
  - se $n \equiv 2 \pmod 4$
    coloro a scacchi



$\#$ tessere $= \dfrac{n^2}{4}$ che è dispari

$\#$ caselle nere $=$ dispari
$\qquad\quad \shortparallel$
$\qquad\quad \dfrac{n^2}{2}$ che è pari $\quad ⚡$

- Prendo A uno studente che ha il max $\#$amici in una scuola

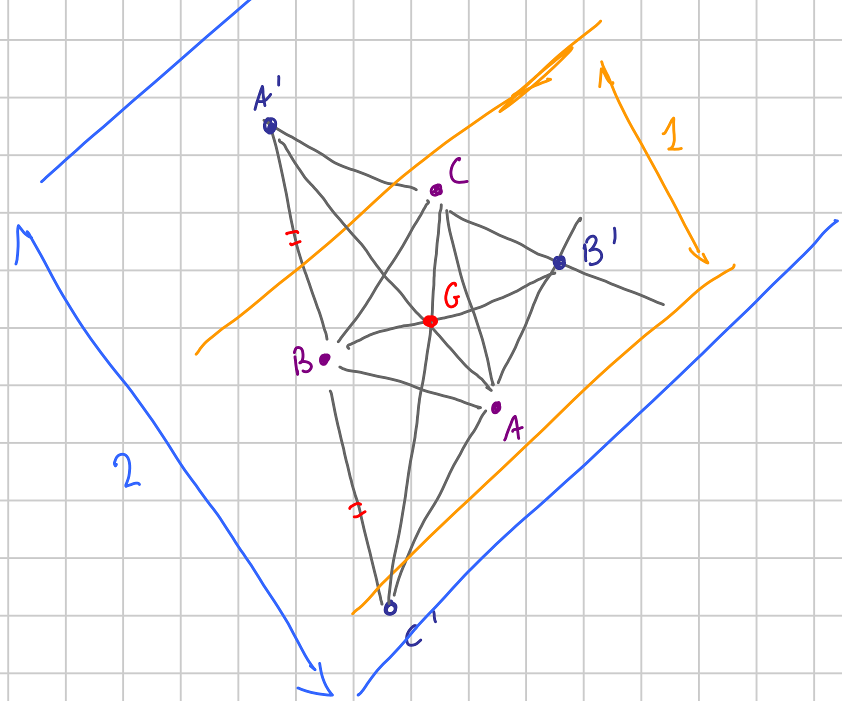


B ha al max k amici in I
$\rightsquigarrow$ ha almeno $n+1-k$ amici in III

in III ci sono n studenti

- [BMO 2010-3]

Come prima ABC di area max



G = baricentro

omotetia di centro G
e fattore -2
$ABC \to A'B'C'$
$\| \to \|$ che ha largh. 2
e ricopre $A'B'C'$