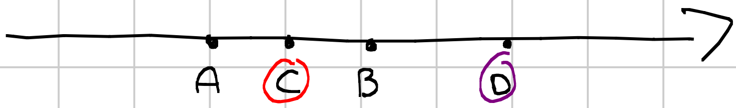
G2 Medium - Geometria Proiettiva

Note Title 9/5/2017

- **Lunghezze con segno**

Fissiamo una retta orientata



da sx a dx i segmenti sono di lungh. positiva altrimenti negativa

AB $+$

BA $-$

Ad esempio $\frac{AC}{CB}$ $+$ $\frac{AD}{DB}$ $-$

D • **Birapporto**. Dati 4 punti allineati A, B, C, D

$$(A, B; C, D) := \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}$$

~~X~~ **Ex.** 24 permutazioni di $(A, B; C, D)$. Quanti birapporti diversi? 6!

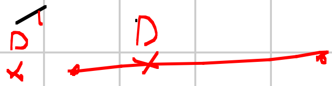
D • $(A, B; C, D)$ sono q. armonica sse $(A, B; C, D) = -1$

Oss. $\boxed{(A, B; C, D) = (A, B; C, D') \Rightarrow D \equiv D'}$

Perché? $\frac{\cancel{AC}}{\cancel{CB}} \cdot \frac{BD}{DA} = \frac{\cancel{AC}}{\cancel{CB}} \cdot \frac{BD'}{D'A}$

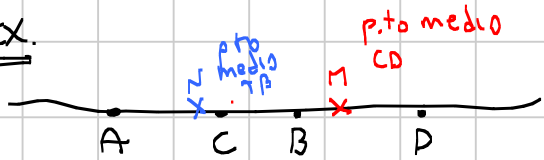
$$\frac{BD}{DA} = \frac{BD'}{D'A} \Rightarrow D \equiv D'$$

I $\frac{BD}{DA} = \frac{BD'}{D'A} \rightarrow \frac{BD}{\cancel{BA}} = \frac{BD'}{\cancel{BA}}$



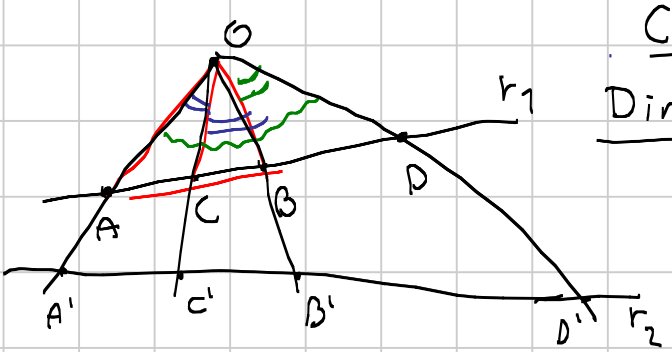
II $\frac{BD}{DA} = \frac{BD'}{D'A} \Rightarrow \frac{BD}{DB + BA} = \frac{BD'}{D'B + BA}$

Ex.



TFAE:
1. $(A, B; C, D) = -1$
2. $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$
3. $MA \cdot MB = MC^2$
4. $CA \cdot CB = CD \cdot CN$
5. $AB^2 + CD^2 = 4MN^2$

• Il birapporto si conserva per proiezione da un p.to esterno



Claim: $(A,B;C,D) = (A',B';C',D')$

Dim. $\dfrac{AC}{CB} \cdot \dfrac{BD}{DA}$ (*)

th seni $O\hat{A}C$: $\dfrac{AC}{\sin A\hat{O}C} = \dfrac{AO}{\sin O\hat{C}A}$

" $O\hat{B}C$: $\dfrac{CB}{\sin C\hat{O}B} = \dfrac{OB}{\sin O\hat{C}B}$

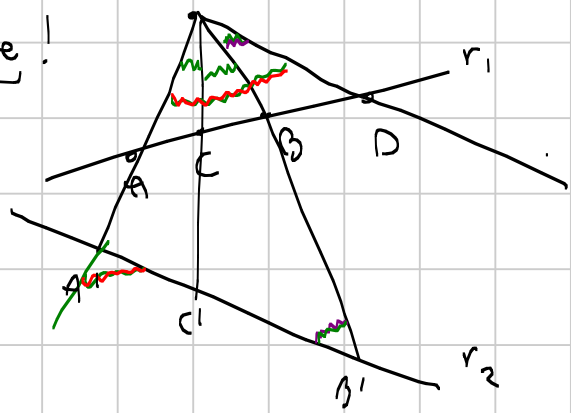
Dunque $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{AO}{OB} \cdot \dfrac{\sin A\hat{O}C}{\sin C\hat{O}B}$

Analogamente $\dfrac{BD}{DA} = \dfrac{OB}{AO} \cdot \dfrac{\sin B\hat{O}D}{\sin D\hat{O}A}$

Dunque (*) $= \dfrac{\sin A\hat{O}C}{\sin C\hat{O}B} \cdot \dfrac{\sin B\hat{O}D}{\sin D\hat{O}A}$ (**)

Ripetendo su r_2 ottengo il claim perché (**) dipende solo dagli angoli formati da OAA', OBB', OCC', ODD'.

Caso limite!



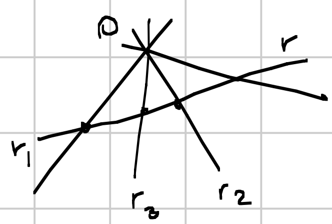
• Su ogni retta mettiamo un p.to all' ∞ [tutte le rette parallele "passano" per questo punto]

• $\boxed{D}$ $D \equiv \infty$ $[A,B;C,D] = \dfrac{AC}{CB} \cdot \cancel{\dfrac{BD}{DA}}$ Importante (∞)

$C \equiv \infty$ $[A,B;C,D] = \cancel{\dfrac{AC}{CB}} \cdot \dfrac{BD}{DA}$

Ex. Tutto torna con l'invarianza

Def. Birapporto fra rette

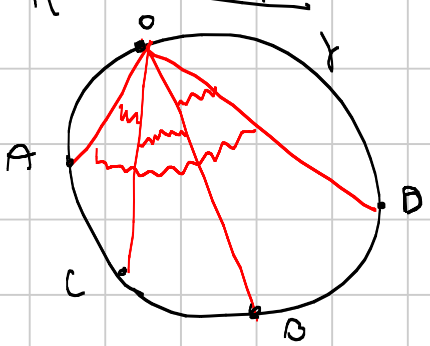


$(r_1, r_2; r_3, r_4)_r \overset{def}{=} (r_1 \cap r, r_2 \cap r, r_3 \cap r, r_4 \cap r)$

Oss. è una buona def.

Oss. $(r_1, r_2; r_3, r_4)_r = \dfrac{\sin r_1 \hat{O} r_3}{\sin r_3 \hat{O} r_2} \cdot \dfrac{\sin r_2 \hat{O} r_4}{\sin r_4 \hat{O} r_1}$

Def. Birapporto su cfr



Prendo A, B, C, D su γ cfr.

Prendo $O \in \gamma$

$(A,B;C,D)_\gamma := (OA, OB; OC, OD)_r$

Oss. È una buona def! Perché il bir. fra rette dipende solo dagli angoli che queste formano a vicenda e in questo tali angoli rimangono uguali

<u>Oss.</u> $O \in \{A, B, C, D\}$. E.g. $O = A$, AA è la retta tangente

<u>Oss.</u> $$(A, B; C, D)_\gamma = \frac{\sin A\hat{O}C}{\sin C\hat{O}B} \cdot \frac{\sin B\hat{O}D}{\sin D\hat{O}A} = \frac{\frac{AC}{\cancel{2R}}}{\frac{CB}{\cancel{2R}}} \cdot \frac{\frac{BD}{\cancel{2R}}}{\frac{DA}{\cancel{2R}}} = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}$$

<u>Ex.</u> I birapporti si conservano per inversione

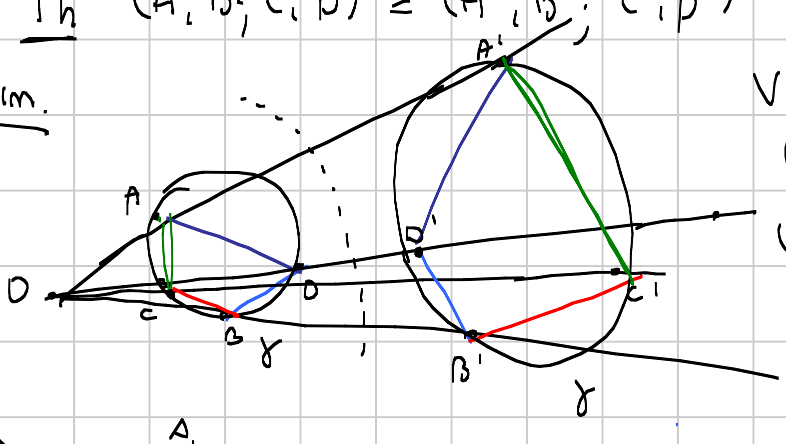
A, B, C, D allineati (o conciclici)

A', B', C', D' immagini tramite un'inversione di centro O $\notin \{A, B, C, D\}$

(e quindi anche loro sono allineati o conciclici)

<u>Th</u> $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$, $\boxed{\text{Per caso gli altri casi}}$

<u>Dim.</u>



Vogliamo

$$(A, B; C, D)_\gamma = (A', B'; C', D')_{\gamma'}$$

Uso la relazione di prima

$$LHS = \frac{AC}{CB} \cdot \frac{BD}{DA}$$

$$RHS = \frac{A'C'}{C'B'} \cdot \frac{B'D'}{D'A'}$$

$$O\hat{A}C \sim O\hat{C'}A'$$

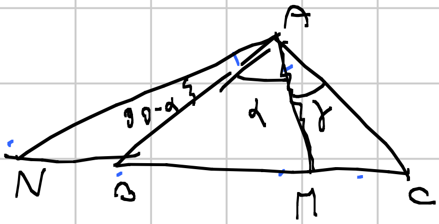
$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{OC}{OA'} \qquad \frac{CB}{C'B'} = \frac{OB}{OC'}$$

$$\frac{BD}{B'D'} = \frac{OB}{OD'} \qquad \frac{DA}{D'A'} = \frac{OA}{OD'}$$

$$\Rightarrow \frac{LHS}{RHS} = \frac{OC}{OA'} \cdot \frac{\cancel{OB}}{\cancel{OD'}} \cdot \frac{OC'}{\cancel{OB}} \cdot \frac{\cancel{OD'}}{OA} = \frac{R^2}{R^2} = 1$$

<u>Ex.</u> \ <u>Lemma</u> Delle seguenti, due qualsiasi implicano la terza:

1) AM bisettrice
2) $(B, C; M, N) = -1$
3) $M\hat{A}N = 90°$



<u>1) & 2)</u>

$1) \Rightarrow \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC}$ (th. della bis)

$2) \Rightarrow \frac{BM}{MC} \cdot \frac{CN}{NB} = -1 \overset{(1)}{\Rightarrow} \left|\frac{CN}{NB}\right| = \frac{AC}{AB}$ Th. bisettrice esterna inversa

AN bisettrice esterna
$\Rightarrow (1)$

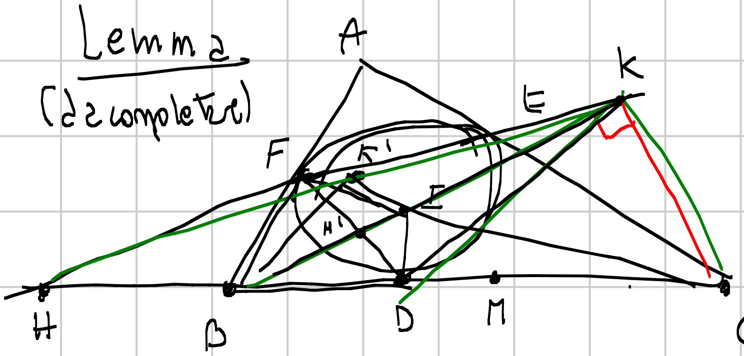
$M\hat{A}N = 90.$

<u>1) & 3)</u> OK.

<u>2) & 3)</u> $(B, C; M, N) = -1$ $\Rightarrow$ usando l'uguaglianza del th. con gli angoli e prendendo i moduli $\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} \cdot \frac{\sin(90+\gamma)}{\sin(90-\alpha)} = 1$

$$\Rightarrow \tan\alpha = \tan\gamma \Rightarrow \alpha = \gamma.$$

Lemma
(da completare)



$BI \cap EF =: K$

Th $CK \perp KB$

Dim. Dobbiamo verificare che

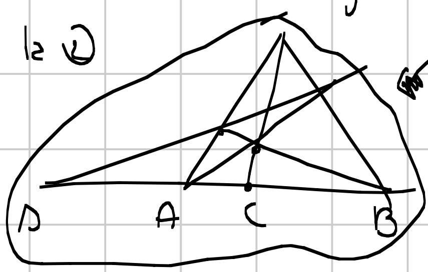
① · KB biseca $H\hat{K}D$

C② · $(H, D; B, C) = -1$

Per la ① cosa devo fare? BI è l'asse di FD. Allora $FK = KD$, però $BI \cap FD = M'$ punto medio di DF

Dunque KB biseca $H\hat{K}D$ perché è altezza/mediana/bisettrice in un triangolo isoscele

Per la ②

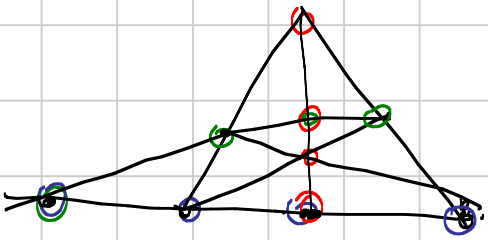


In questo caso $(A, B; C, D) = -1$

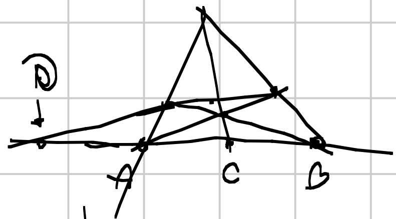
In virtù di questo

$(B, C; D, H) = -1 \longrightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CH}{HB} = -1$

$\xrightarrow{\text{l'inv.}} \frac{HB}{BD} \cdot \frac{DC}{CH} = -1 \Rightarrow (H, D; B, C) = -1$



Come costruire il IV armonico?



Desargues / Pappo - Pascal

De · $A_1 A_2 A_3$, $B_1 B_2 B_3$ triangoli

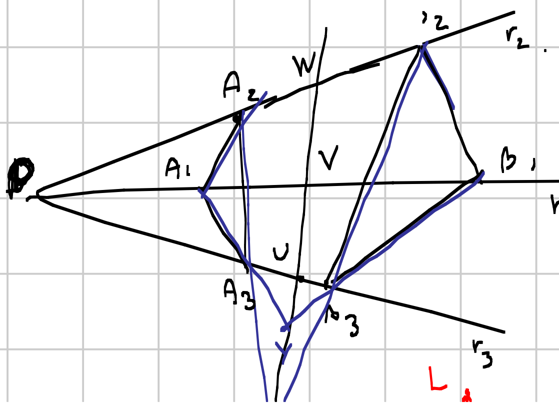
$A_1A_2 \cap B_1B_2 =: Z$

$A_1A_3 \cap B_1B_3 =: Y$

$A_2A_3 \cap B_2B_3 =: X$

X, Y, Z allineati $\Leftrightarrow$ A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 concorrono

Dim. $\Leftarrow$), $\Rightarrow$) per assurdo.



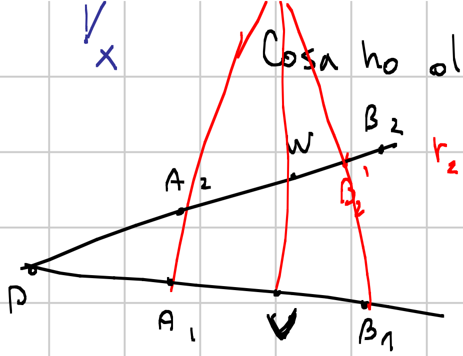
$\Leftarrow$) $X := A_2A_3 \cap B_2B_3$

$Y := A_1A_3 \cap B_1B_3$

Voglio che XY, A_1A_2, B_1B_2 concorrono

$(P, V; A_1, B_1) \underset{\text{da } Y \text{ su } r_3}{=} (P, U; A_3, B_3) \underset{\text{da } X \text{ su } r_2}{=} (P, W; A_2, B_2)$

Cosa ho ottenuto



$(P,V;A_1,B_1) = (P,W;A_2,B_2)$

$\Downarrow$

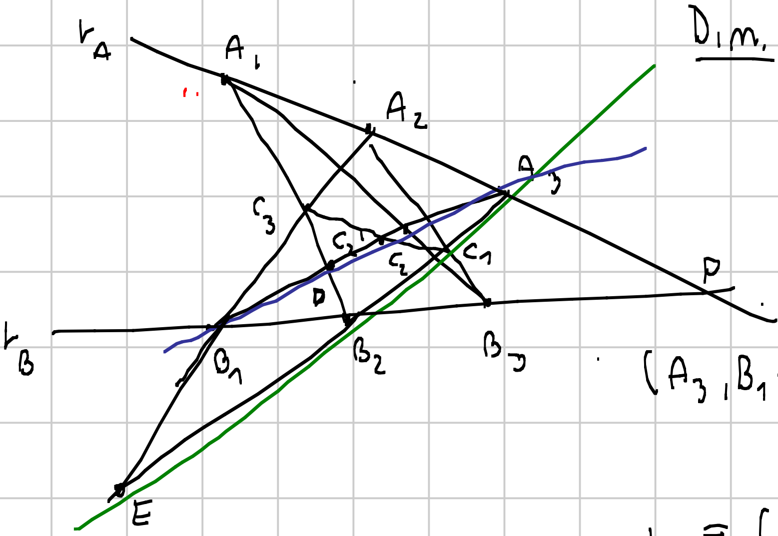
$A_1A_2,\ VW,\ B_1B_2$ concorrono

Per assurdo non fosse vero

Sia $L := A_1A_2 \cap VW$. $B_2' := LB_1 \cap r_2$.

Allora $PWA_2B_2' \underset{\text{per proiezione da } L}{=} PVA_1B_1 \underset{hp}{=} PWA_2B_2 \Longrightarrow B_2 \equiv B_2'$ ↯

Thm (Pappo)



Th C_1, C_2, C_3 allineati

Dim. P.a. non lo sono $C_2' := C_1C_3 \cap B_1A_3$

Voglio che $C_2 \equiv C_2'$

$D := A_1B_2 \cap B_1A_3$

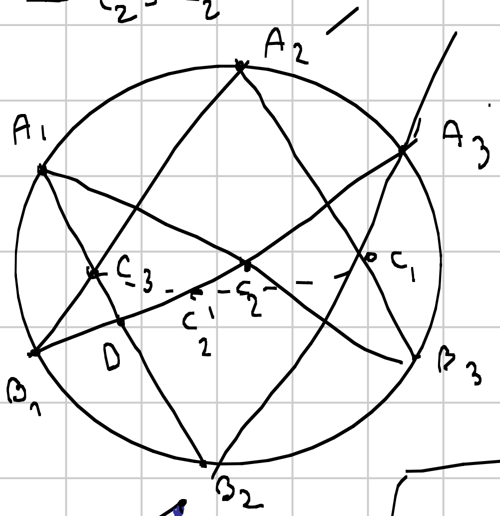
$E := A_2B_1 \cap B_2A_3$

$(A_3,B_1;D,C_2) \underset{\text{da } A_1 \text{ su } r_B}{=} (P,B_1;B_2,B_3) \underset{\text{da } A_2 \text{ su}}{=} (A_3,E;B_2,C_2)$

$\underset{\text{da } C_3 \text{ su}}{=} (A_3,B_1;D,C_2')$. E

$\Rightarrow C_2 \equiv C_2'$

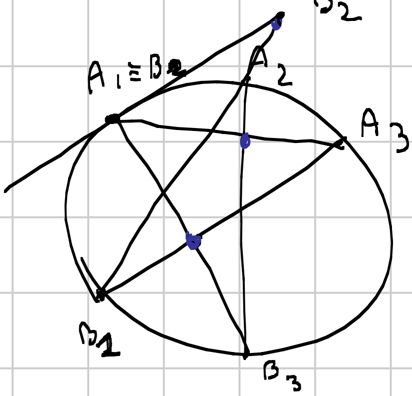
Thm (Pascal)



C_1, C_2, C_3 allineati

Dim. Copiamo e modifichiamo quella di sopra

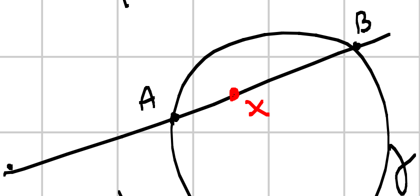
Oss. Pascal funziona anche se due punti dovessero coincidere



POLI / POLARI

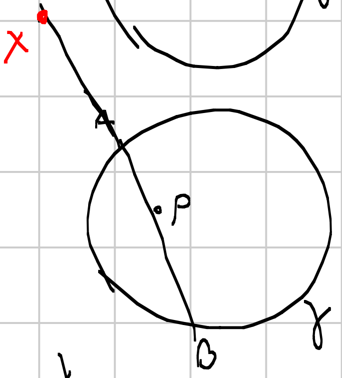
Polare rispetto ad una circonferenza γ. [o due rette r_1, r_2]

Fig. 1



Def. Traccio le rette che passano per P e intersecano γ in A, B.
La polare (di P risp. a γ) è il luogo dei punti X
t.c. $(A, B; P, X) = -1$.

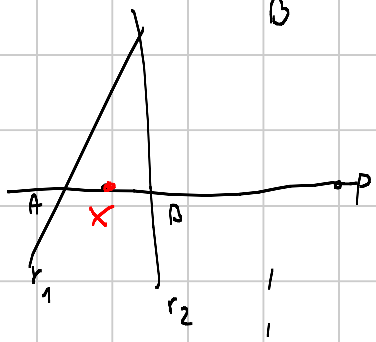
Fig. 2



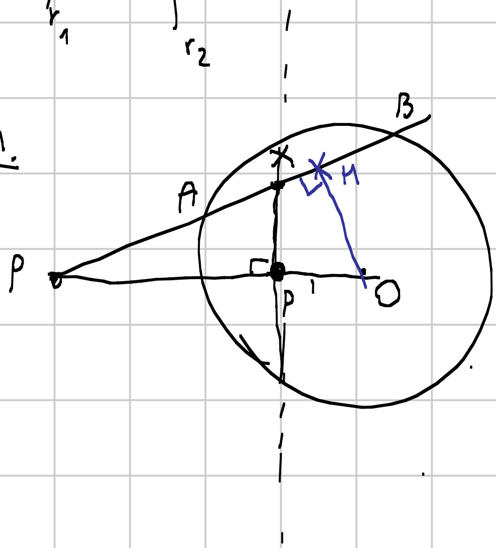
Domanda: Che luogo è? (nel caso della circonferenza)

Risposta: La retta perpendicolare a OP passante per P', dove P' è l'immagine di P mediante un'inversione circolare in γ

Fig. 3



Dim.



Voglio mostrare che $(A, B, P, X) = -1$

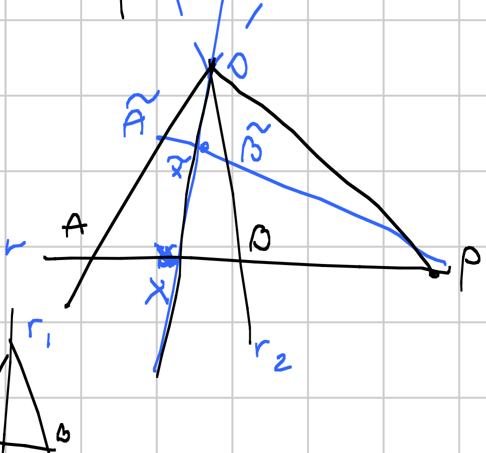
Questo è vero sse $MX \cdot MP = MA^2$ [Ex. in rete

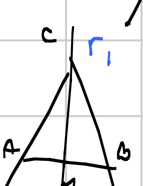
$$MX \cdot MP \underset{\text{[illegible]}}{=} MP^2 - PX \cdot MP \underset{MXP'O \text{ ciclico}}{=} MP^2 - PP' \cdot PO =$$

$$= MP^2 - (OP^2 - \underbrace{OP' \cdot OP}_{P,P' \text{ inversi } = OA^2}) = MP^2 - OP^2 + OA^2$$

$$= -OM^2 + OA^2 = AM^2.$$

E rispetto a due rette?





Prendo una retta r a caso e sia X t.c. $(A, B; P, X) = -1$

Claim: la polare è OX

sia $\tilde{r}$ un'altra retta e $\tilde{X} := \tilde{r} \cap OX$

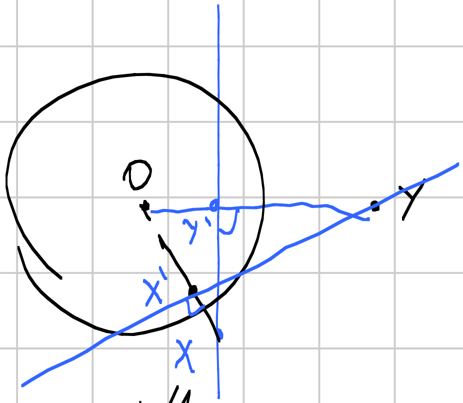
Per proiezione $(\tilde{A}\, \tilde{B}\, P\, \tilde{X}) = (A\, B\, P\, X) = -1$
e quindi $\tilde{X} \in$ luogo

Oss. $(OA, OB; OP, OX)_r = -1$

Dualità: $X \in \text{pol}\, Y \Rightarrow Y \in \text{pol}\, X$

Conseguenza: X, Y, Z allineati sse $\text{pol}\, X, \text{pol}\, Y, \text{pol}\, Z$ concorrono.

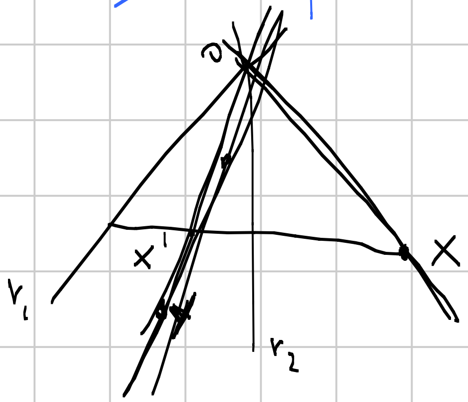
Dim.



Mi basta mostrare che $X'Y \perp OX$

$OX' \cdot OX = r^2 = OY' \cdot OY$
↑
inv.

Dunque $X'XYY'$ ciclico $\Rightarrow X\hat{X'}Y = X\hat{Y'}Y = 90°$

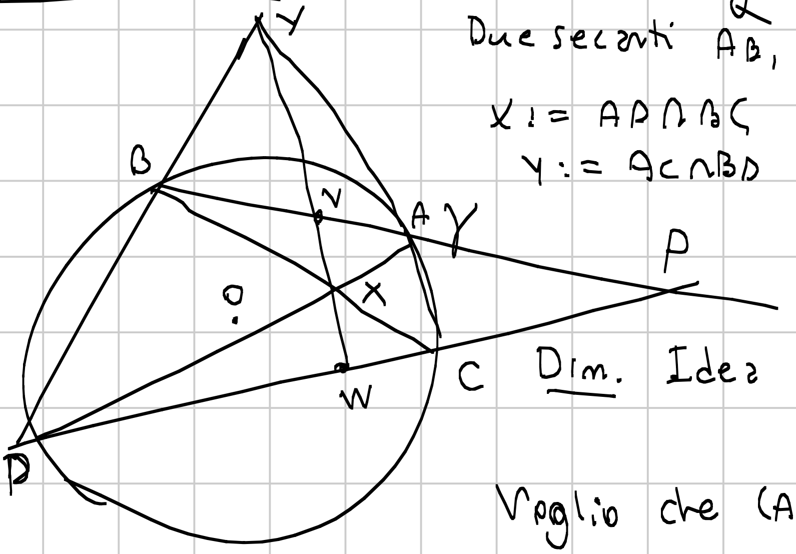


$(r_1, r_2; OX, \text{pol}\, X)_r = -1$

⇓

$(r_1, r_2; \text{pol}\, X, OX) = -1$

LEMMA DELLA POLARE



P esterno a γ

Due secanti AB, CD

$X := AD \cap BC$

$Y := AC \cap BD$

Th. $XY = \text{pol}\, P$

Dim. Idea $XY \cap AB =: V$

$XY \cap CD =: W$

Voglio che $(A, B; P, V) = (C, D; P, W) = -1$

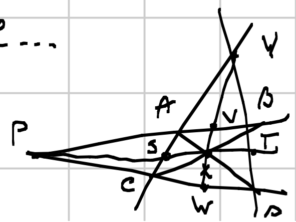
$(A, B; P, V) \underset{\substack{\text{da} \\ X \text{ su } CD}}{=} (D, C; P, W) \underset{\substack{\text{da } Y \\ \text{su } AB}}{=} (B, A; P, V)$

Abbiamo ottenuto $(A, B; P, V) = (B, A; P, V) \Rightarrow$

$\rightarrow \underbrace{\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BV}{VA}}_{x} = \underbrace{\frac{BP}{PA} \cdot \frac{AV}{VB}}_{\frac{1}{x}} \Rightarrow \left(\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BV}{VA}\right)^2 = 1$

$\Rightarrow \frac{AP}{PB} \cdot \frac{BV}{VA} = -1$

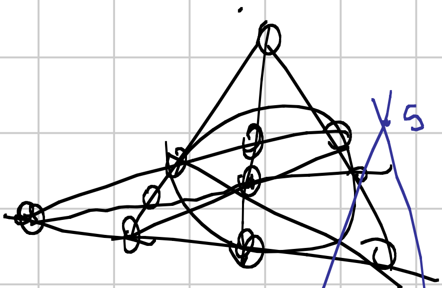
Giusto per riscrivere...



$XY = \text{pol}\, P$

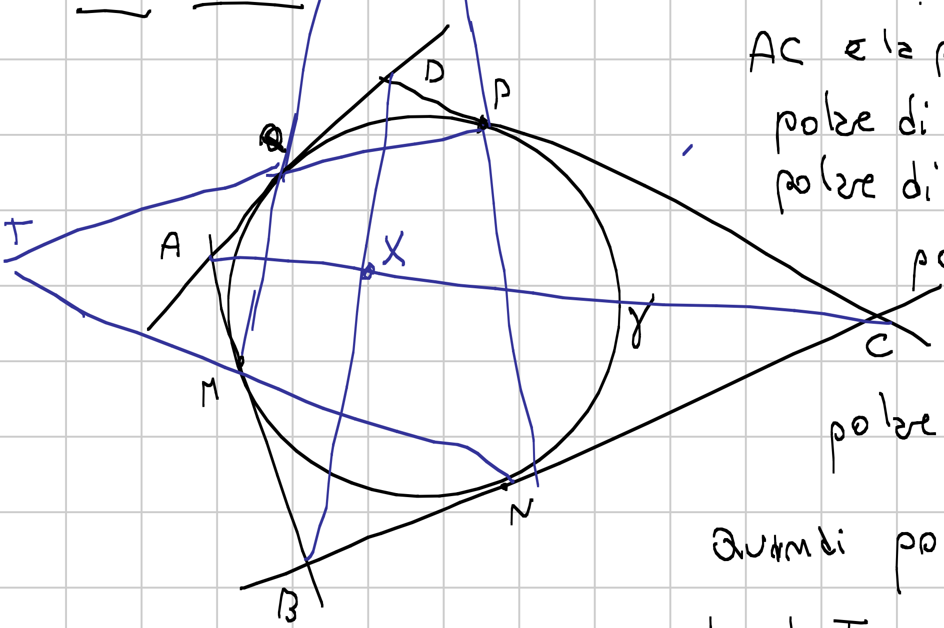
Quindi $(A, B; P, V) = (C, D; P, W) = -1$

$(A, C; Y, S) = (B, D; Y, T) = -1$



$(S,T;P,X) = (V,W,Y,X) = -1$

Ex.\Lemma (Newton)



MP, NQ, AC, BD concorrono

AC è la polare di

polare di $A \to MQ$

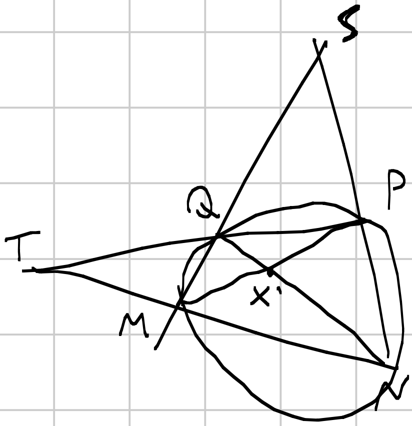
polare di $C \to NP$

polo di $AC \to MQ \cap NP = S$

polo di $BD \to QP \cap MN = T$

polare $(AC \cap BD) \to ST$
$\quad \overset{\shortparallel}{X}$

Quindi polo $ST = X$



polare di $T \to SX'$

polare di $S \to TX'$ $\longrightarrow$ polo $ST = X'$

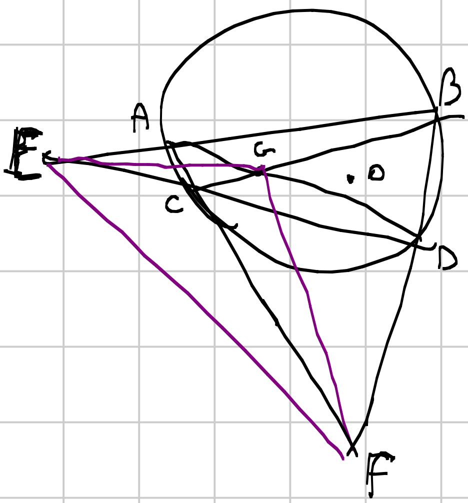
lemma delle polare

Dunque $\underset{AC \cap BD}{X} \equiv \underset{MP \cap NQ}{X'} \to MP, NQ, AC, BD$ concorrono!

$\boxtimes$

Lemma

O è l'ortocentro di EFG

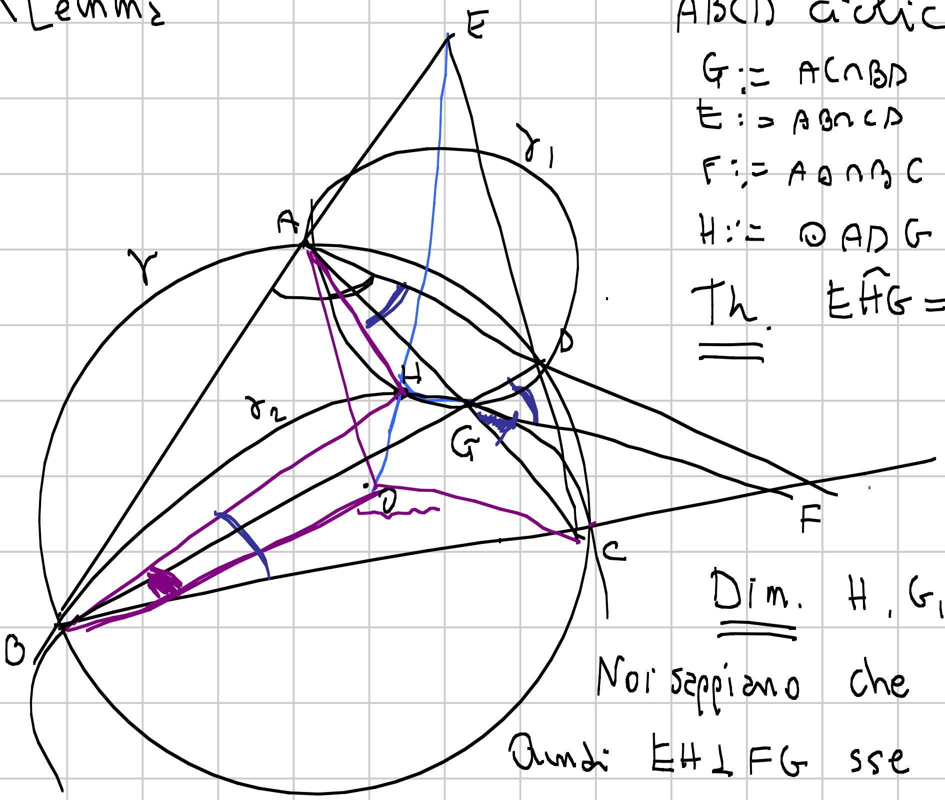


Dim. $FG \perp OE$
perchè per il lemma della polare FG è la polare di E
Analogamente
$EG \perp OF$

$\Downarrow$ O è l'ortocentro

$EFG \equiv$ self polar triangle

Ex. \ Lemma



ABCD ciclico

$G := AC \cap BD$

$E := AB \cap CD$

$F := AD \cap BC$

$H := \odot ADG \cap \odot BGC$

Th. $E\hat{H}G = 90°$

Dim. H, G, F allineati (assi radicali)

Noi sappiamo che $EO \perp FG$ [Lemma polare]

Quindi $EH \perp FG$ sse E, H, O allineati

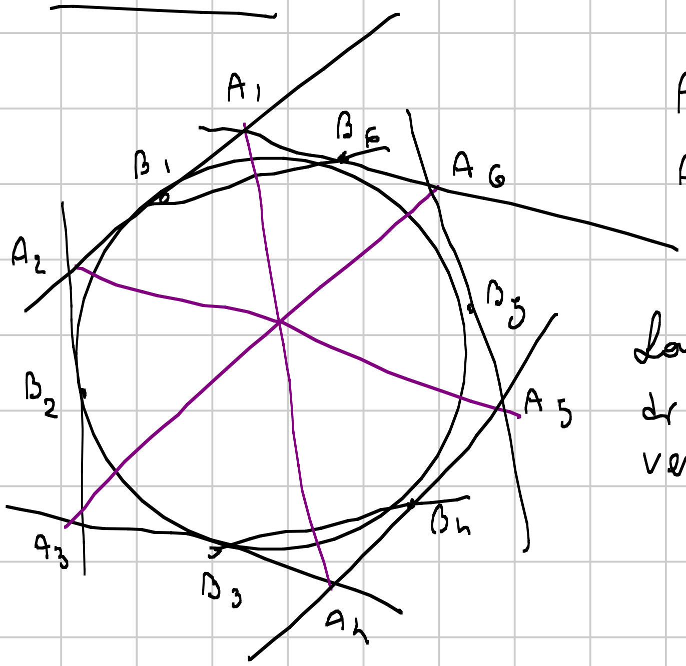
Claim. ABHO, HOCD ciclici. Poi la tesi segue per assi radicali (*)

$H\hat{B}O = H\hat{B}C - O\hat{B}C = F\hat{G}C - (90 - \widehat{BC})$

$H\hat{A}O = H\hat{A}D - O\hat{A}D = \widehat{BC} + \widehat{CD} - D\hat{H}F - (90 - \widehat{AB})$

$H\hat{B}O = H\hat{A}O$ sse $F\hat{G}C + D\hat{H}F = \widehat{CD} + \widehat{AB}$ Th. angolo esterno in BGC

Th (Brianchon)



Th A_1A_4, A_3A_6, A_2A_5 concorrono

$A_1A_4 = pol(B_1B_6 \cap B_3B_4)$

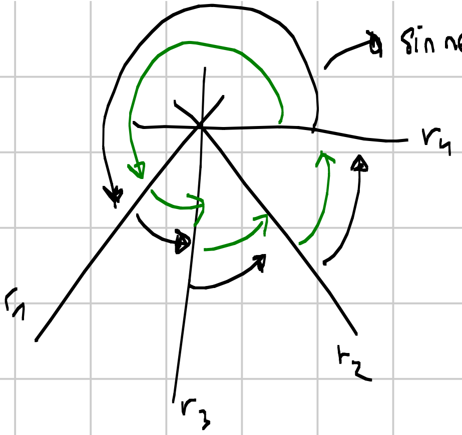
$A_3A_6 = pol(B_5B_6 \cap B_2B_3)$

$A_2A_5 = pol(B_1B_2 \cap B_4B_5)$

la tesi (per dualità) equivale a dire che i 3 poli sono allineati

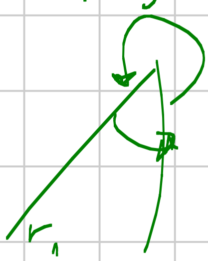
vero per Pascal

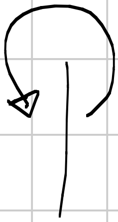
123456



$$\frac{r_1 \hat{o} r_3}{r_3 \hat{o} r_2} \cdot \frac{r_2 \hat{o} r_4}{r_4 \hat{o} r_1}$$

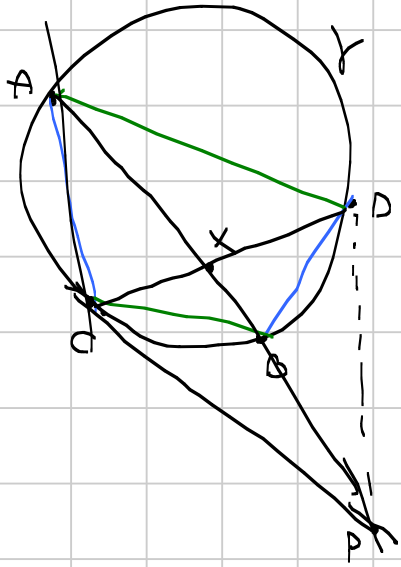
$$r_1 \hat{o} r_3 + r_3 \hat{o} r_1 = 360°$$





Quad. armonici

Def. $ABCD$ armonico sse $(A, B; C, D)_\gamma = -1$



Oss. Def. sse $AC \cdot BD = CB \cdot AD$

Oss. Tan C, Tan D, AB concorrono
[Analogamente Tan A, Tan B, CD concorrono]

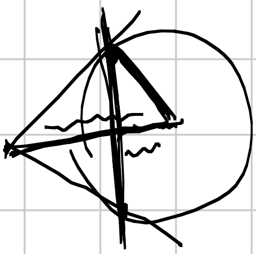
Dim. Sia $P := CC \cap AB$
Sia $X := CD \cap AB$

$$(A, B; C, D)_\gamma \overset{def}{=} (CA, CB; CC, CD)_r \overset{\text{proiettando su } AB}{=} (A, B; P, X)$$
$$\underset{-1}{\overset{\text{ll def.}}{}}$$

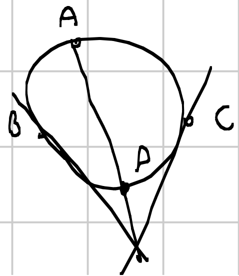
Dunque $(A, B; P, X) = -1 \to X \in$ pol P

Però $C \in$ pol P perché PC tange γ
Allora CX è la polare di P, poiché $CX \cap \gamma = D$, allora PD tange γ. [Lemma simm.]

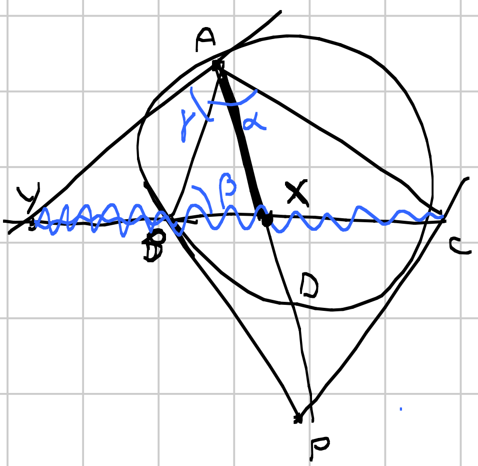
Oss. AX è simmediana di $A\hat{C}D$ relativa a CD.



Oss. Come completare il quadrilatero armonico?



Lemma Simmediana



Th. AD simmediana

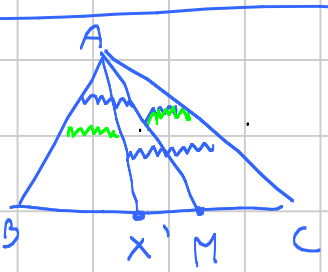
Dim. So che ABDC è armonico

$$(A, D; B, C)_\gamma = -1$$
$$\Downarrow$$
$$(AA, AD; AB, AC)_r = -1$$
$\Downarrow$ proiettando su BC
$$(Y, X; B, C) = -1$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{YB}{BX} \cdot \frac{XC}{CY} = -1$$

In modulo $\frac{BY}{YC} = \frac{BX}{XC}$

$$\frac{BY}{\sin\gamma} = \frac{AY}{\sin\beta}$$
$$\frac{YC}{\underbrace{\sin(\gamma+\alpha)}_{=\sin\beta}} = \frac{AY}{\sin\gamma}$$
$$\Longrightarrow \frac{BY}{YC} = \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)^2$$

Dunque $\frac{BX}{XC} = \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)^2$



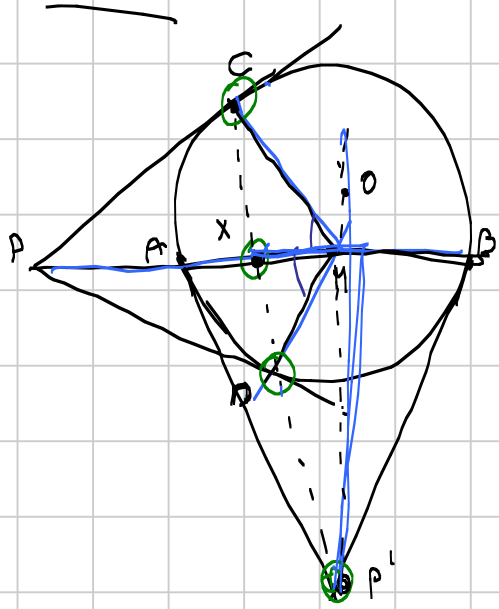
$$\left.\begin{aligned} \frac{BX'}{\sin m} &= \frac{AB}{\sin A\hat{X'}B} \\ \frac{X'C}{\sin m} &= \frac{AC}{\sin A\hat{X'}C} \end{aligned}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{BX'}{X'C} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\,\frac{\sin m}{\sin m}}$$

Però $\frac{BM}{\sin m} = \frac{AB}{\sin A\hat{M}B}$, $\frac{MC}{\sin m} = \frac{AC}{\sin A\hat{M}C}$ $\rightarrow \boxed{\frac{\sin m}{\sin m} = \frac{AB}{AC} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}}$

Dunque $\frac{BX'}{X'C} = \left(\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\right)^2$.

Lemma



- M punto medio di AB
- ABCD armonico

Th. MP biseca $C\hat{M}D$

Dim. O, M, P' (:= tg in A ∩ tg in B) allineati
È anche C, D, P' (quad. armonico)
Quanto vale $(C, D; P', X)$? $= -1$!

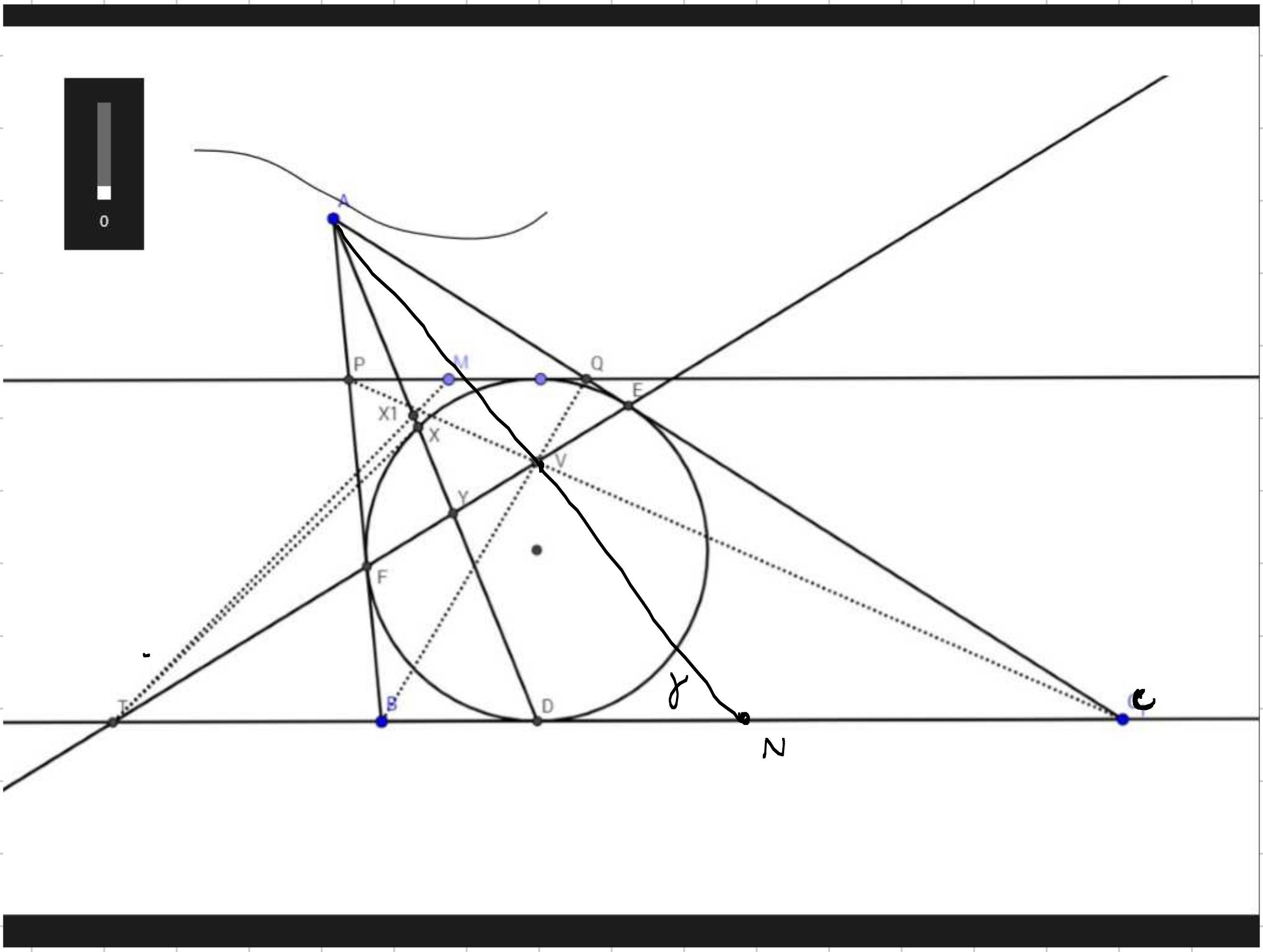
Quindi per il lemma mostrato MX biseca $C\hat{M}D$.

[redacted]

IRAN TST

- ABC triangolo, DEF triangolo di contatto (int. dell'inscritta con i lati)
- PQ tangente a γ, inscritta, parallelo a BC
- M punto medio di PQ e $T := EF \cap BC$

<u>Th.</u> TM tange γ.



<u>Oss. 1</u> $AD \cap \gamma =: X$

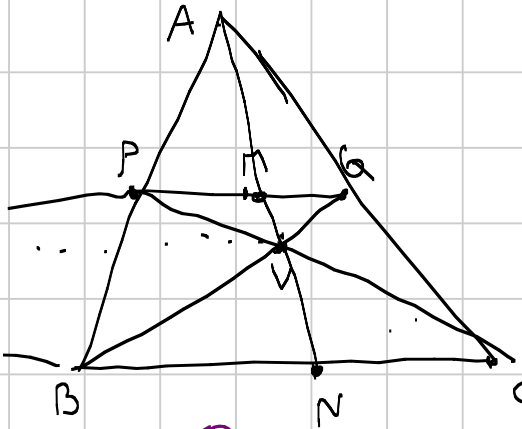
Cosa posso dire di TX?

La polare di A wrt a γ è EF $\overset{\text{dualità}}{\Longrightarrow}$ $A \in \text{pol}\, T$

Però anche $D \in \text{pol}\, T$ $\Rightarrow$ $AD = \text{pol}\, T$ e quindi si come $X = AD \cap \gamma$, TX tange γ. E di più $(X, D; A, Y) = -1$

<u>Oss. 2</u> il trucco è questo: definisco $X_1 := TM \cap AD$ e voglio mostrare $(X_1, D; A, Y) = -1$

<u>Oss. 3</u> $V := PC \cap QB$ $\Rightarrow V \in EF$ (Newton)



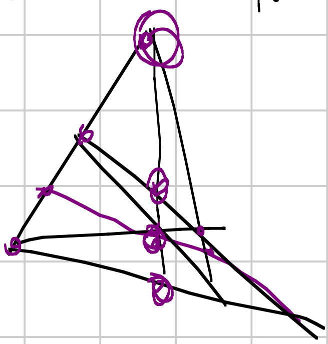
Oss. 4 AV è la polare di ∞_{BC} w.r.t. (AB, AC)

Dunque $AV \cap PQ$, $AV \cap BC$ sono i punti medi di PQ e BC rispettivamente

$(M, N; A, V) = -1$

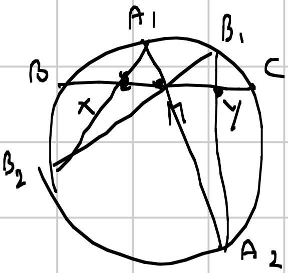
Fine: Proiettando da T su AD ottengo $(X_1; D; A, Y) = -1$

Dunque $X_1 \equiv X$ e ho concluso.



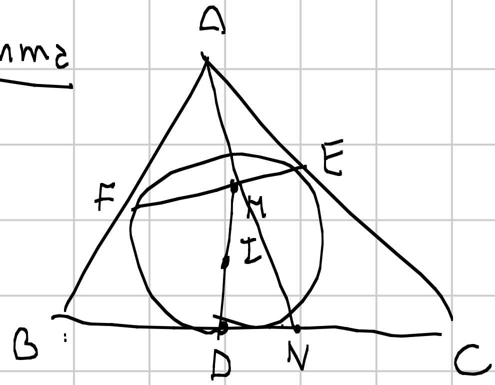
Gare: IMO 2014-4 / IMO SL 2007-G8

Es. Th della farfalla



Th. $MX = MY$

Lemma



ABC triangolo, DEF contatto

$M := ID \cap EF$, N p.to medio di BC

Th A, M, N allineati