Combinatoria 2 Medium

Note Title 9/3/2017

Esistenza non costruttiva

Estremale

In un insieme finito $\subseteq \mathbb{R}$ $\exists$ min/max
In un " $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ $\exists$ min

Modalità d'uso - normale

sia A un insieme, sia f una "valutazione" su A
$f : A \to \mathbb{R}$
$\Rightarrow$ posso prendere (uno dei) $a \in A$ tali che $f(a)$ sia minimo

Di solito voglio mostrare che in A $\exists$ a t.c. $P(a)$
allora mi invento f, prendo a t.c. $f(a)$ min e dimostro che a soddisfa $P(a)$.

Es: sia G un grafo: dimostrare che esiste una partizione $G = A \cup B$ t.c. $A \cap B = \emptyset$
t.c. $\forall a \in A$ l'insieme dei vicini $(a) \cap B$
$\forall b \in B$ sia più grande $\geq$
" $\cap A$

l'idea informale è "voglio massimizzare gli archi tra A e B"

più formalmente la $f: \{\text{partizioni di } G \text{ in 2 sottoinsiemi}\} \to \mathbb{N}$

e f conta quanti sono gli archi tra A e B

Sia A_{max}, B_{max}, voglio dimostrare la proprietà del testo

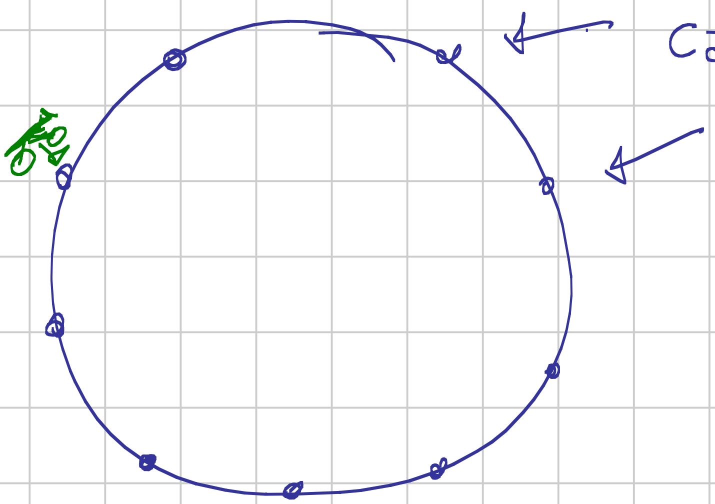
sia $a \in A_{max}$, allora supponiamo x ass. che

i vicini di a stiano strett. più in A_{max} che in B_{max};

sia $A_{max} \setminus \{a\}$, $B_{max} \cup \{a\}$

allora questa partizione viola la massimalità.

Es:

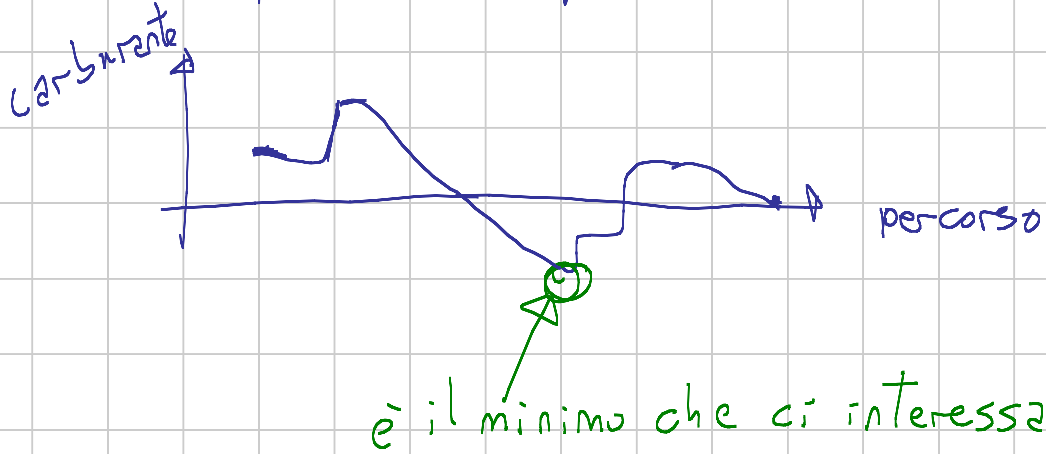


Σ carburanti è appena sufficiente per fare un giro

Tesi: $\exists$ un punto di partenza che permette l'intero giro

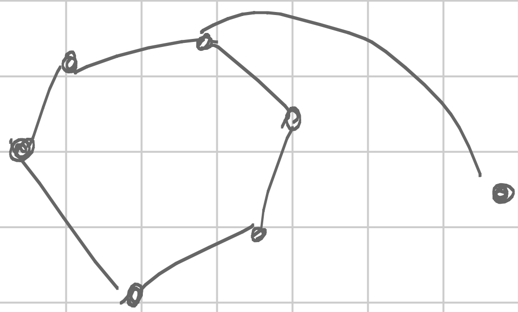
Idea: serve un minimo "globale"

Idea 2: proviamo a percorrere il giro comunque



Es: BMO13.4

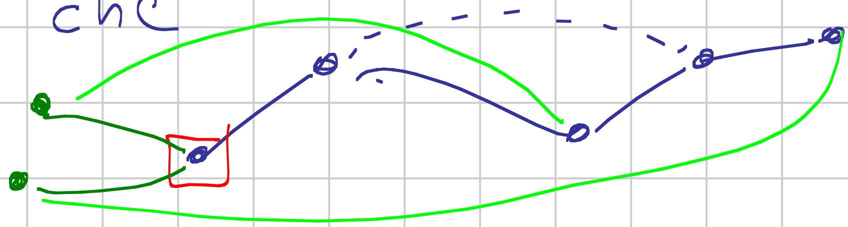
C'è un grafo con questa proprietà



poligono senza diagonali $\Rightarrow \exists \leq 1$ lato verso il poligono

Tesi: $\exists$ vertice v : $\deg(v) \leq 2$

Idea: cammino massimale in modo che



ora considero un estremo di questo cammino

quindi il $\boxed{\cdot}$ non poteva avere 2 ulteriori figli

Un approccio un po' diverso:

dato uno spazio S e una proprietà P che identifica alcuni sottoinsiemi di S

dimostrare che esiste uno di questi sottoins. T t.c. $|T| \geq$ qualcosa

L'idea generale è di prendere un sottoinsieme con massima cardinalità.

Es (vecchissimo TST):

A insieme, ci sono $T_1, \dots, T_n$ terne di elementi t.c. $|T_i \cap T_j| \leq 1$

Tesi: $\exists$ un $S \subseteq A$ t.c. $|S| \geq \sqrt{|A|}$
S non contiene i T_i

Sol:

Prendo S massimale con la propr. che

"non contiene T_i"

la massimalità si traduce in una mappa

$$f: A \setminus S \to \{\text{coppie non ordinate di } S\}$$

Oss: f è iniettiva come segue dall'ipotesi sull'intersezione delle T_i

$s = |S|$

$$|A| - s \le \binom{s}{2}$$

$n = |A|$

$$n - s \le \frac{s(s-1)}{2}$$

$$2n \le s^2 + s$$

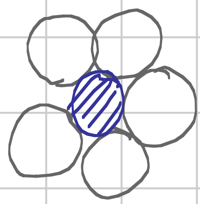
$$s \geq \sqrt{n}$$

Applicazioni geometriche

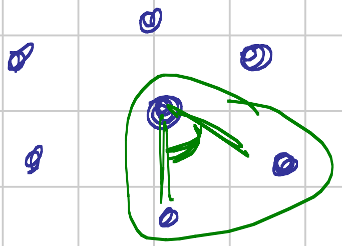
Es: ci sono alcuni cerchi finiti sul piano che non si intersecano, ma alcune coppie sono tangenti, i diametri sono tutti diversi

Tesi: $\exists$ cerchio con ≤ 5 tangenti

Sol: prendo il cerchio più piccolo!



suppongo x ass. che $\exists$ 6 cerchi tangenti



allora $\measuredangle > \frac{\pi}{3}$, assurdo.

Per casa: trovare il minimo n° di cerchi tangenti

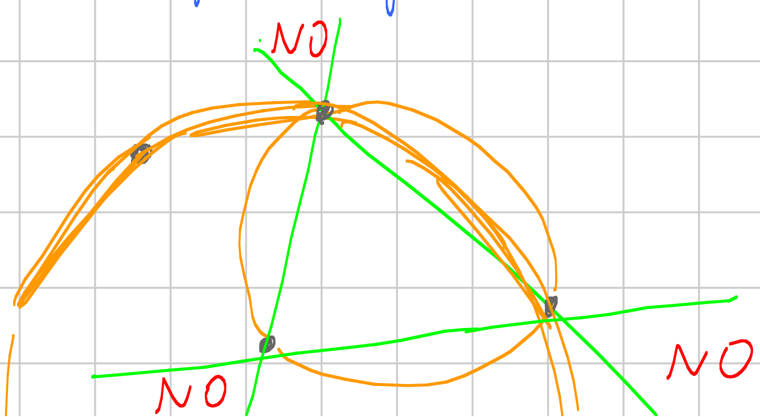
Es (dal forum): ci sono n punti distinti non allineati allora

Tesi: $\exists$ 3 tali che la circonf. per loro 3 contiene tutti gli n punti

Sol: la circ. + grande NO (non subito)

L'idea è l'inviluppo convesso (è un oggetto massimale)

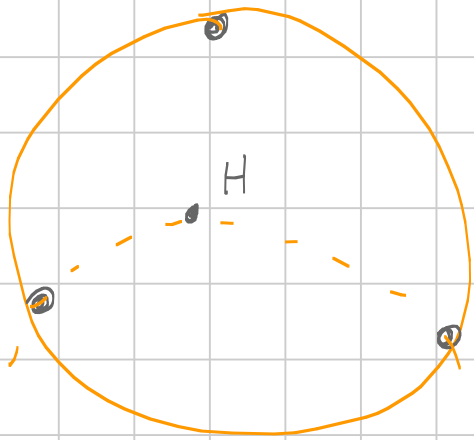
ora si posso prendere la circ. + grande



ha raggio strett. maggiore

Es: voglio una circonferenza che non contenga nessun punto (interno)
(con l'ipotesi che i punti non sia a 4 a 4 conciclici)

Sol:

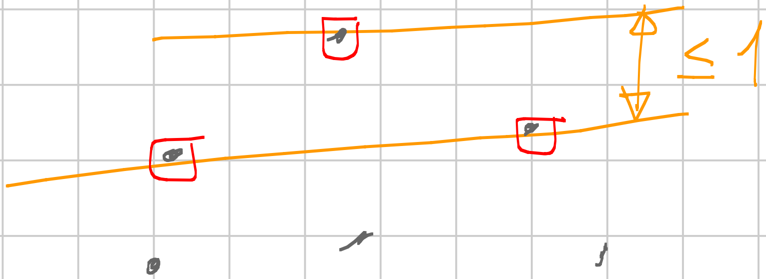


minimizzare la circonferenza e massimizz. un angolo intero

oppure

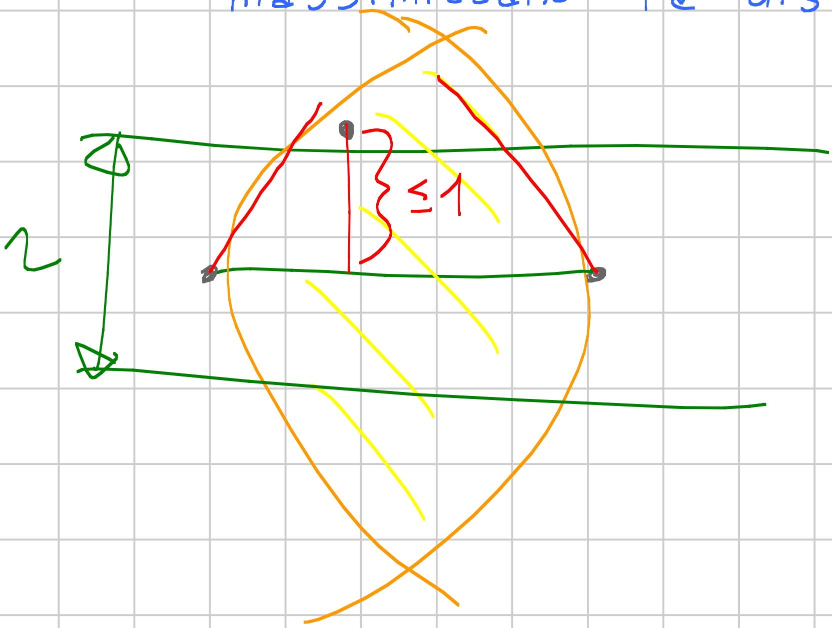
Prendere 2 vertici i più vicini possibile

Es: BMO 10.3

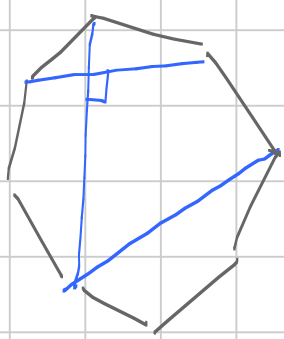


Tesi: tutti i punti sono contenuti in una fascia larga ≤ 2

Sol: Idea: prendo una delle coppie che massimizzano la distanza



Es: IMOSL 16 C5



Tesi: trovare il massimo n° di diagonali t.c.

non si intersecano oppure si intersecano $\perp$

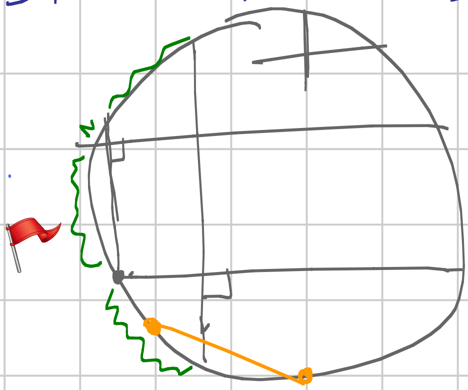
Sol:

Oss 1: se non ho intersezioni

al massimo ho $n-3$ diagonali

Oss 2 (x casa): nel caso dispari $n-3$ è già ottimale

Siamo nel caso pari

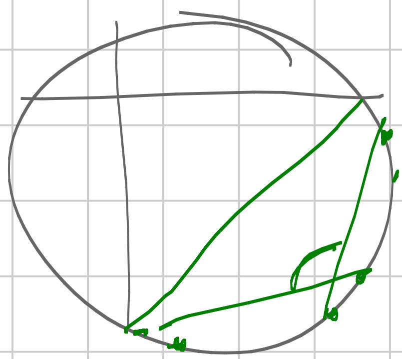


se guardo meglio le diagonali più lunghe ottengo il $+2$

ho preso k diagonali, quindi almeno k vertici $= \ell \geq k + 2$

Per ogni archetto posso avere delle altre diagonali, ma nessuna diagonale può collegare archetti diversi

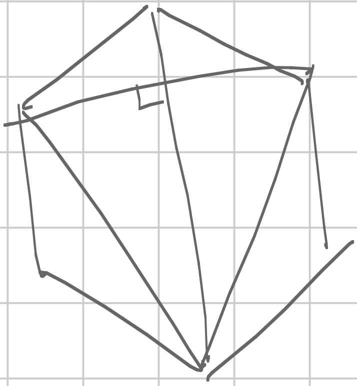
$A_1, \ldots, A_\ell$



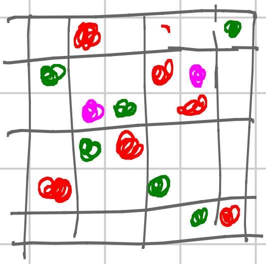
n° di diagonali prese $\leq$ ℓ

$$k + \sum_{i=1} \left(|A_i| - 2\right) = k - 2\ell + (n + \ell)$$

$$= n + k - \ell \leq n - 2$$

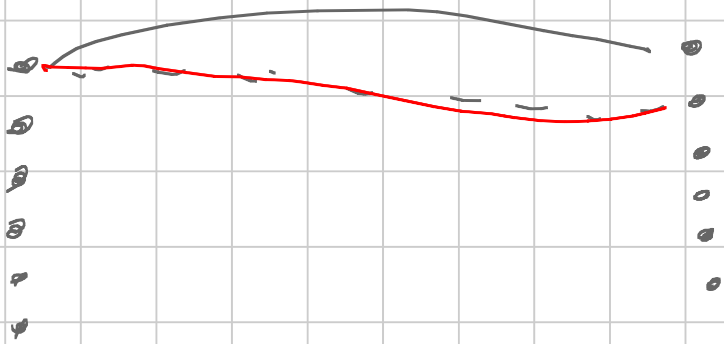


Es:



Costruisco un grafo bipartito

A = righe B = le colonne



Matching: è un insieme di archi tali che gli estremi sono tutti distinti.

Oss: ogni nodo (a sinistra)
deve essere collegato a q.l.c.

ogni coppia deve avere collegati
≥ 2 vertici

Lemma di Hall (dei matrimoni):

in un grafo bipartito considero questa funzione

$$\Gamma : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$$
$$X \longmapsto \{ b \in B : b \text{ è collegato con uno dentro } X \}$$

se $\forall X \in A$, $|X| \leq |\Gamma(X)|$
allora riesco a estrarre un matching che comprenda tutti gli elementi di A

Sol: Se tutte le $\leq$ dell'ipotesi sono $<$, allora posso collegare un tizio $a \in A$ a caso

Devo verificare l'ipotesi induttiva

$A \setminus \{a\}$ $\qquad$ $B \setminus \{\text{vicino estratto a caso}\}$

$\cup\!|$

$Y \longrightarrow \Gamma_{B\setminus caso}(Y)$

$|Y| > |\Gamma_{B\setminus caso}(Y)|$

se guardo Y nel problema originale

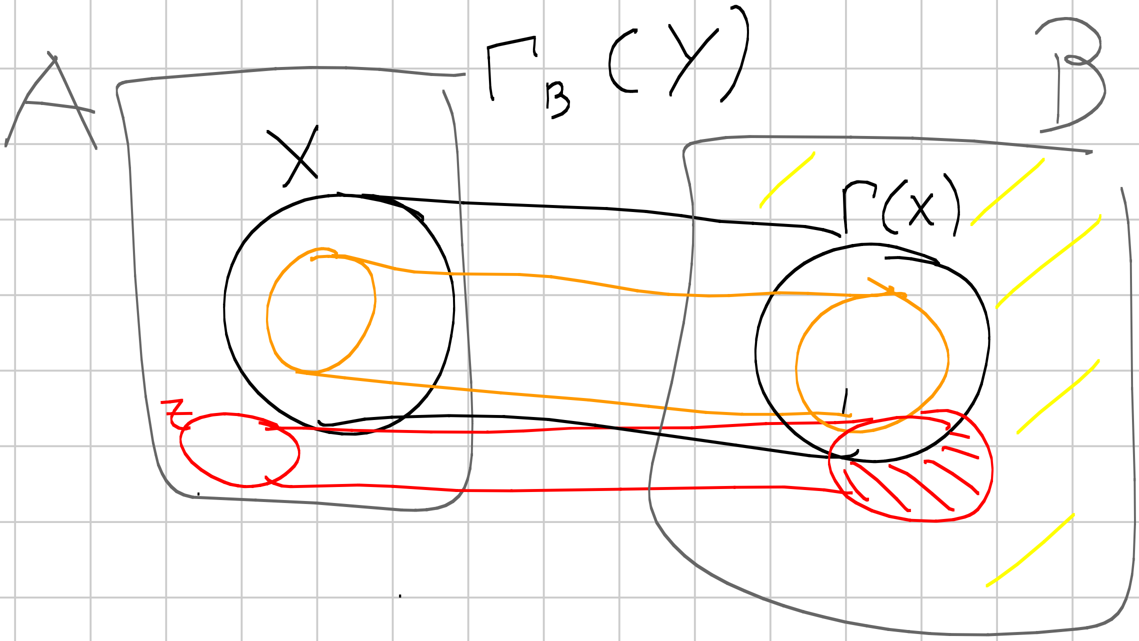
$$|Y| < |\Gamma_B(Y)|$$

ma $\big||\Gamma_B(Y)| - |\Gamma_{B \setminus caso}(Y)|\big| \leq 1$

Se invece ho un' $=$

$$|X| = |\Gamma_B(X)|$$

$$Y \subseteq X, \quad |\underbrace{\Gamma_{\Gamma_B(X)}(Y)}_{= \Gamma_B(Y)}| \geq |Y|$$



$$Z \subseteq A \setminus X \qquad \Gamma_B(Z) \setminus \Gamma(X) =: \Gamma_{B \setminus \Gamma(X)}(Z)$$

qui, non è detto che
$$\Gamma_{B \setminus \Gamma(X)}(Z) = \Gamma_B(Z)$$

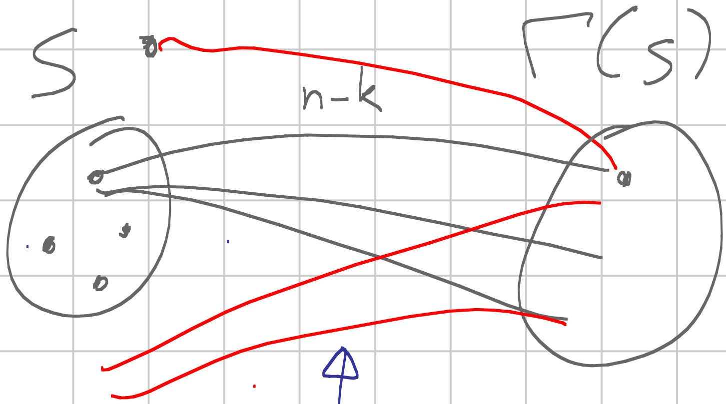
$$\cancel{|X|} + |Z| = |X \cup Z| \leq |\Gamma_B(X \cup Z)|$$
$$= \underbrace{|\Gamma_B(X)|}_{= \cancel{|X|}} + \underbrace{|\Gamma_B(Z) \setminus \Gamma_B(X)|}_{= |\Gamma_{B \setminus \Gamma(X)}(Z)|}$$

Torniamo alla tabella:

dobbiamo verificare che $\forall\, S \subseteq$ righe $|\Gamma(S)| \geq |S|$

in una tabella $n \times n$ ho già usato k colori

per il $k+1$ colore ogni riga è collegata a $n-k$ colonne e viceversa



$$|S|(n-k) = |E| = |\Gamma(S)|(n-k) - |\{\ldots\}| \leq |\Gamma(S)|(n-k)$$

E: gli archi in mezzo

Lemma: vale il Lemma di Hall se $\deg(a) \geq \deg(b)$ $\forall a \in A, b \in B$

Es: Vietnam 2010 TST 5

$n > m > 1$

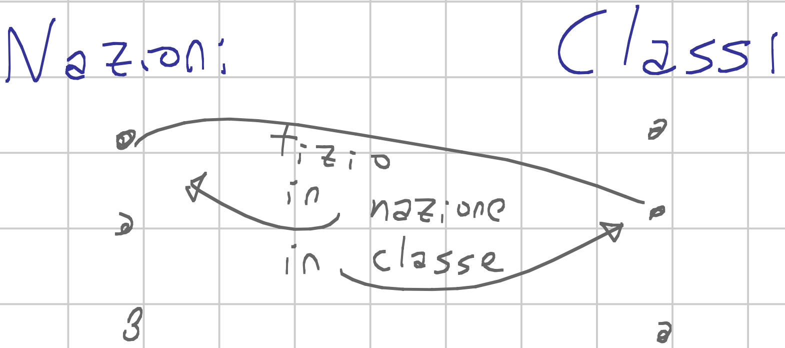
nazioni: n

classi: n

m persone $\forall$ nazione
ogni classe contiene m persone di nazioni diverse

Tesi: $\exists$ un rappresentante $\forall$ nazione che rappresentino anche le classi

Sol: costruisco un grafo bipartito



Vale l'ipotesi del Lemma del Lemma di Hall $\square$

Ordini parziali

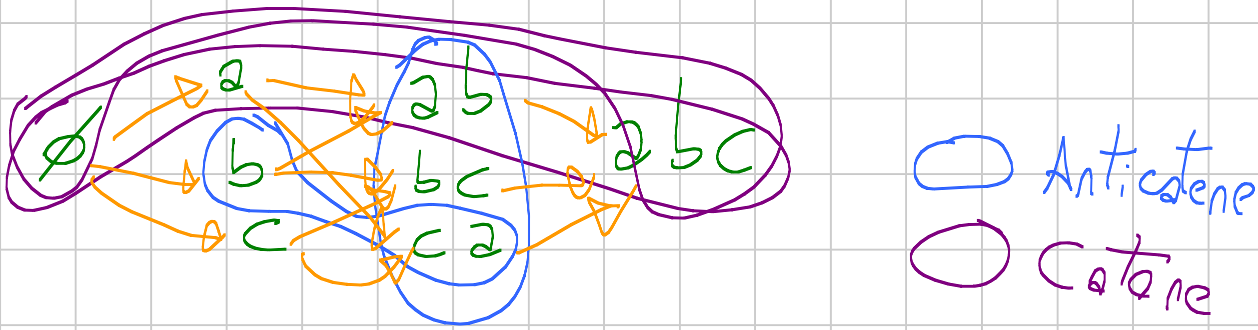
relazione antisimmetrica (antiriflessiva) e transitiva in un insieme

- il $\subseteq$ (tra insiemi)
- la $|$ (in $\mathbb{Z}$)

Una __Catena__ è un sottoinsieme di elementi tra loro confrontabili

Una __Anticatena__ è un sottoinsieme di el. tra loro mai confrontabili

Es $\quad X$ insieme $= \{a, b, c\}$



Th (Dilworth): C una catena, P_A una partizione in anticatene

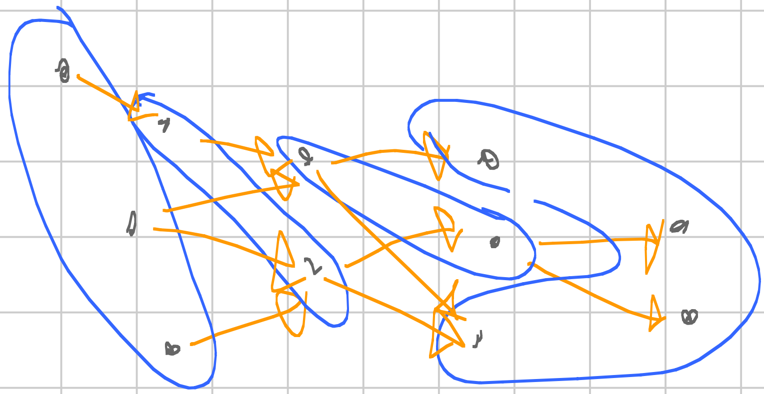
$$|C| \le |P_A|$$

1) $\exists\ C, P_A$ t.c. $|C| = |P_A|$

$$|A| \le |P_C|$$

2) $\exists\ A, P_C$ t.c. $|A| = |P_C|$

Dim:



prendo i + grandi = dove non arrivano frecce

togliendo loro procedo per induzione sulla lunghezza della catena più lunga $\boxed{1}$

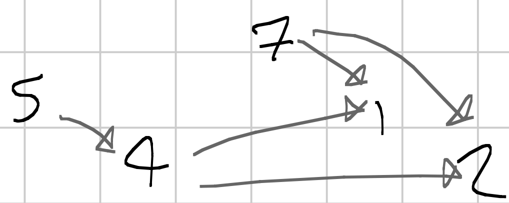
Es (lemma ab+1)

5 4 7 1 2 — ho ab+1 reali scritti in fila

Anticatena

Tesi: $\exists$ a+1 reali crescenti $\vee$
$\exists$ b+1 reali decrescenti — Catena

Sol:



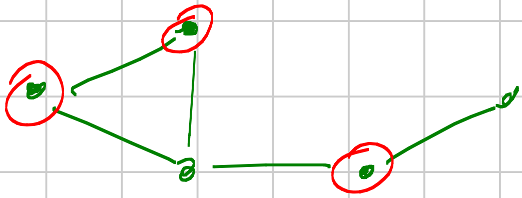
se $\nexists$ b+1 decr., allora la max catena è lunga $\leq b$

$\Rightarrow$ $\exists$ partizione in $\leq b$ anticatene
Dilworth

$\Rightarrow$ $\exists$ una anticatena $\geq a+1$
Pigeonhole

La seconda parte di Dilworth discende (abbastanza) facilmente dal seguente:

Def: <u>Covering</u> di un grafo è un insieme di nodi t.c. ogni arco ha un estremo in uno di questi



Th (Koenig): Dato un grafo bipartito $G = A \cup B$, allora

$\mathcal{m}$ matching, $\mathcal{C}$ covering

$$|\mathcal{m}| \leq |\mathcal{C}|$$

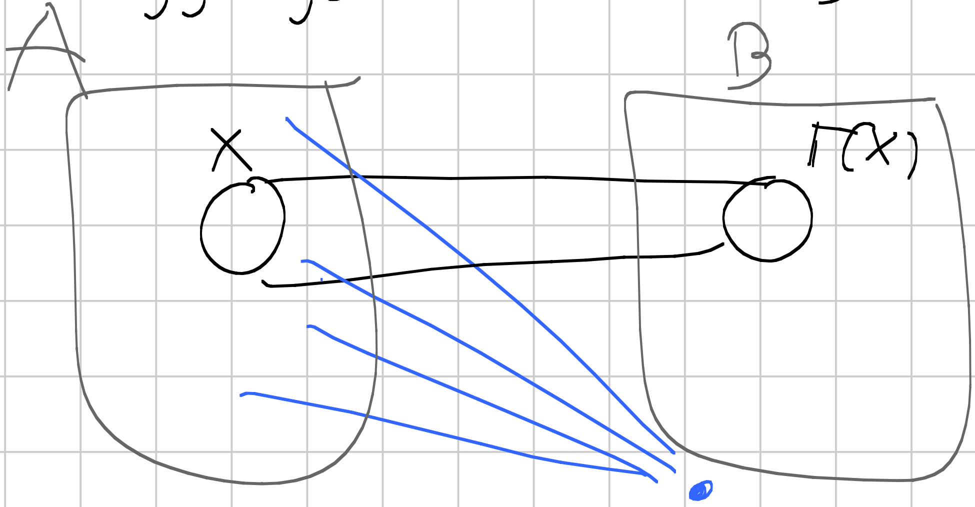
$$\exists\, \mathcal{m}, \mathcal{C} \; : \; |\mathcal{m}| = |\mathcal{C}|$$

Dim: prendiamo

$$|X| \leq |\Gamma(X)| \quad \forall X \subseteq A$$

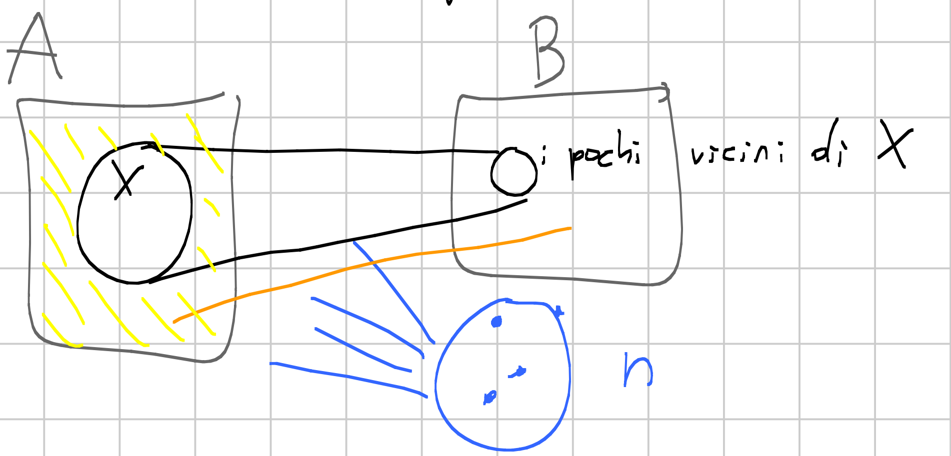
supponiamo $|X| \leq |\Gamma(X)| + 1$

aggiungendo un tizio a B amico di tutto A

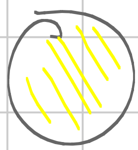


Per il Lemma di Hall $\exists$ matching tra A e $B \cup \{\bullet\}$, trascurando ora $\bullet$ ottengo un matching di tutti tranne al + 1 tizio $a \in A$

Prendo X t.c. massimizza $|X| - |\Gamma(X)|$
sia n questo massimo



Hall
$\Rightarrow \exists$ matching di cardinalità $|A| - n$

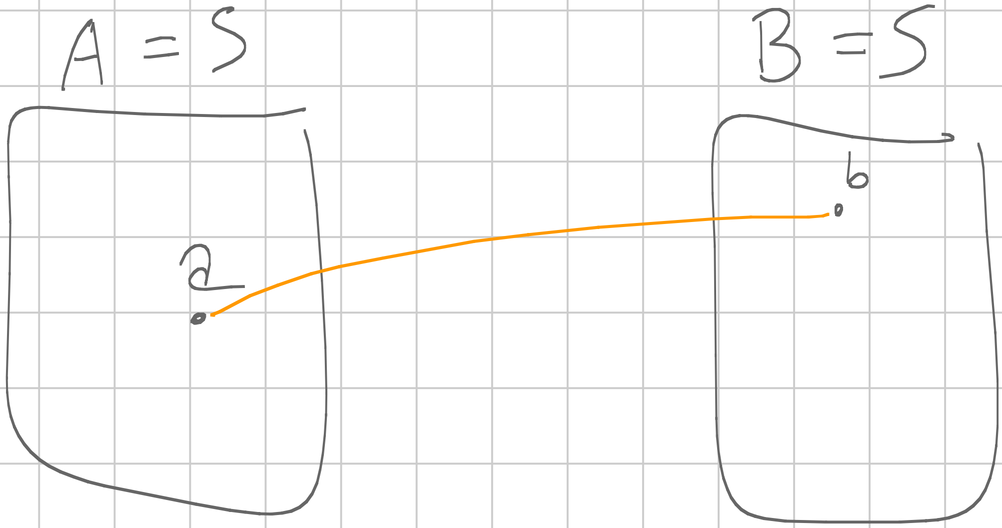
Per il covering: prendo $\Gamma(X)$ e  $A \setminus X$

$\Rightarrow$ il covering ha cardinalità $|A| - |X| + |\Gamma(X)|$ $\square$

Per dimostrare Dilworth 2

S con ordine parziale

$$A = B = S$$



$a \bullet \frown \bullet\, b$ quando $a < b$

Per Casa: – Completare questa dimostrazione

– Calcolare la massima cardinalità di una $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ t.c.

$\forall\ I, J \in \mathcal{F} \quad I \not\subseteq J \wedge I \not\supseteq J$