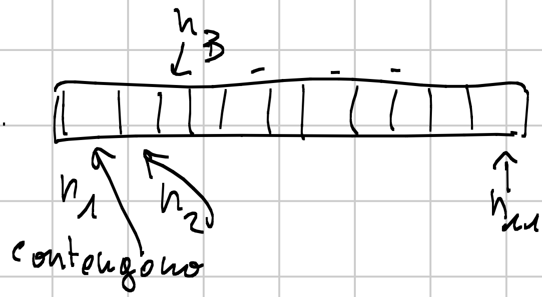
P-medium (C $\frac{1}{2}$ medium)

Non-esistenza

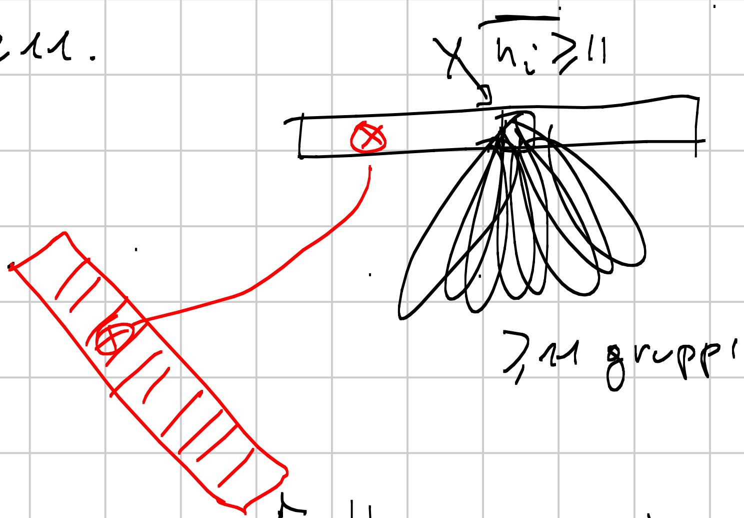
112 gruppi di 11 persone, che si intersecano a due a due in esattamente 1 persona.
Dimostrare che c'è una persona che appartiene a tutti i gruppi.

Fisso un gruppo



$n_1 + \dots + n_{11} = 111 = 11 \cdot 10 + 1$ Per il Princ. dei cassetti,

$\exists$ almeno un $n_i \geq 11$.



altro gruppo che interseca in un altro elemento

Gli 11 gruppi non contengono x e devono intersecare il gruppo rosso in elementi distinti, perché già si intersecano in y. Ma non ci sono abbastanza elementi.

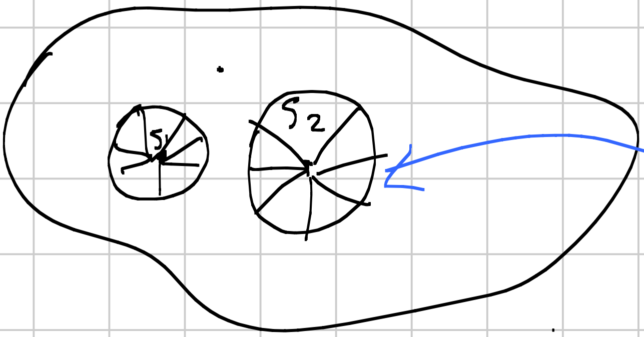
EGMO 2013/6 I 7 nani vanno a lavorare in miniera o a raccogliere fragole nel bosco (e non tutt'e due nello stesso giorno), per 16 giorni di fila. Risulta che il primo giorno siano andati tutti in miniera, mentre in ogni coppia di giorni almeno tre nani hanno scelto attività diverse. Dimostrare che c'è stato un giorno in cui sono andati tutti nel bosco a cogliere fragole.

1 2 3 4 5 6 7
M F M M F M F

M → 0
F → 1

$d(s_1, s_2) = \#$ simboli diversi
è una distanza

128 stringhe binarie



vicinato di raggio 1

Se per assurdo non esistesse la gita per fragole, esistono 16 stringhe $\neq 1111111$ i cui vicinati di raggio 1 sono disgiunti a 2 a 2

Oss. 16 vicinati da 8 stringhe, disgiunti, coprono tutte le 128 stringhe.

Distinguo le stringhe a seconda del numero di "1".

0	1	2	3	4	5	6	7
$\boxed{1}$	7	21	35	35	21	7	1

28

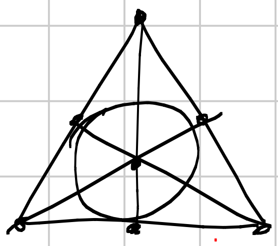
28

quindi per coprire tutto devo per forza usare

1111111.

Piano di Fano

7 insiemi di 3 elementi che si intersecano in esattamente 1 elemento a 2 a 2.



piano $\frac{k^3-1}{k-1}$

retta $\frac{k^2-1}{k-1}$.

Quante rette?

k rette

$\frac{k\cdot(k-1)}{2}$ intersez.

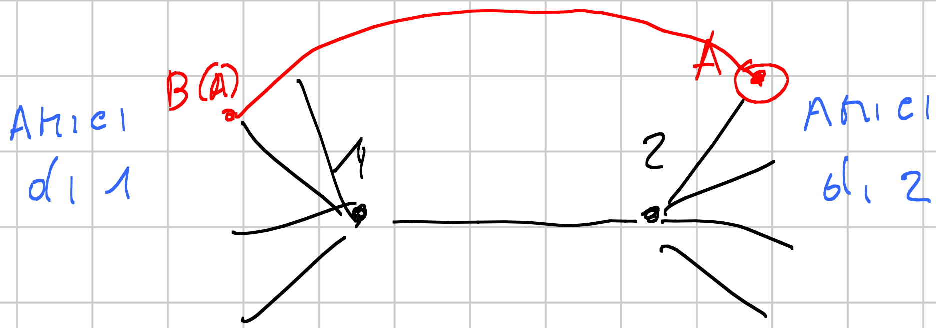
$4\cdot k - \frac{k\cdot(k-1)}{2} +$

$k\cdot(k-1)\cancel{\#}2$ gruppi da k el. con intersez. di 1 solo el.

$\Rightarrow$ 7 el e tutti

BMO 1994/4 Minimo num. $n \geq 5$ di persone t.c. sia possibile che 1) se 2 sono amici, non hanno amici in comune 2) se 2 non sono amici, hanno esatt. 2 amici comuni.

1° passo: tutti hanno lo stesso numero di amici!

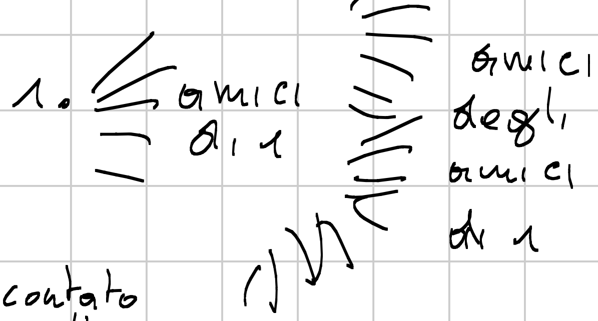


A e 1 non sono amici, quindi oltre a 2

hanno un altro amico comune, B (A)

Questo dà una corrisp. biunivoca tra {amici di A} e {amici di B}.
Se 1 e 3 non sono amici, passo attraverso un amico comune. □

Conto le persone.



k amici di 1.

1 contato k volte

amici degli amici $= k^2 - (k-1) - (n-k-1) = n-k$

amici degli amici contati 2 volte

$k^2 + k = 2n - 2$ però $n-2 \geq 2k$ anche, se no non è possibile la condiz. 1)

$1 \to 2 < 5$

$2 \to 4 < 5$

$3 \to 7 < 3 \cdot 2 + 2$

$4 \to 11$ NO

$5 \to 16$ SI

ITMO SL 2016 C3) 3 n-agoni convessi hanno bordi C_1, C_2, C_3 nel piano. $C_1 \cap C_2$, $C_1 \cap C_3$ e $C_2 \cap C_3$ sono insiemi finiti di punti. Calcolare il valore massimo di $|C_1 \cap C_2 C_3|$

BMO 07/4

$(n,6)=1$ Coloriamo i vertici di un n-agono regolare di 3 colori, in modo che il numero di vertici di ogni colore sia dispari.
Dimostrare che esiste un triangolo isoscele con

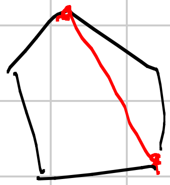
i 3 vertici di 3 colori diversi,

$a, b, c \qquad n = a+b+c.$

X = # triang. isosc. mono colore

Y = # triang. isosc. 2-1

Ogni diagonale (coppia di vertici) partecipa a 3 triang. isosceli,



Double counting: $\boxed{\text{se non ci sono tri. isosc. multicol.}}$

$$\left|\left\{\left(\underset{\text{isosc.}}{\Delta}, \underset{\substack{\text{che}\\ \text{congiunge}\\ \text{2 ver. dello stesso col.}}}{\text{lato}}\right)\right\}\right| = 3X + Y = 3\left[\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}\right]$$

contando per lati

ma $X+Y = \binom{n}{2}$

mod 2,
$$X+Y \equiv \binom{n}{2}$$
$$3X+Y \equiv 3\left[\binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}\right] \equiv \binom{a}{2}+\binom{b}{2}+\binom{c}{2}$$

mod 4	a	b	c	n
	1	1	1	3
	1	1	3	1
	1	3	3	3
	3	3	3	1

3 pari → disp.
2 pari, 1 disp. → pari
1 pari, 2 disp. → disp.
3 disp. → pari.

ass.

RMM 2016/2 $\quad n \geq m$. Tab. m righe $2n$ colonne.

voglio metterci il max numero di tasselli 2x1

in modo che 1) non facciano mai $\boxed{|}$

2) la riga in basso

sia piena di n tasselli orizz.

Quant'è il max?