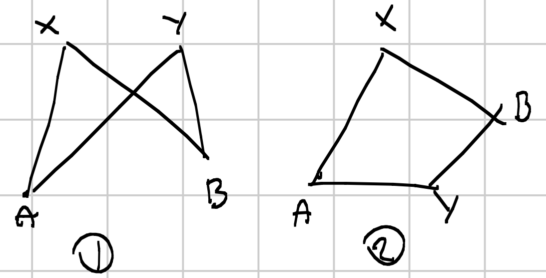
G3 Medium – Sintetica (Miquel, Mistilinee, Inv.)

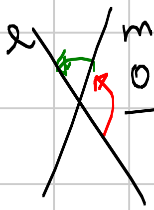
Note Title 9/6/2017

Angoli orientati [Evan Chen]



ABXY è ciclico sse
① $A\hat{X}B = A\hat{Y}B$
② $A\hat{X}B + A\hat{Y}B = \pi$

Def. m, l rette
$\measuredangle(m,l)$ = angolo (antiorario) di cui ruotare m per sovrapporsi con l



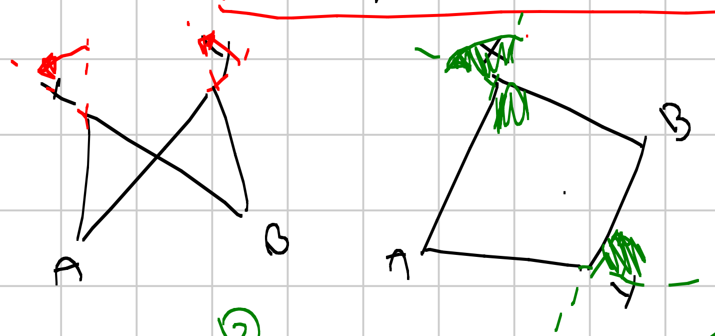
Oss. $\measuredangle(l,m)$, $\measuredangle(m,l) + \measuredangle(l,m) = \pi$

Consideriamo tutto mod π, $\measuredangle(m,l) = -\measuredangle(l,m)$

Def. $\measuredangle AOB \overset{def}{=} \measuredangle(AO, OB)$

Ex. (Verifica) Vale il seguente ①

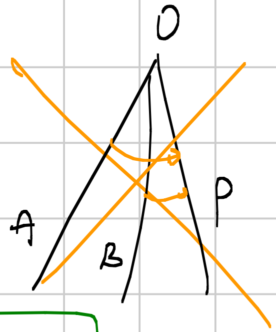
THM $\boxed{A, B, X, Y \text{ ciclico sse } \measuredangle AXB = \measuredangle AYB}$

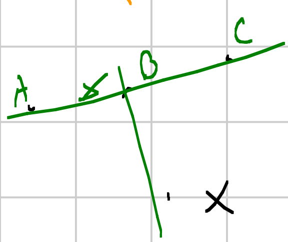


②

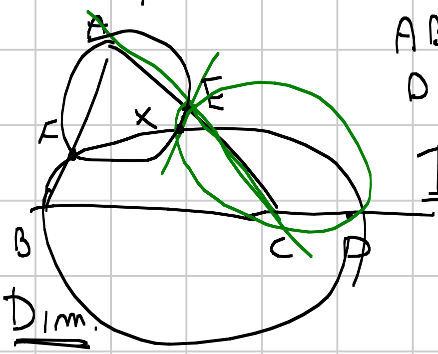
Proprietà
- $\boxed{\measuredangle AOP + \measuredangle POB = \measuredangle AOB}$
- $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 0$

③ → $\boxed{A, B, C \text{ allineati sse } \measuredangle XBC = \measuredangle XBA}$
[dato X un punto]





Th di Miquel su un triangolo



ABC triangolo

D, E, F su (le rette di) BC, CA, AB

Th $\odot AEF$, $\odot BDF$, $\odot CDE$ concorrono

Dim.

$X := \odot AEF \cap \odot BFD$. Th $\iff X, E, C, D$ ciclico

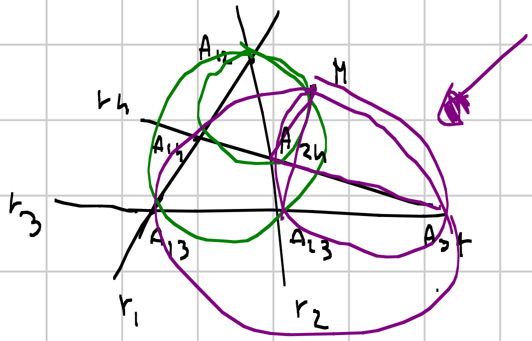
X, E, C, D ciclico sse $\measuredangle XEC = \measuredangle XDC$.

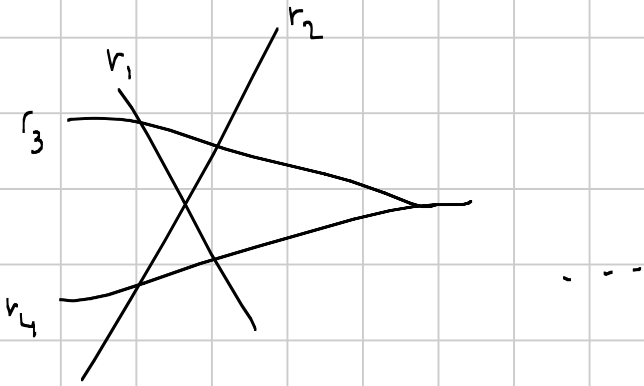
Però $\measuredangle XEC \underset{③}{=} \measuredangle XEA \underset{①}{=} \measuredangle XFA \underset{③}{=} \measuredangle XFB \underset{①}{=} \measuredangle XDB \underset{③}{=} \measuredangle XDC$

Th di Miquel (quadrangolo)

Siano r_1, r_2, r_3, r_4 4 rette "in posizione generica"

$A_{12} := r_1 \cap r_2$ e così via





Th. $\odot A_{12}A_{23}A_{31}$, $\odot A_{12}A_{24}A_{41}$, $\odot A_{23}A_{34}A_{24}$, $\odot A_{13}A_{34}A_{41}$ concorrono in M p.to di Miquel del quadrangolo

Dim. Sia $M := \odot A_{12}A_{24}A_{41} \cap \odot A_{12}A_{23}A_{13}$

① $M \in \odot A_{23}A_{34}A_{24}$

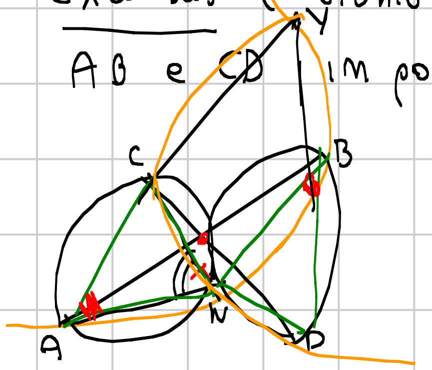
$\measuredangle MA_{24}A_{34} \underset{③}{=} \measuredangle MA_{24}A_{14} \underset{①}{=} \measuredangle MA_{12}A_{14} \underset{③}{=} \measuredangle MA_{12}A_{13} \underset{①}{=} \cancel{\measuredangle MA_{23}A_{13} \underset{③}{=} \measuredangle MA_{23}A_{34}}$

e quindi si conclude per la ①.

② Analogamente $M \in \odot A_{13}A_{34}A_{41}$

Excursus (Rotomotetie)

AB e CD in posizione generica



Q1 Quante rotomotetie esistono che mandano ordinatamente $A \to C$, $B \to D$?

R1 1! Perché? Se esistesse siano z_0, ~~α~~ ρ ragione centro e ragione della rotomotetia

dell'omotetia e θ l'angolo

$$p \longrightarrow z_0 + \underbrace{\rho e^{i\theta}}_{\alpha}(p - z_0) =: p'$$

$$c = z_0 + \alpha(a - z_0) \longrightarrow z_0 = \dots$$
$$d = z_0 + \alpha(b - z_0) \qquad \alpha = \dots$$

Costruiamola Sia $X := AB \cap CD$ [se sono paralleli... aggiusti]. Sia $W := \odot ACX \cap \odot BDX$

Con angoli orientati... $\measuredangle WAB = \measuredangle WAX = \measuredangle WCX = \measuredangle WCD$ (1)

$\measuredangle WB\cancel{A} = \measuredangle WBX = \measuredangle WDX = \measuredangle WDC$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow$ $W\hat{A}B \approx W\hat{C}D$

[$\measuredangle WAB = \measuredangle WCD$, $\measuredangle WBA = \measuredangle WDC$ $\Rightarrow$ $W\hat{A}B \approx W\hat{B}C$ $\not\Leftarrow$?] (4)

Oss. W è ANCHE il centro della rotomotetia che manda AC in BD

$\measuredangle AWC = \measuredangle AXC = \measuredangle BXD = \measuredangle BWD$.
$\measuredangle WAC = \measuredangle WXC = \measuredangle WXD = \measuredangle WBD$

$\Downarrow$ (4)

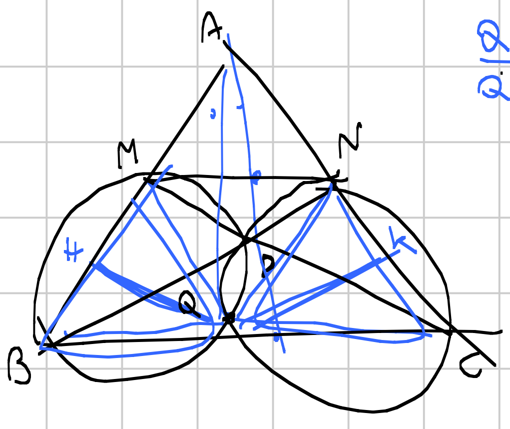
$W\hat{A}C \simeq W\hat{B}D$

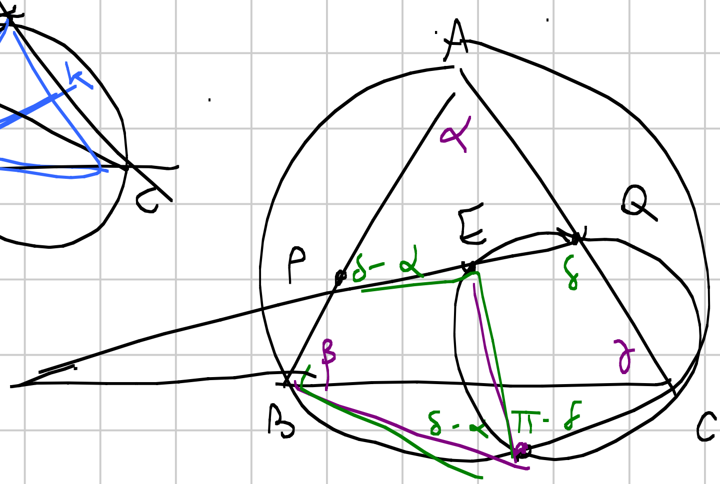
Ma allora dove altro sta ~~W~~??

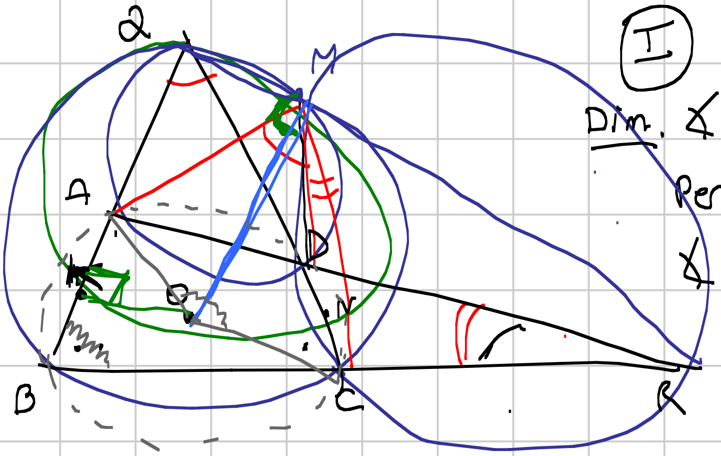
Quindi se $Y := AC \cap BD$ AYWB e CYWD ciclici

Appl. (G3)

$$\frac{QH}{QK} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$$







(I) $M \in QR$ sse $ABCD$ ciclico

Dim. $\measuredangle DMQ = \measuredangle DAQ = \measuredangle DAB$ (*)

Però

$\measuredangle DMR = \measuredangle DCR = \measuredangle DCB$ (**)

$\measuredangle DMQ = \measuredangle DMR \overset{(*),(**)}{\Longleftrightarrow} \measuredangle DAB = \measuredangle DCB$

(3) $\Updownarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \Updownarrow$

Q, M, R allineati $\qquad$ $ABCD$ ciclico

(II) $ABCD$ ciclico $\Rightarrow OM \perp QR$

Dim. M è il centro della rotomotetia che porta AB in DC ma perte porta anche AK in DN, K medio di AB e N medio di DC. Dunque per quanto detto su sulle rotomotetie $M \in \odot QKN$. Inoltre $O \in \odot QKN$ ($\angle QKO + \angle QNO = \pi/2 + \pi/2 = \pi$). Dunque $QKONM$ ciclico e quindi $\angle QMO = \angle QKO = \pi/2$

(III) $MAOC$ e $BODM$ ciclici $\qquad$ ($ABCD$ è ciclico)

Dim. $\angle AMC = \angle AMD + \angle DMC = \angle AQD + \angle DRC = 180 - \hat{B} - \hat{Q} +$
$180 - \hat{A} - \hat{B}$

$= 180 - 2\hat{B} = 180 - \angle AOC \Rightarrow \angle AMC + \angle AOC = 180$ ∎

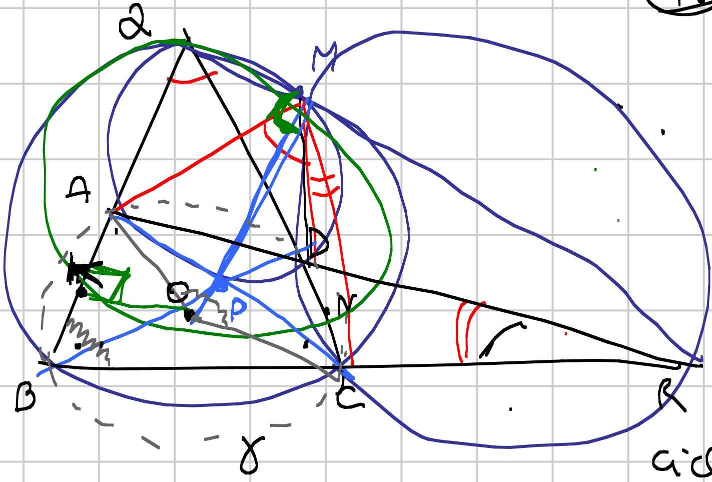
(IV) MO biseca $A\hat{M}C$ ⟵

MO biseca $B\hat{M}D$ ⟵

Dim. (III) $A\hat{M}O = A\hat{C}O$
$O\hat{M}C = O\hat{A}C$

Però OAC è isoscele e quindi $A\hat{M}O = O\hat{M}C$.

Analogamente usando $BODM$ ciclico ho ≈



(V) Consideriamo la terna di quad. ciclici $ABCD$, $AOCM$, $BODM$.
I tre assi radicali sono AC, BD, OM.
Quindi $P := AC \cap BD$, O, P, M allineati.

(VI) Se inverto nella cfr circoscritta ad ABCD,

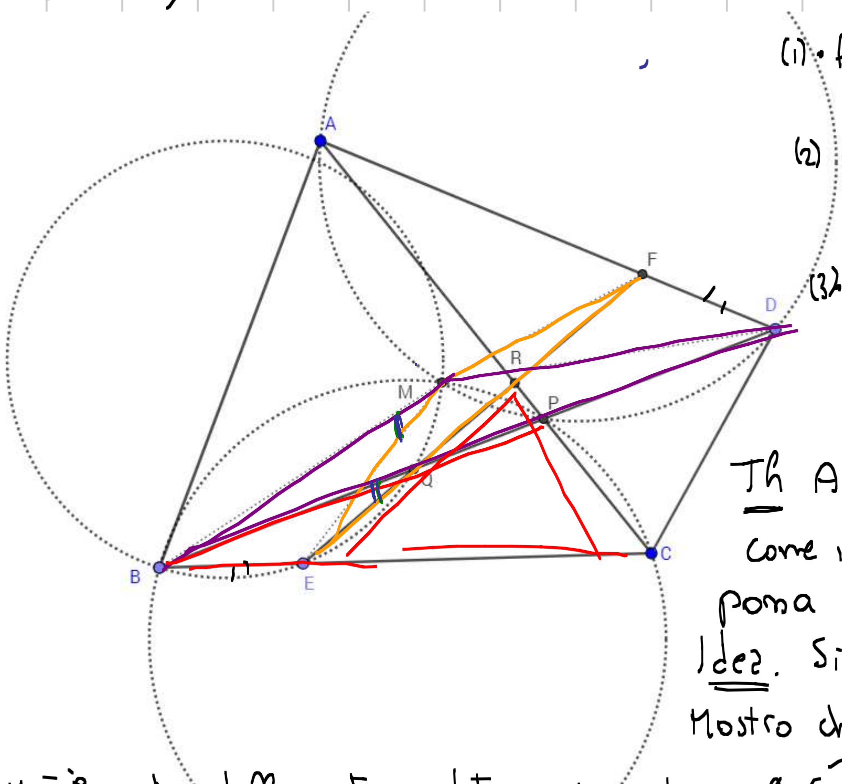
$BD \to \odot BOD$
$AC \to \odot AOC$

$P = BD \cap AC \to \odot BOD \cap \odot AOC = M$ per il punto III.

Dunque P ed M sono uno l'inverso dell'altro rispetto all'inversione nella cfr circoscritta ad ABCD.

(VII) Aggiungere l'esercizio "$E\hat{H}F = 90°$" di ieri. H era l'inverso di Q wrt a Γ

IMO 5 (2005)



(1) • ABCD convesso con $BC = AD$

(2) • $E \in BC$, $F \in AD$ t.c. $BE = DF$

(3) $Q = BD \cap EF$
$P = AC \cap BD$
$R = EF \cap AC$

Th Al variare di E, F come in (2), $\odot PQR$ passa per uno stesso punto

Idea. Sia $M := \odot BPC \cap \odot APD$. Mostro che $M \in \odot PQR$.

Oss. 1 M è il centro della rotomotetia che porta AC in DB, ma è anche quella che porta AD in CB $\to$ $\angle MAD = \angle MCB$ (*)
$\angle MDA = \angle MBC$ (**)

Oss. 2 $\odot APD$, $\odot BPC$ sono congruenti (*) $\Rightarrow MD = MB$ (***)
(**) $\to MA = MC$

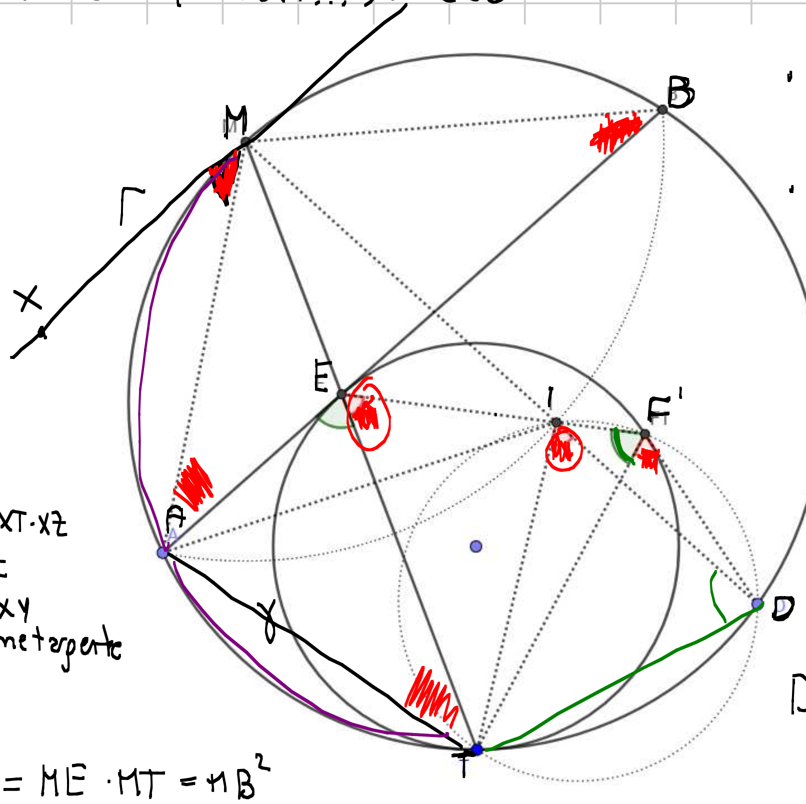
Oss. 3 (***) + (**) $\Rightarrow M\hat{B}E \cong M\hat{D}F$, e fra l'altro $ME = MF$, $\angle BME = \angle FMD$
+ hp ($BE = DF$)

Quindi MBD e MEF sono triangoli isosceli rotomotetici (Γ).

Ma allora BEQM ciclico.

Fine $M = \odot BEQ \cap \odot BCP \Rightarrow M$ è il punto di Miquel del quadrilatero BECQPR e quindi $M \in \odot PQR$

Un'avventura misti... linea



• Γ e γ tangenti internamente in T

• AB, corda di Γ, tange γ in E

(I) $M := TE \cap \Gamma$.

M è il p.to medio dell'arco $\widehat{AB}$.

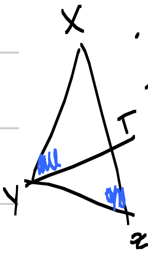
<u>Dim.</u> Omotetia di centro T che porta γ in Γ.

$E \to M$

$AB \to$ Tangente in M a Γ ed è $\parallel AB$.

Dunque $X\hat{M}A = M\hat{A}B$ (//)

$X\hat{M}A = M\hat{B}A$ (su Γ insiste $\widehat{MA}$)



· $XY^2 = XT \cdot XZ$

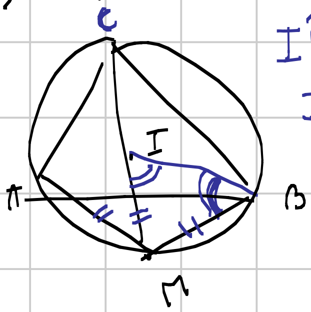
· OYTZ ha XY come tangente

(II) $MA^2 = ME \cdot MT = MB^2$

• <u>Sia $D \in \widehat{ATB}$</u>. Sia I l'incentro di $A\hat{D}B$. Sia $F' := EI \cap \gamma$.

Voglio mostrare che $\boxed{ITDF' \text{ ciclico}}$.

(III) $MA = MI = MB$. (II)+(III) $\Rightarrow MI^2 = ME \cdot MT$ ← (III bis)



$I\hat{B}M = I\hat{B}A + A\hat{B}M = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$

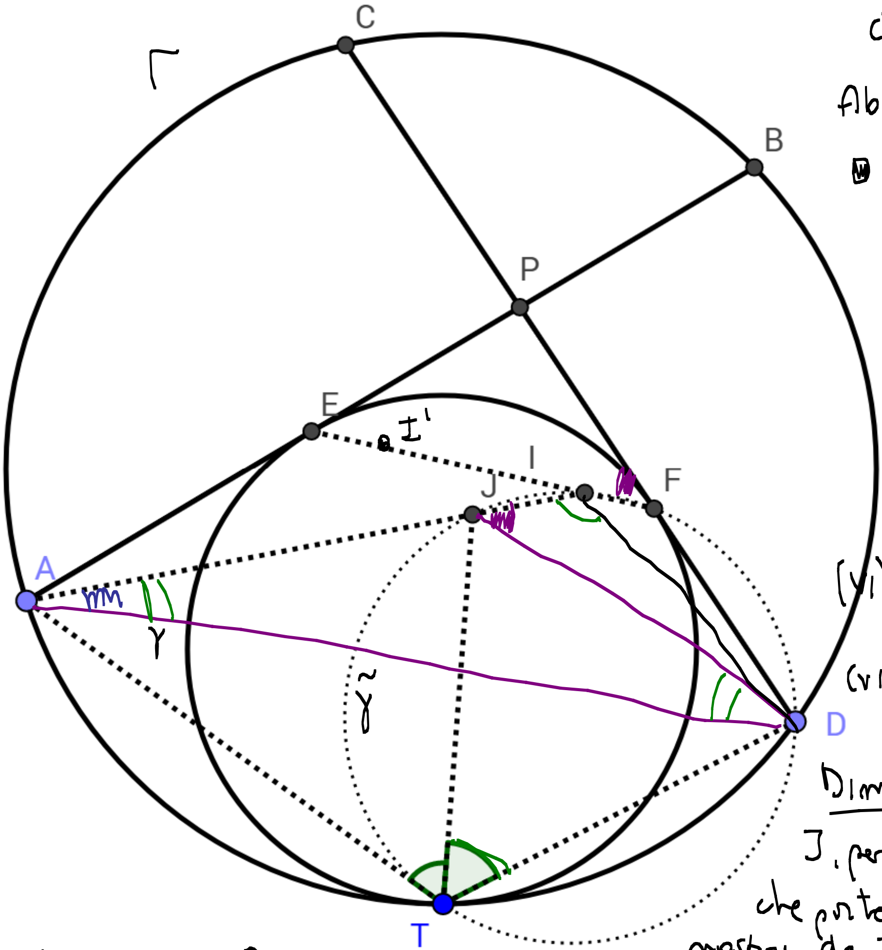
$I\hat{M}B = \alpha$

Quindi $I\hat{M}B = \pi - \alpha - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2} = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}$

(IV) $T\hat{F'}E = T\hat{E}A = M\hat{A}E + E\hat{M}A = M\hat{B}E + E\hat{M}A = M\hat{D}T$

E questo conclude la ciclicità.

(V) • Mostro DF' tange γ. Mi basterebbe mostrare $D\hat{F'}T = F'\hat{E}T$. Però per (II) ITDF' ciclico $\Rightarrow D\hat{F'}T = D\hat{I}T$. Dunque mi rimarrebbe da mostrare $D\hat{I}T = E\hat{I}T$. Questo è vero per (III bis)



• Γ e γ tg. internamente in T

• AB, CD corde di Γ che tangono γ in E, F

Abbiamo mostrato

■ I incentro di ABD sta su EF
(I' incentro di ACD sta su EF)

■ EFTD ciclico [$\tilde{\gamma}$]
(I'ETA ciclico)

Vogliamo mostrare

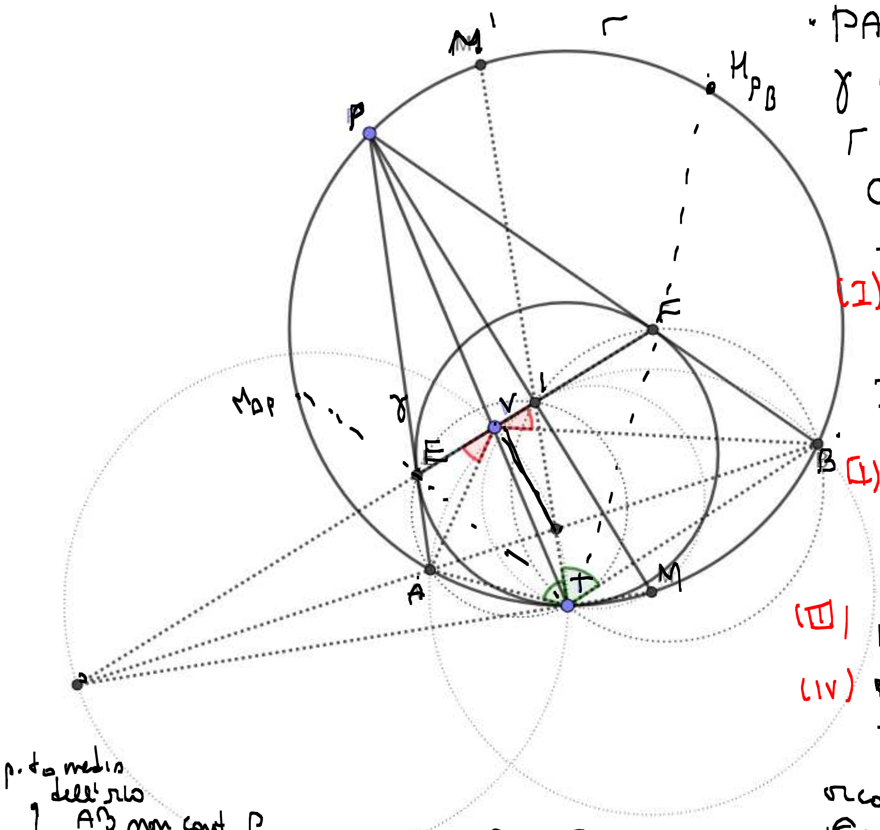
(vi) ■ J incentro di PAD sta su $\tilde{\gamma}$

(vii) ■ TJ biseca $A\hat{T}D$

Dim. (vi) Prendo $J := AI \cap \tilde{\gamma}$.
J, per def, sta sulla bisettrice che parte da $\hat{A}$ in $P\hat{A}D$. Voglio mostrare che J sta anche sulla bisettrice che parte da D in $P\hat{A}D$. Però $\angle IJD = \angle IFP = 90 - \frac{A\hat{P}D}{2}$

Dunque $\angle JDA = \angle IJD - \angle JAD = 90 - \frac{A\hat{P}D}{2} - \frac{P\hat{A}D}{2} = \frac{P\hat{D}A}{2}$ ⇒ DJ è bisettrice di $P\hat{D}A$ ⇒ J è incentro di $A\hat{P}D$.

(vii) $J\hat{T}D = \pi - J\hat{I}D = I\hat{A}D + I\hat{D}A = \frac{B\hat{A}D}{2} + \frac{B\hat{D}A}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{A\hat{B}D}{2} = \frac{\pi - A\hat{B}D}{2} = \frac{A\hat{T}D}{2}$ ■



• PAB triangolo, Γ cfr circoscritta
γ cfr. che tange PA in E, PB in F
Γ in T

Cosa abbiamo mostrato fino ad ora

(I) I incentro di APB, sta su EF

Dim. 2 Pascal su $PM_{AP}ATMM_{PB}$

(II) EI = IF

PI è bisettrice/altezza/mediana nel triangolo isoscele PEF.

(III) IFBT, IEAT ciclici

(IV) TI biseca $A\hat{T}B$. Dunque T, I, M' → p.to medio dell'arco APB, allineati, cioè $I\hat{T}M = \pi/2$

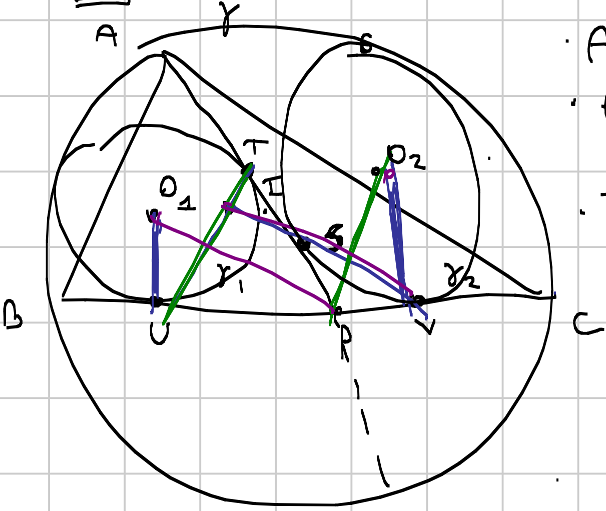
(V) TM, AB, EF concorrono [Ex.]

Hint: ⊙TMI, ⊙AIB, Γ [Le prime due tangono EF]

(VI) V := PT ∩ EF. Allora $E\hat{V}A = F\hat{V}B$ [Ex.]

Hint: Lavorateci...

[Th. Sawayama-Thébault] [Ex.]

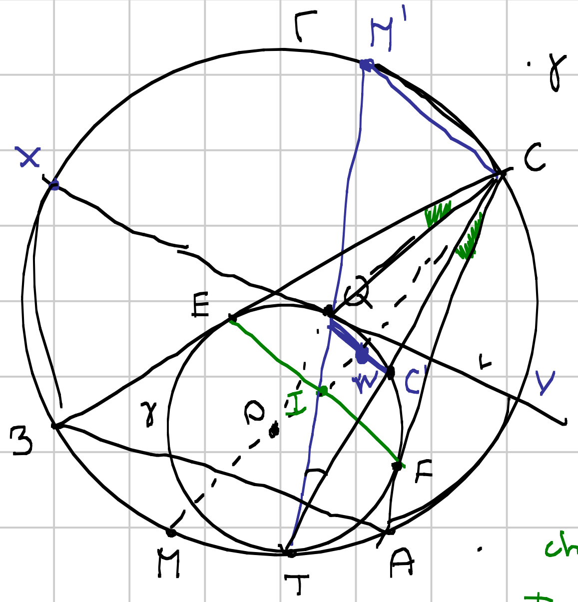


• ABC triangolo, γ circoscritta
• AP ceviana, γ_1 mixt. (AP, PB, γ) di centro O_1, γ_2 mixt. (AP, PC, γ) di centro O_2
• I incentro di ABC

Th: O_1, I, O_2 allineati

Hint. I ∈ SV deriva dalla II figura
I ∈ UT
+ Th. di Pappo ⇒ Thesi.

EGMO 2013 - 5



- ABC triangolo, Γ circoscritta
- γ mixtilinea (BC, AC, Γ) con p.ti di tangenza E, F, T
- $r \parallel AB$ tangente a γ in Q

<u>Th</u> $B\hat{C}Q = T\hat{C}A$.

<u>Dim.</u> $TQ \cap \Gamma =: M'$ p.to medio di XY, ma anche di AB perché $AB \parallel XY$

Prima dobbiamo mostrare che T, I, M' allineati, quindi T, I, Q, M' allineati.

Traccio CI ... $CI \cap \Gamma =: M$. Allora MM' diametro

Su CI c'è anche O centro di γ

Noi vorremmo CI bisettrice di $Q\hat{C}T$ ... e avremmo la tesi

Sia $C' := TC \cap \gamma$. $QC' \parallel M'C \perp MC \Rightarrow QC' \perp CI$

omot. $\quad$ MM' diam.

Siccome CI passa per O ed è $\perp C'Q$, $C'Q \cap CI$ è p.to medio di QC' $\quad$ W

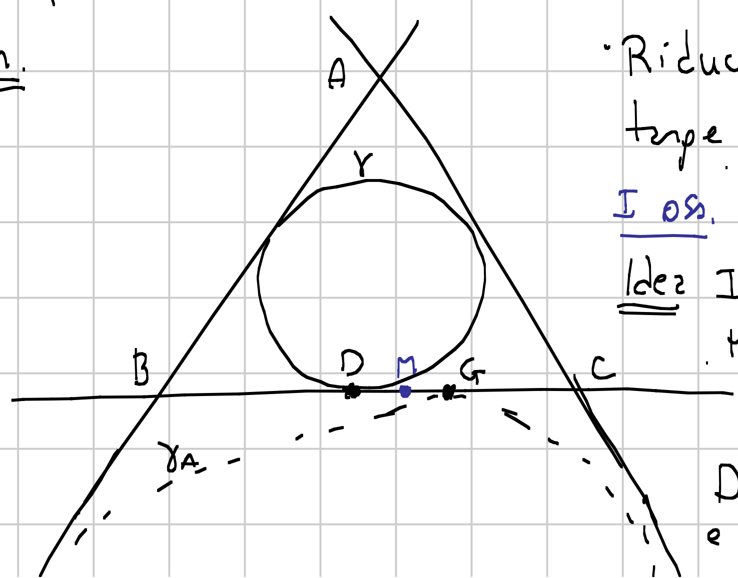
Quindi in CQC', CW è mediana e altezza $\rightarrow$ il triangolo è isoscele, CW è anche bisettrice $\Rightarrow$

$\Rightarrow Q\hat{C}I = I\hat{C}T \Rightarrow B\hat{C}Q = T\hat{C}A$.

Inversione

<u>Thm</u> (Feuerbach) $[\beta > \gamma]$ La cfr di Feuerbach di ABC tange l'inscritta e le exinscritte

<u>Dim.</u>



- Riduciamo la tesi a Feuerbach tange γ e γ_A.

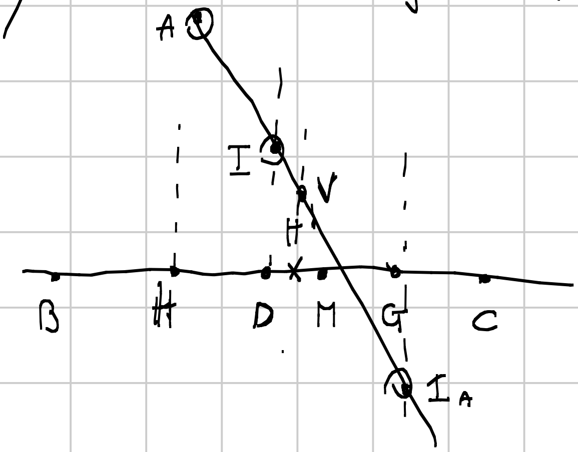
<u>I oss.</u> $MD = MG$

<u>Idea</u> Invertire nel punto medio con raggio $MD = MG$. Allora D e G restano fissi

Ma anche γ e γ_A restano fisse!

Dove va a finire Feuerbach e mostrare che va a finire in una retta che tange γ e γ_A .

Q1 Dove va a finire H?



H va a finire in un punto H' t.c. $MH \cdot MH' = MD^2$

$\Rightarrow$

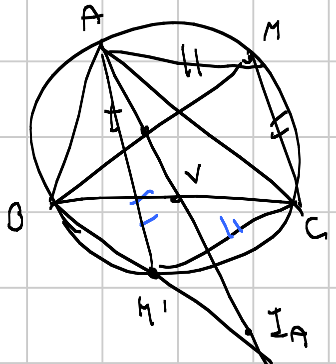
$(H, H', D, G) = -1 \Rightarrow$

$(A, V, I, I_A) = -1$

Oss.

$(A, V, I, I_A) = -1$ sse $((A, C, M, M'))_\gamma = -1$

sse $\left| \frac{AM}{MC} \cdot \frac{CM'}{M'A} \right| = 1$

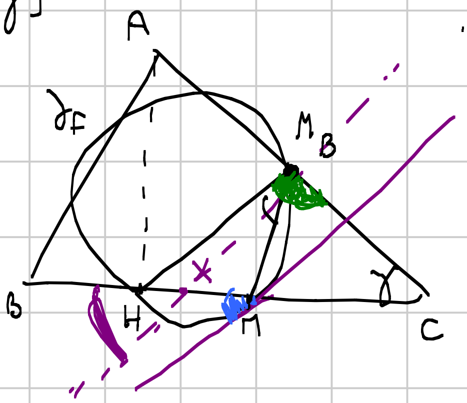


Dunque $V \equiv$ piede della bisettrice

$H \to X$ piede della bisettrice..

Q2 Che angolo forma Feuerbach con BC?

[$\beta > \gamma$]



Invertendo in M, γ_F va a finire in una retta // alla retta r.

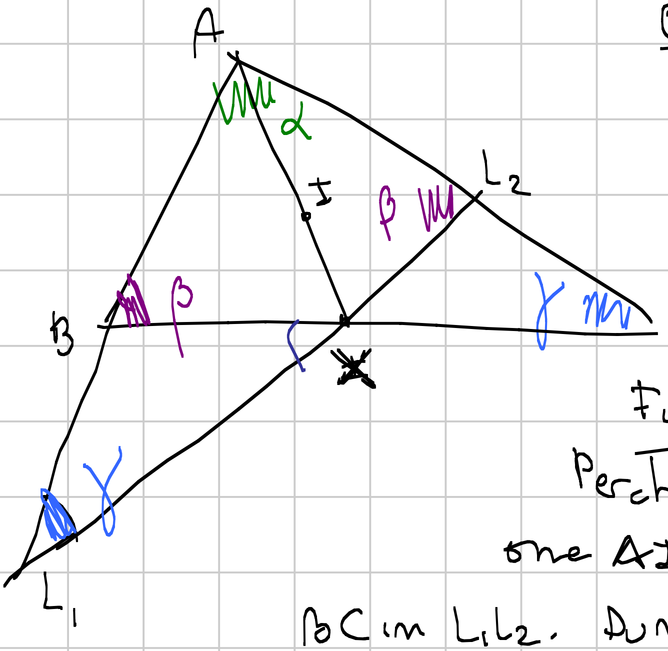
Q3 Come determino ?

$H\hat{M}_B C = 180 - 2\gamma$

$M\hat{M}_B C = \alpha$

$H\hat{M}_B M = \underline{180 - \gamma - \alpha} - \gamma = \beta - \gamma$

Dunque $\gamma_F \to$ nella retta per X t.c. l'angolo è $\beta - \gamma$



Q4 $A\widehat{L_1}L_2 \overset{?}{=} A\widehat{B}C - B\widehat{X}L_1 = \beta - (\beta - \gamma) = \gamma$

Dunque chi è L_1L_2?

È la simmetrica di BC rispetto ad AX.

Fine.

Perché una simmetria assiale di asse AI fissa γ e γ_A e manda BC in L_1L_2. Dunque la tangenza rimane conservata per simmetria assiale e quindi L_1L_2 tange γ e γ_A.

Ex. [IMO 2015-3]