SENIOR 2018 – ALGEBRA – Advanced (Max)

Note Title 04/09/2018

Disequazioni funzionali

Idee che è utile provare (portarsi da casa)

1. Cercare di ottenere $f(x) \geq$ q.c.
   $f(x) \leq$ q.c. (possibilmente la stessa)

   (oss. le disug. classiche, con il verso invertito, producono uguaglianze)

2. Occhio ai segni quando si moltiplica / divide

3. Reiterare delle stime

4. Provare a dimostrare una tesi più forte.

5. Dare dei valori che permettano di semplificare 2 termini!

6. Vedere l'eq. funzionale come una diseq. nella "variabile" $f(x)$
   ⇝ comodo quando è di grado basso e non ci sono composizioni

7. Passare alcuni parametri al limite

8. Quando siamo su $\mathbb{N}$, ci sono i minimi!!

9. Guardare la CRESCITA

10. Pensare alla MONOTONIA

11. Situazione con
    $\geq$ su progr. geom.
    $\leq$ su progr. aritm.
    + monotonia

① $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(x+y) + f(y+z) + f(z+x) \geq 3f(x+2y+3z)$

② $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad f(xy) \leq x f(y)$

③ $f: [0,1] \to [0,+\infty)$ (i) $f(1) = 1$

(ii) $f(x) + f(y) \leq f(x+y)$ quando poss.

Dimostrare che $f(x) \leq 2x$.

$\boxed{1}$ $P(0,0,0) \Rightarrow 3f(0) \geq 3f(0)$ ☺

$P(x,0,0) \Rightarrow 2f(x) + f(0) \geq 3f(x) \rightsquigarrow f(x) \leq f(0)$

$P(x,x,-x) \Rightarrow f(2x) + 2f(0) \geq 3f(0) \rightsquigarrow f(2x) \geq f(0)$

$\rightsquigarrow f(x) \geq f(0)$ ☺

Quindi solo le costanti

$\boxed{2}$ $P(x,1) \Rightarrow f(x) \leq x f(1) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$P(\underbrace{\tfrac{1}{x}, x}_{\text{occhio}}) \Rightarrow f(1) \leq \frac{1}{x} f(x) \rightsquigarrow f(x) \geq x f(1) \quad \forall x > 0$

ho usato $x > 0$

Quindi $\exists\, a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = ax \quad \forall x > 0$

$P(\tfrac{1}{x}, -x) \Rightarrow f(-1) \leq \frac{1}{x} f(-x) \rightsquigarrow f(-x) \geq x f(-1) \quad \forall x > 0$

$P(x, -1) \Rightarrow f(-x) \leq x f(-1) \quad \forall x > 0$

Quindi $\exists\, b \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = bx \quad \forall x < 0$

Mancano : $\to f(0)$

$\to$ verifica

$P(x,0) \Rightarrow f(0) \leq x f(0)$ $\quad x = 2 \rightsquigarrow f(0) \geq 0$

$x = 0 \rightsquigarrow f(0) \leq 0$ $\quad \rightsquigarrow f(0)$

Ora occorre verificare che tutte le funzioni

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{se } x \geq 0 \\ bx & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$$

vanno bene.

$x \geq 0 \quad y \geq 0$ ok

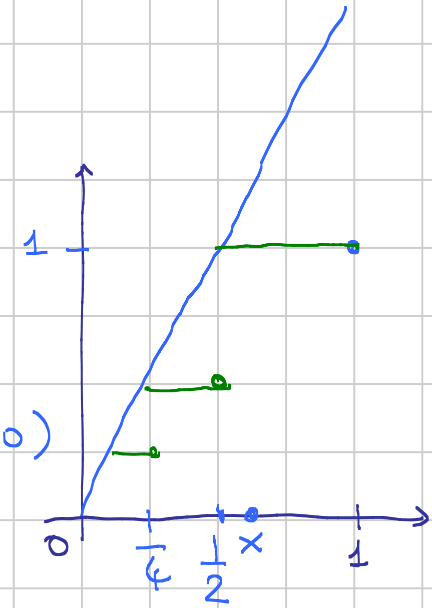
$x \leq 0 \quad y \leq 0 \qquad a x y \leq b x y \quad \rightsquigarrow \quad a \leq b \quad (xy > 0)$

$x > 0 \quad y < 0 \qquad + bxy \leq + bxy$ ok

$x < 0 \quad y > 0 \qquad b x y \leq a x y \quad \rightsquigarrow \quad b \geq a \quad (xy < 0)$

Quindi: serve $a \leq b$.

$\boxed{3}$ Procediamo per fasce



Prendo $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ e dico che $f(x) \leq 1$

(se uso uso $P(x, 1-x)$ e uso che $f(1-x) \geq 0$)

quindi ok in questa zona

Osservo che $f(\frac{1}{2}) \leq \frac{1}{2}$ (uso $P(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$)

Prendo $x \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ e dico che $f(x) \leq \frac{1}{2}$

(Come prima uso $P(x, \frac{1}{2} - x)$)

E così via per induzione usando $[\frac{1}{2^{k+1}}, \frac{1}{2^k}]$

(4) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y^2 f(x)(f(x) + 2x) \leq 1 - x^2 y^2$

(5) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(xy) + f(x-y) \geq f(x+y)$

(1) esistono sol. non costanti

(2) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

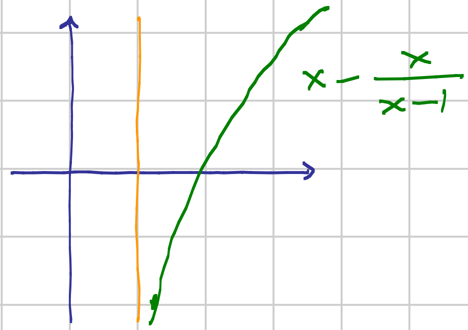
(6) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x^3 + x) \leq x \leq f(x)^3 + f(x)$.

5 Faccio in modo che $xy = x+y$ $\quad y = \frac{x}{x-1}$

$$P\left(x, \frac{x}{x-1}\right) \Rightarrow f\left(\cancel{\frac{x^2}{x-1}}\right) + f\left(x - \frac{x}{x-1}\right) \geq f\left(\cancel{\frac{x^2}{x-1}}\right)$$

$$\rightsquigarrow \quad f\left(\frac{x^2-2x}{x-1}\right) \geq 0 \qquad \forall x \neq 1$$

Spero che ogni $z \in \mathbb{R}$ si scriva come $\frac{x^2-2x}{x-1} = z$ con $x \neq 1$
Questo è un conto di eq. di 2° grado



Spero che ax^2 sia soluzione...

$$a x^2y^2 + a\cancel{x^2} + a\cancel{y^2} - 2axy \geq a\cancel{x^2} + a\cancel{y^2} + 2axy$$
$$a x^2y^2 - 4axy \geq 0$$

Ritento $ax^2+b \rightsquigarrow ax^2y^2 - 4axy + b \geq 0$

Prendo $a=1$ e $b = 1000$ e

4 Divido per y e faccio $y \to +\infty$

$$f(x)\left(f(x)+2x\right) \leq \boxed{\frac{1-x^2y^2}{y^2}} \to -x^2$$

$$f(x)^2 + 2x f(x) + x^2 \leq 0 \qquad (f(x)+x)^2 \leq 0$$

6 Sia $\varphi(x) := x + x^3$. Questa è bigettiva come $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
La sua inversa $\psi(x)$ è la soluzione.
Riscrivo il testo nella forma

$$f(\varphi(x)) \leq x \leq \varphi(f(x))$$

Applico ψ alla disug. di dx (posso perché è strett. cresc.)

$$\psi(x) \leq \psi(\varphi(f(x))) = f(x)$$

Metto $\psi(x)$ al posto di x in quella di sx

$$f(x) = f(\varphi(\psi(x))) \leq \psi(x)$$ ☺

— o — o —

⑦ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\qquad f(n+1) > f(f(n))$ (IMO 1977-6 ?)

L'unica sol. è $f(n) = n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\boxed{\text{Dim 1}}$ Sia $n_0 \geq 0$ t.c. $f(n_0) = \min\{f(n) : n \geq 0\}$

p.to di min.

Dico che $n_0 = 0$

Se fosse $n_0 > 0$, allora

$$P(n_0 - 1) \Rightarrow f(n_0) > f(\underbrace{f(n_0-1)}_{\geq 0}) \geq f(n_0) \quad \text{assurdo}$$

Quindi $n_0 = 0$ e $f(n) \geq f(0) + 1 \quad \forall n \geq 1$

Sia $n_1 \geq 1$ t.c. $f(n_1) = \min\{f(n) : n \geq 1\}$

Dico che $n_1 = 1$.

Se fosse $n_1 > 1$, allora

$$P(n_1 - 1) \Rightarrow f(n_1) > f(\underbrace{f(n_1-1)}_{\geq f(0)+1 \geq 1}) \geq f(n_1) \quad \text{assurdo}$$

Quindi $n_1 = 1$ e $f(n) \geq f(1) + 1 \quad \forall n \geq 2$

Ora $P(0) \Rightarrow f(1) > f(f(0))$ $\quad$ Se $f(0) > 0$ sarebbero guai

Andando avanti con $n_2, n_3, \dots$ si ottiene la tesi

Esercizio Scrivere per bene che cosa si sta dimostrando per induzione.

$\boxed{\text{Dim } 2}$ Lemma Se $k \geq n$, allora $f(k) \geq n$

$\boxed{\text{Dim}}$ Per induzione $n=0$ è banale

$\boxed{n \Rightarrow n+1}$ Supponiamo $k \geq n+1$, cioè $k-1 \geq n$.

Allora per ipotesi $f(k-1) \geq n$ e ancora per ipotesi

$$f(k) > f(f(k-1)) \geq n$$

Quindi $f(k) \geq n+1$ ☺

Il vantaggio del lemma è che ora ho una affermazione a 2 parametri $Q(k,n)$

- $Q(n,n) \Rightarrow f(n) \geq n$
- $Q(f(n), f(n)) \Rightarrow f(f(n)) \geq f(n) \Rightarrow f(n+1) > f(n)$ $\rightsquigarrow$ strett. crescente
- $f(n+1) > f(f(n))$ + stretta crescenza $\rightsquigarrow$ $n+1 > f(n)$

Fatto generale $f(a) > f(b)$ + f strett. cresc. $\rightsquigarrow$ $a > b$

— o — o —

$\boxed{8}$ $f, g : \mathbb{N}_* \longrightarrow \mathbb{N}_*$

$$f^{(g(n)+1)}(n) + g^{(f(n))}(n) = f(n+1) - g(n+1) + 1$$

indici di composizione

$$f(n+1) = f^{(\dots)}(n) + \underbrace{g^{(\dots)}(n)}_{\geq 1} + \underbrace{g(n+1) - 1}_{\geq 0} > f^{(\dots)}(n)$$

L'esercizio 7 si generalizza facilmente a

$$f(n+1) > f^{(k)}(n) \qquad \text{con } k \geq 2 \text{ fisso}$$

(stessa dim.)

ma anche a

$$f(n+1) > f^{(k_n)}(n) \qquad \text{con } k_n \geq 2 \text{ succ. data}$$

Una volta che uno sa che $f(n) = n$ si trova g facile.

— o — o —

$\boxed{9}$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ iniettiva $\quad f(f(n)) \leq \dfrac{n + f(n)}{2}$

- Supponiamo per assurdo che $\exists\, n_0 \geq 1$ t.c. $f(n_0) < n_0$

$$P(n_0) \Rightarrow f(f(n_0)) \leq \frac{n_0 + f(n_0)}{2} < n_0$$

Questa si itera producendo per induzione $f^{(n)}(n_0) < n_0$

$$P(f(n_0)) \Rightarrow f^{(3)}(n_0) \leq \frac{f(n_0) + f^{(2)}(n_0)}{2} < n_0 \text{ e così via...}$$

Quindi ci sono $f^{(a)}(n_0) = f^{(b)}(n_0)$, mentre per iniettività dovrebbero essere tutti diversi.

- Supponiamo per assurdo che $\exists\, n_1 \geq 1$ t.c. $f(n_1) > n_1$.
Allora

$$\underbrace{f(f(n_1))}_{\text{non ci sono}} \leq \frac{n_1 + f(n_1)}{2} < \underbrace{f(n_1)}_{n_0}$$

e quindi siamo al caso precedente. ☺

(10) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x+y^2) \geq (y+1)\, f(x)^2$

(11) $f: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ $\qquad f(x+y) \geq y f(x) + f(f(x))$

(12) $f: (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ $\qquad f(x+y) \geq f(x) + y\, f(f(x))$

(13) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stessa equ. di sopra $+$ $f(0) \geq 0$

(10) $P(x,0) \implies f(x) \geq f(x)^2 \implies f(x) \in [0,1]$

Supp. $f(x_0) > 0$, allora $P(x_0, y)$ con y enorme produce un assurdo.

(11) • $f(x+y) \geq y f(x)$ Fisso x e mando $y \to +\infty$
ottengo $\lim_{y \to +\infty} f(y) = +\infty$

In realtà mi serve solo : $\exists\, x_0 > 0$ t.c. $f(x_0) \geq 8$

• $\exists\, x_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x_1) \geq 7 x_1$

Faccio $P(x_0, y)$ con y grande : $f(x_0+y) \geq y f(x_0) \geq 8y$

Mi basta $8y \geq 7(x_0+y)$ ← vera per y grande

• $P(x_1, \underbrace{f(x_1) - x_1}_{>0})$ e trovo un assurdo.

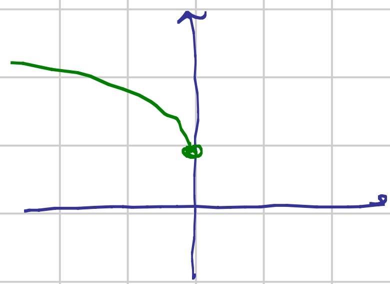
(12) Step 1 $\quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (come prima)

Step 2 $\quad \lim_{x \to +\infty} f(f(x)) = +\infty$ (facile conseguenza del prec.)

Da qui in poi è come prima : $\exists\, x_0 > 0$ t.c. $f(f(x_0)) \geq 8 \ldots$

(13) Step 1 Se $\exists\, x_0 \in \mathbb{R}$ t.c. $f(f(x_0)) > 0$, allora è come prima.

Step 2 Resta il caso $f(f(x)) \leq 0$ sempre, da cui segue f debolm. decr., quindi $f(x) \geq 0$ per ogni $x \leq 0$



Step 3 Qual è il segno per $x > 0$?
Se fosse $f(x) < 0$, allora $f(f(x)) \geq 0$
e quindi l'unica possibilità è che sia 0
se è sempre $f(x) \geq 0$, allora $f(f(x)) \geq 0$,

Step 4 Gestire bene il caso 0 ...

$$f(x+y) \geq f(x) + y\, f(f(x))$$

$\boxed{y = f(x) - x}$ $\rightsquigarrow$ $f(f(x)) \geq f(x) + (f(x) - x)\, f(f(x))$

$$\underbrace{f(f(x))}_{+}\ \underbrace{(f(x) - x - 1)}_{+} + \underbrace{f(x)}_{+} \leq 0$$

Sto usando che, assumendo $\exists\, x_0$ t.c. $f(f(x_0)) > 0$ deduco che
- $f(f(x)) > 0$ per x grande $(\to +\infty)$
- $f(x) > 0$ " " $(\to +\infty)$
- $f(x) > 7x$ per x grande

—o —o —

(14) $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ (i) $f(x) + f(y) \leq \dfrac{f(x+y)}{2}$

(ii) $\dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{f(y)}{y} \geq \dfrac{f(x+y)}{x+y}$

Step 1 $\quad P(x,x) \Rightarrow \quad f(2x) = 4f(x)$

Step 2 $\quad$ Iterazione $\Rightarrow \quad f(2^k x) = 4^k f(x)$

Step 3 $\quad$ Provo $f(x) = ax^2 \rightsquigarrow$ la (ii) è gratis, la (i) viene

$$a(x^2+y^2) \leq \frac{1}{2}a(x+y)^2 = \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}ay^2 + axy$$

$$a\ (x^2+y^2) \leq 2a\ xy$$

Ok se $a \leq 0$. Quindi $f(x) = ax^2$ con $a \leq 0$ è ok.

Step 4 $\quad$ Cambio variabili $\quad f(x) = -x g(x)$.
Nella variabile $g(x)$ l'eq. diventa

$$g(x) + g(y) \leq g(x+y) \qquad x g(x) + y g(y) \geq \frac{x+y}{2} g(x+y)$$

Step 5 $\quad$ Spero $g(x) \nearrow$:

$$x g(x) + y g(y) \geq \frac{x+y}{2} g(x+y) \geq \frac{x+y}{2}(g(x) + g(y))$$

$$2x g(x) + 2y g(y) \geq \cancel{x g(x)} + \cancel{y g(y)} + x g(y) + y g(x)$$

$$x(g(x) - g(y)) - y(g(x) - g(y)) \geq 0$$

$$(x-y)(g(x) - g(y)) \geq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \text{monotonia crescente deb.}$$

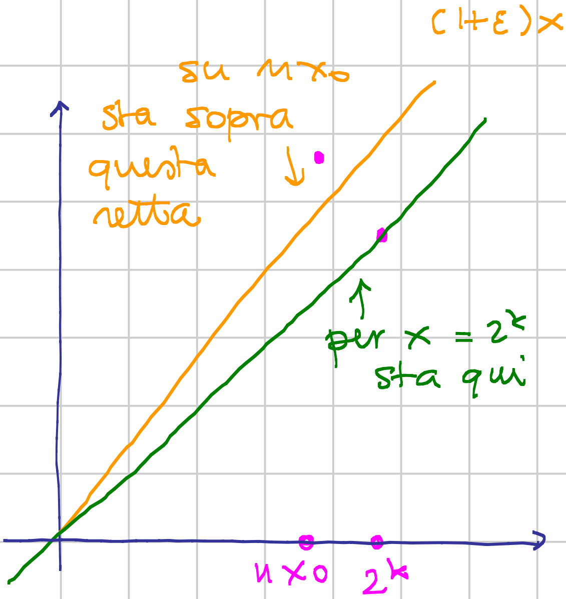
Step 6 $\quad g(2^k x) = 2^k g(x) \quad$ come prima

Step 7 $\quad g(nx) \geq n\, g(x) \quad$ iterando la prima

Step 8 $\quad$ Se serve, posso assumere $g(1) = 1$.

Step 9 $\left.\begin{array}{l} g(nx) \geq n\, g(x) \\ g(2^k x) = 2^k g(x) \\ \text{monotonia} \end{array}\right\} \Rightarrow$ linearità

Supponiamo $g(1) = 1$ e per assurdo $\exists\, x_0 > 0$ t.c.
$$g(x_0) = (1+\varepsilon)\, x_0$$



Vorremmo trovare n e k tali che

$$n x_0 < 2^k \quad \text{ma} \quad n(1+\varepsilon)\, x_0 > 2^k$$

cioè

$$\frac{2^k}{(1+\varepsilon)\, x_0} < n < \frac{2^k}{x_0}$$

quindi mi serve che esista un intero fra

$$\frac{2^k}{(1+\varepsilon)\, x_0} \quad \text{e} \quad \frac{2^k}{x_0}$$

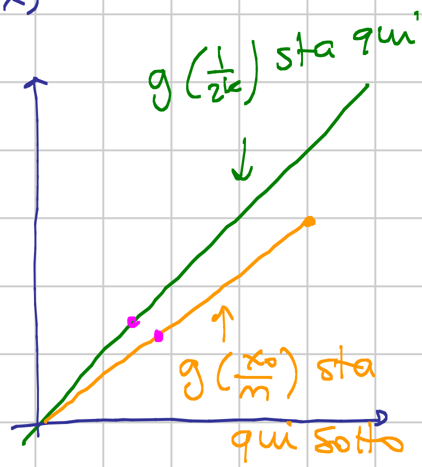
Questo è possibile perché la lungh. dell'intervallo raddoppia passando da k a $k+1$

Step 10 Come concludere

Modo 1 Al passaggio prec. abbiamo ottenuto $g(x) \leq x$ supponendo $g(1) = 1$. In realtà abbiamo ottenuto
$$g(x) \leq g(1)\, x$$
o ancora più in generale
$$g(x) \leq g(x_0)\, \frac{x}{x_0}$$
Questa deve valere per ogni $x > 0$ e ogni $x_0 > 0$
Basta dividere
$$\frac{g(x)}{x} \leq \frac{g(x_0)}{x_0}$$ e scambiare x e x_0

Modo 2 Reitero verso 0, cioè uso

$$g\left(\frac{1}{2^k}\right) = \frac{1}{2^k} \quad e \quad g\left(\frac{x}{m}\right) \le \frac{1}{m}\, g(x)$$



e ora sono dalla parte giusta

— o — o —

$\boxed{\text{IMO } 2011-3}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f(x+y)\le y\,f(x)+f(f(x))$

Tesi: $f(x)=0$ $\forall x\le 0$

$\boxed{\text{IMO } 2013-5}$ $f:\mathbb{Q}_{>0}\to\mathbb{R}$

(i) $f(x)f(y)\ge f(xy)$

(ii) $f(x)+f(y)\le f(x+y)$

(iii) $\exists\, a>1$ t.c. $f(a)=a$

$\boxed{\text{CARINO}}$ $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ $f(x)^2\ge f(x+y)\,(f(x)+y)$

$\boxed{2011}$

Step 1 Supponiamo $\exists\, x_0\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x_0)>0$.

Allora $P(x_0,y)$ e $y\to-\infty$ $\Rightarrow$ $\lim\limits_{y\to-\infty} f(y)=-\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(f(x))=-\infty$

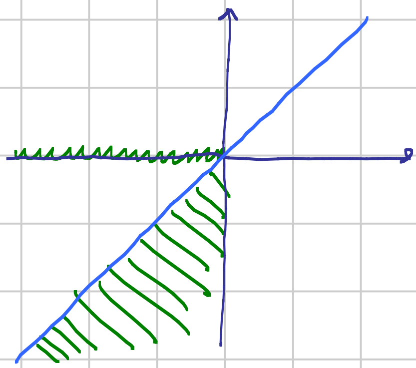
Ma allora $P(-x,x)$: $f(0)\le x\,f(-x)+f(f(-x))$

Mando $x\to+\infty$ ed è un guaio.

Conclusione $f(x)\le 0$ per ogni $x\in\mathbb{R}$.

Step 2 $P(x,f(x)-x)\Rightarrow$ $0\le (f(x)-x)\,f(x)$

Per $x<0$ $\nearrow f(x)=0$ $\searrow f(x)\le x$



Step 3

$P(x,-x)\Rightarrow$ $f(0)\le \overset{+}{-x\,f(x)}+\overset{\le 0}{f(f(x))}$

Prendo x molto negativo

Se $f(x)\neq 0$, questo è un numero negativo di val. assol. $\ge x^2$ $\rightsquigarrow$ guaio

quindi $f(x)=0$ per ogni x abbastanza negativo

Step 4 $\quad f(0)=0$

$P(x,x) \Rightarrow \quad \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f(2x)} \le x\,\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{f(x)} + \underset{f(0)}{f(f(x))} \qquad x$ molto neg.

Step 5 $\quad$ Supponiamo $\exists\, x_0 < 0$ t.c. $f(x_0) < 0$

$P(x_0,-x_0) \Rightarrow \quad 0 = f(0) \le -x_0 f(x_0) + f(f(x_0)) \le \underset{+}{-x_0}\,\underset{-}{f(x_0)}$

FINE.

—o—o—

$\boxed{2013}$

Step 1 $\quad$ Iterazioni: $\quad f(x^k) \le f(x)^k$

$f(nx) \ge n f(x)$

Step 2 $\quad f(1) \ge 1 \qquad P(1,a) \Rightarrow \quad f(1)\,\underset{\substack{\parallel \\ a}}{f(a)} \ge \underset{\substack{\parallel \\ a}}{f(a)}$

$f(n) \ge n$

Step 3 $\quad f\left(\frac{p}{q}\right) \ge 0$ sempre $\quad \rightsquigarrow$ MONOTONIA

$f\left(\underset{+}{q \cdot \frac{p}{q}}\right) \le \underset{+}{f(q)} \cdot f\left(\frac{p}{q}\right)$

perché sono interi

Step 4 $\quad$ Monotonia + $f(nx_0) \ge n f(x_0)$ + $f(a^k) \le a^k$

$\rightsquigarrow$ solito trucco $\rightsquigarrow f(x) \le x$ per $x \ge 1$

Step 5 $\quad$ In maniera analoga all'esempio analogo si ottiene pure $f(x) \ge x$.