Combinatoria 3 ½ Medium

Tess

Note Title 9/7/2017

Esistenza Costruttiva

☑ Conservare i casi di = in una stima del bound

Es: Belarus 2004 A6

30 partecipanti ad una gara di 8 problemi
ciascuno risolve oppure no ciascun problema
alla fine un problema vale tanti punti quanti NON l'hanno risolto
risulta che un solo tizio arriva ultimo
Quanto ha fatto al max?

Sol: conto, o meglio, stimo la somma dei punteggi

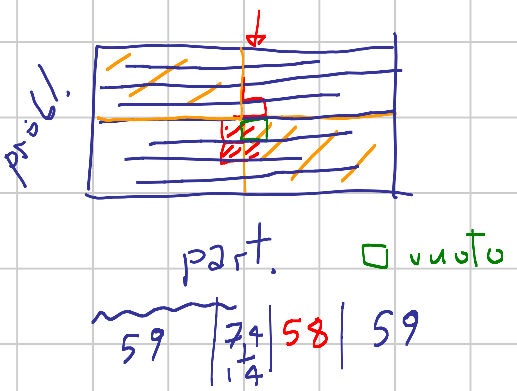
$$2n^2 \geq \sum_{i=1}^{8} k_i(n-k_i) = \sum \text{punteggi} \geq u + (n-1)(u+1)$$

per problema — per partec.

$$= \underbrace{(n-1)}_{n+1} + un$$

$$u \leq 2n-1$$

quindi $u \leq 59$



Il problema si finisce rifinendo la disuguaglianza

Algoritmi

Es: G un grafo $\deg(v_i) < d \Rightarrow$ posso colorare G con d colori

(Def: una colorazione di G è una mappa

$c : V \to \{\text{colori}\}$ t.c. se v_1, v_2 sono vicini
$c(v_1) \neq c(v_2)$)

Sol: tecnica alla "greedy" coloro un tizio alla volta del primo colore disponibile

(fisso un ordinamento di V e dei colori)

Oss: l'algoritmo produce una colorazione (valida)

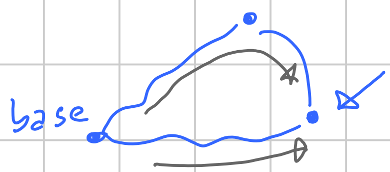
Oss: uso al max d colori.

[Colorazioni di grafi bipartiti in particolare:

posso bi-colorare un grafo $\Leftrightarrow$ non ammette cicli dispari

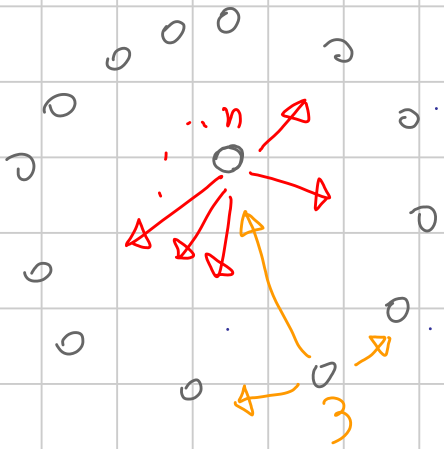
un tizio lo coloro a caso e parto da lui per colorare gli altri

va male solo se



ho trovato un ciclo dispari]

Es (China recente, ma facile)



n posizioni attorno al centro
ogni posizione contiene gettoni
in totale $\geq n^2+3n+1$
2 mosse:

Tesi: mostrare che riesco a porre almeno $n+1$ gettoni ovunque

Sol: per livellare le esterne, applico tantissime finché nessuno ha >2 gettoni.

ora applico la $n+1$ volte, sono sicuro che sulla circonferenza ho almeno $n+1$ gettoni per posizione

al centro però ho $\geq n^2+3n+1-(n+1)n$ − quelli che non ho mai portato al centro

anche 2 per posizione

≥ 3

allora, invece che applicare subito tutte le ne faccio una così, tutti i tizi che mi davano avendo 2 gettoni ne ottengono 3
e voglio ottene al massimo tanti tizi con 3 quanti con 1
mi basta alternare tizi da 3 con tizi da 1

No a cose come 332 2 3

x casa trovate delle super mosse che tolgono queste situazioni

Es: (Turàn) In un grafo non ho k-cricche, quanti sono al massimo gli archi?

Sol: facciamo le seguenti mosse:

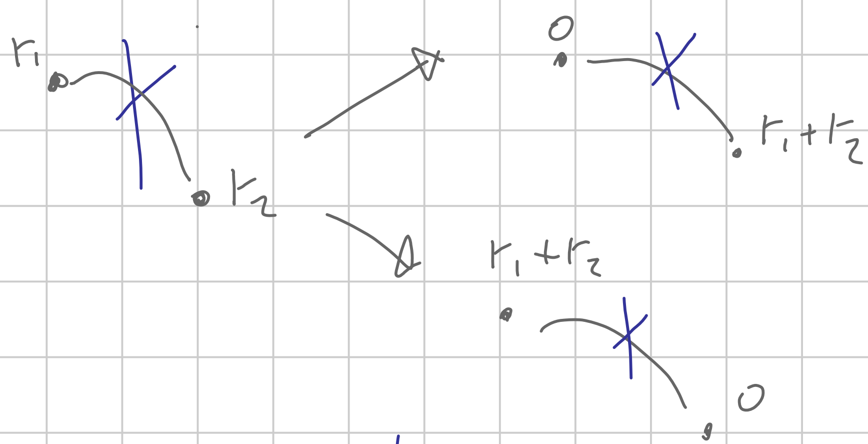
assegno un reale ad ogni vertice all'inizio 1

$$X = \sum_{E} r_1 \cdot r_2$$

dove 1 e 2 sono gli estremi dell'arco

all'inizio $X = |E|$

ora, ad ogni mossa, prendo un arco t.c. i 2 estremi hanno $r_i \neq 0$ e trasferisco uno dei 2 all'altro



scelgo la possibilità che non fa calare la X

X varia in questo modo:

~~perdo $r_1 r_2$~~

perdo $\emptyset$ $\quad r_1 \cdot \left(\sum_{\text{vicini di } 1} r_i\right)$

$\emptyset$ $\quad r_2 \cdot \left(\sum_{\text{vicini di } 2} r_i\right)$

guadagno $\to$ $\quad r_1 \cdot \left(\sum_{\text{vicini di } 2} r_i\right)$

$\searrow$ $\quad r_2 \left(\sum_{\text{vicini di } 1} r_i\right)$

l'algoritmo finisce e lascia una cricca di vertici non nulli

allora
$$|E| \leq X \leq \sum_{\substack{i<j \\ \in \text{cricca}}} r_i r_j \leq \left(\frac{\sum r_i}{R-1}\right)^2 \cdot \binom{R-1}{2}$$
$$= \left(\frac{n}{R-1}\right)^2 \binom{R-1}{2}$$

Es: (BMO 12.3)

$$A = \{2^n, 2^{n-1} \cdot 3, 2^{n-2} \cdot 3^2, \dots, 3^n\}$$
$$y \in [0, 3^{n+1} - 2^{n+1})$$

Dimostrare che $\exists$ $S \subseteq A$ t.c. $\sum_{s \in S} s = \Sigma(S)$

$$0 \leq \Sigma(S) - y < 2^n$$

Sol: algoritmo greedy: metto dentro S il + grande che non fa sforare $<$

Devo verificare che allora
$$\Sigma(s) \geq y$$

Suppongo per assurdo che $\Sigma(s) < y$, allora

per esempio $s \ni 2^n$, si procede in questo modo

X casa: scrivere le disuguaglianze che chiudono

Es: (IMO 14.5) Esistono solo monete del valore di $\frac{1}{n}$ per $n > 0$ intero

Dispongo di una somma $\leq 99 + \frac{1}{2}$

Tesi: mettere tutto in 100 scatole, t.c. ciascuna non abbia più di 1.

Sol: dispongo la moneta + grossa nella scatola più piena che la contiene

Da qui si scrivono delle disuguaglianze, ma non torna

Idea ulteriore: cercare di accorpare le monete
es: se ho $\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ fingo di avere solo una da 1

accorpo anche cose come $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{10}$ $\to \frac{1}{5}$

(mi riservo la possibilità di fare
$\frac{1}{15}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{15}$ $\to \frac{1}{5}$)

ora dispongo di una disuguaglianza forte:

$$\sum_{m_i<1} m_i \le \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\dots$$

$$\le \frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{1}{4}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}+\dots$$

La disug. da impostare è

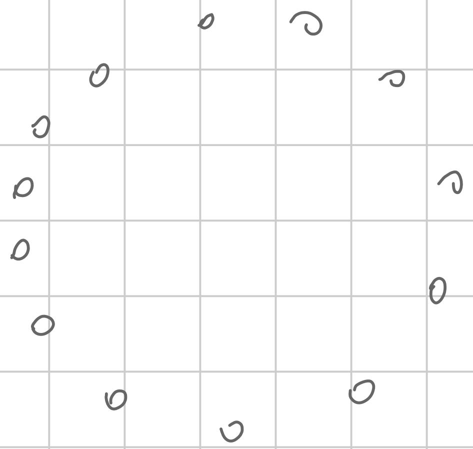
stimare spazio vuoto

e la moneta + grossa che rimane fuori

per casa risolvete il problema

Es per casa IMOSL 13.1

Es: BMO 2017.4



una moneta $\forall$ vertice (in tot $= n$)

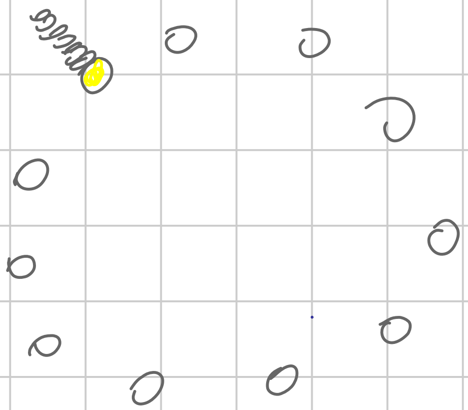
- sposto una moneta al vicino
- mando k moneta ad un vicino le altre all'altro

Una mossa completa è scegliere $\forall$ vertice quale eff.

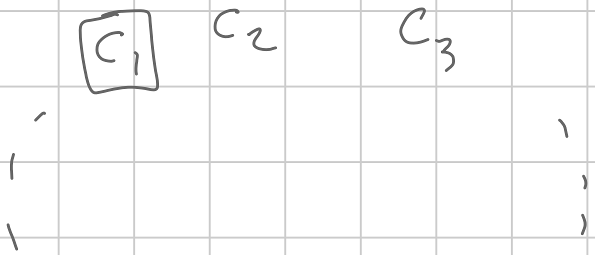
Tesi: contare (capire) quali conf. ottengo

Sol: Raccolgo tutte le monete su un vertice

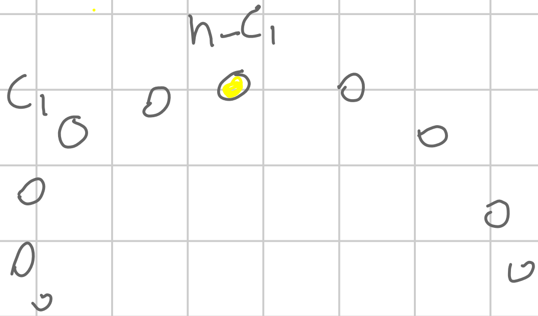
(se n dispari, faccio il giro dall'altra parte e raccolgo tutto non in 2 ma in 1 vertice)



Cerco di usare solo le



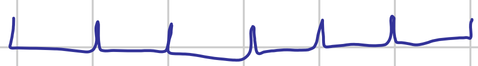
Ne stacco c_1, le altre le mando avanti



Su tutti vertici tranne faccio la mandando tutto all'indietro, su stacco la quantità giusta e la mando indietro; il resto avanti (anche il gettone va avanti)

per casa esercizio di scrittura

Es per casa: IMO 2010.5



tutte hanno un gettone

butto 1 da B_i e ne aggiungo 2 alla B_{i+1}

butto 1 da B_i e scambio B_{i+1} e B_{i+2}

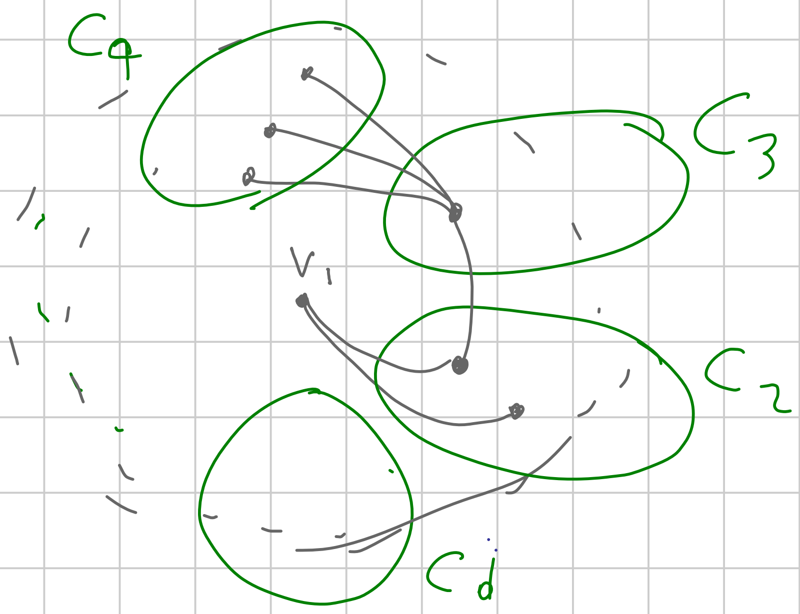
Tesi: ne voglio esattamente $2010^{2010^{2010}}$ sulla B_6

Es: Lemma chiave di IMOSL2015 C8

Se un G è d-colorabile, ma non d-1 colorabile allora esiste un ciclo che prende tutti i colori. ($d > 2$)

Oss: è facile vedere che esiste un cammino che attraversa tutti i colori per casa
(potete provare Dilworth ...)

Sol: seleziono $v_1 \in C_1$



Oss 1: per assicurarmi di un ponte tra v_1 e C_2 cerco di colorare il minimo numero di vertici col colore C_1 (e così via per tutti i C_i)

Oss 2: tutti i tizi • sono collegati con v_1

Mega trucco: sposto i grigi in avanti di 1 colore (tranne v_1)

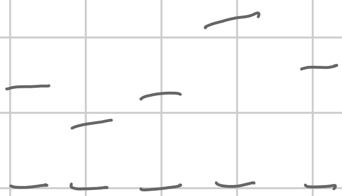
Oss 3: ottengo ancora una colorazione lecita

Ora c'è un tizio • t.c. ora sta in C_2 prima era in C_d collegato con v_1

altrimenti v_1 lo potevo spostare (in C_2 o C_d ...)

☒ Costruzioni induttive

Es: IMO 2017.5



$N(N+1)$ tizi in fila
ne voglio eliminare $N(N-1)$, quindi rimarranno $2N$ tizi $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{2N}$

Tesi: voglio che nell'ordine con cui rimangono nessuno stia tra b_1 e b_2; " ; b_2 b_3 ; ... b_{2N-1} b_{2N}

Sol: se b_1 e b_2 sono vicini, la prima condizione è soddisfatta

Oss: voglio una costruzione induttiva

Nel passo induttivo voglio eliminare $2N$ e ricordarmi i tizi che diventeranno b_1 b_2.

N+1 blocchi
da N

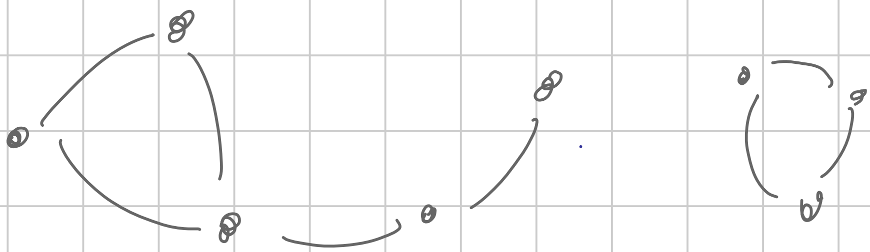
vorrei prendere $b_1 b_2$ da uno stesso blocco, eliminare i tizi di quel blocco e altri N da gli altri blocchi

da ogni blocco c'è una coppia candidata a (b_1, b_2)
prendo quello con b_2 più basso

gli altri N sono tolti 1 per blocco (il + basso l_i)

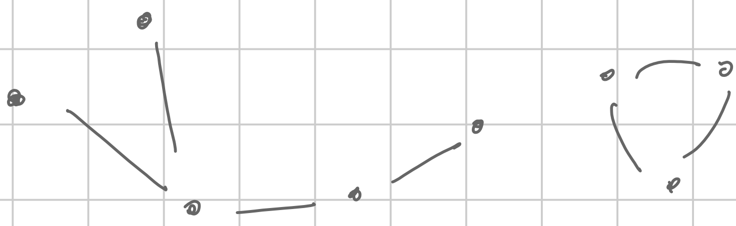
Es: voglio contare quante sono le colorazioni con $|d|$ colori di un Grafo G

$G =$



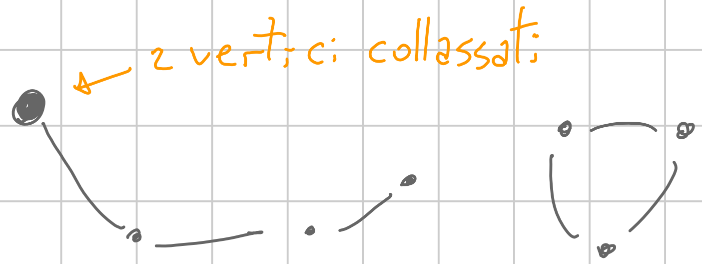
Sol: voglio un'induzione su G togliendo archi o vertici

$G' =$

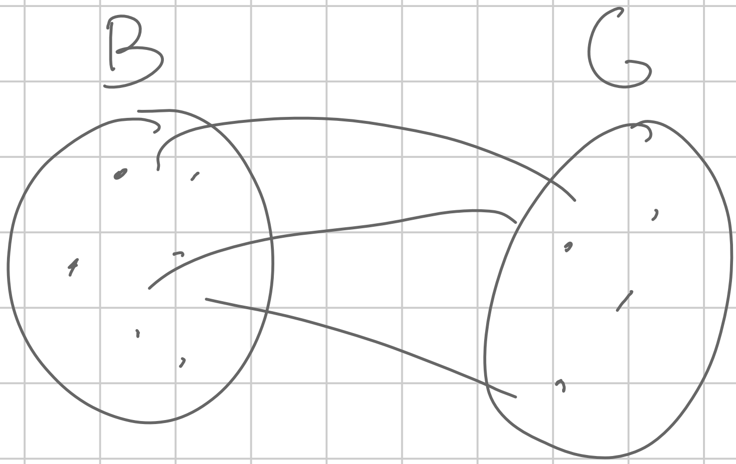


Sia $\mathcal{C}(G)$ il # di colorazioni allora relazione tra $\mathcal{C}(G)$ $\mathcal{C}(G')$?

$$\mathcal{C}(G') - \mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(G'')$$

$G'' =$ 

Es: (RMM 2012.1)

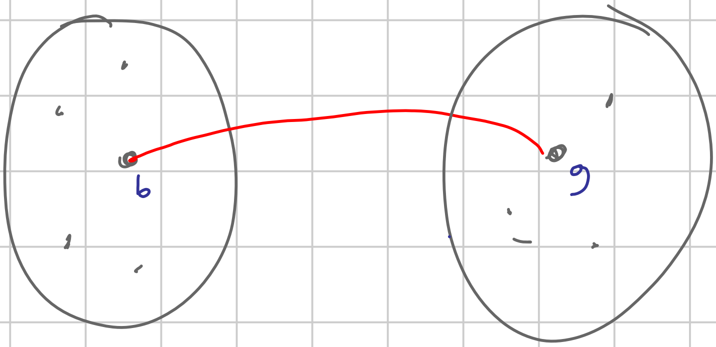


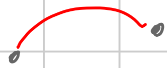
$f(B,G) =$ numero di sottoinsiemi di B "popolari"

$g(B,G) =$ " G "

Tesi $f(B,G) \equiv g(B,G) \mod 2$

Sol: dimostro la tesi induttivamente



$f(B', G')$, $g(B', G')$ dove B', G' sono gli stessi di B, G ma senza 

$$f(B, G) - f(B', G') = ?$$

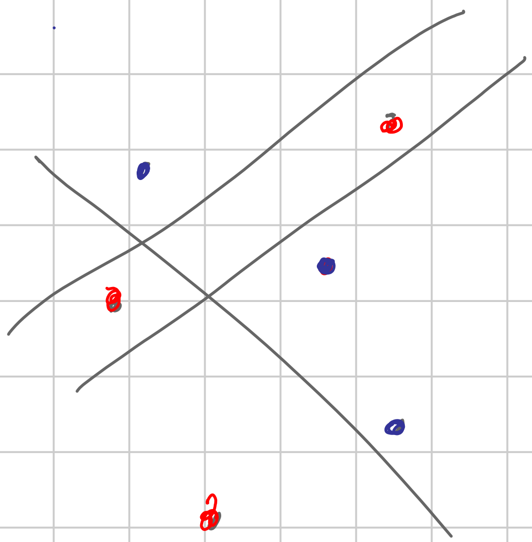
$f(B' \setminus B_g \, , \, G' \setminus G_b)$

per casa

conoscenti di g — conoscenti di b

Ora l'ipotesi induttiva (induzione estesa) finisce

Es IMO 2013.2



rossi + blu: $2014 + 2013$ punti disegnati non allineati a 3 a 3

ho a disposizione 2013 rette voglio dividere i punti dai punti

Sol: Spero in un'induzione sul numero di punti blu che è = al numero di rette

potrei usare 2 rette per separarne 2

Infatti, dati 2 punti blu, traccio 2 parallele alla loro congiungente molto vicine

Devo però sistemare l'ultimo punto (conviene sistemarlo in anticipo)

per casa: completare

(una possibile idea è trovare senza • all'interno ... vedere se funziona.)

Es: TUR 2013 TST 9

G un grafo t.c. il grado minore è $\geq k$
su n vertici connesso
allora posso colorare G con $n-k$ colori,
t.c. $\forall$ coppia di archi esiste un cammino multicolor che li congiunge

Sol: traccia:

induzione (estesa) sul grafo G

i) studiare quando si riesce a togliere un arco

ii) " togliere un vertice di grado k
(si riesce a ricondursi al caso più piccolo se i vicini hanno almeno $k+1$ vicini)

iii) diminuire le cricche di tizi che hanno grado k

per casa provare questo problema (PreIMO 14 C7)

Es stupido: se un grafo G è t.c. $\forall$ sottografo $\exists$ un vertice di grado $\leq k$ allora si può $k+1$ - colorare G

Giochi

Th: A e B giocano al seguente gioco:
ciascuno a turno eff. una mossa
dopo finite mosse uno tra A e B viene dichiarato vincitore

$\Rightarrow$ uno tra A e B ha una strategia vincente

Dim: induzione sull'albero delle partite
↳ assumendo finite config. e finite mosse possibili per terminare il gioco

P.B. dalle foglie ...
P.I. sono in un vertice V, tocca wlog A

se A può effettuare una mossa per lasciare B in un V perdente la fa (e V diventa vincente per A)
altrimenti A gioca a caso e perde (V diventa vincente per B)

Oss: alla fine i vertici sono tutti colorati di V o P

se un giocatore sta su un V, allora $\exists$ mossa che lo manda in P

e se " " P, $\forall$ mossa il vertice in arrivo è V

Es stupido: c'è una pila di gettoni e ciascuno (A e B) possono togliere 1, 2, 3, 4 gettoni; chi non può togliere perde!

Sol: $P = \{$ config. dove ci sono $\equiv 0\ (5)$ gettoni $\}$

$V =$ le altre

Es (Nim): ci sono tante pile di gettoni; ciascuno (A e B) deve scegliere una pila e togliere almeno un gettone. vince chi toglie l'ultimo

Sol: in ogni momento $(g_1, g_2, \ldots, g_n)$

scrivo in binario g_i e faccio XOR

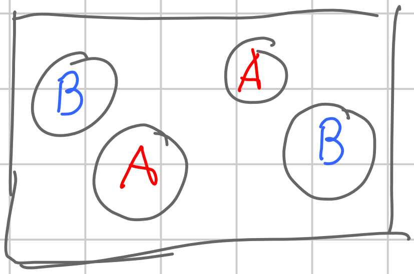
$(5, 6, 7)$

$$\rightarrow \begin{array}{r} 101 \\ 110 \\ 111 \\ \hline 100 \end{array}$$

se il risultato è 0 sono in P, altrimenti in V per casa: dimostrate che questa è una distinzione corretta

☒ L'opposizione nei giochi:

Es: Gioco della preparazione della tavola:



chi non può mettere piatti perde

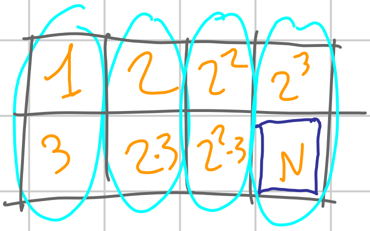
Sol: A vince giocando al centro
poi A gioca ponendo il piatto all'opposto di come gioca B

Es: Si gioca con i divisori di N

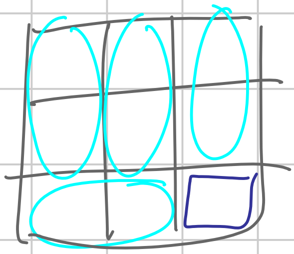
A, B possono cancellare uno dei divisori (>0) di N che all'inizio sono scritti alla lavagna

A inizia cancellando N
però se uno gioca d, dopo l'altro deve giocare d' t.c. $d \mid d' \vee d' \mid d$

Sol: supponiamo $N = 2^a \cdot 3^b$



se A gioca dentro un ◯
B risponde " lo stesso ◯



per casa esercizio di scrittura: dire come eff. la suddivisione in coppie

Es: IMOSL 2014 C8

A e B prelevano ad ogni mossa uno dei sottoinsiemi di $\{0, \dots, 9\}$

Alla fine ciascuno controlla se ha pescato un sottoinsieme t.c. tolto quello ogni cifra compare un numero pari di volte, se ci riesce, vince

$\{0,1\} \to$

$\emptyset$	$\times$	A
0	01	B

Tesi: dire chi vince dopo ciascuna mossa di A

Sugg. chiave: $$\sum_{k \text{ dispari}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ pari}} \binom{n}{k}$$

Sol (con D-C): scelgo $\cancel{x} \in A$ dove $|A| = n$

ci sono sottoinsiemi che hanno x

e altri che non ce l'hanno

Per casa, pensateci!