Senior 2018 - C1 Advanced - Anér

Titolo nota 03/09/2018

Problemi con punti nel piano (Comb./Geom.)

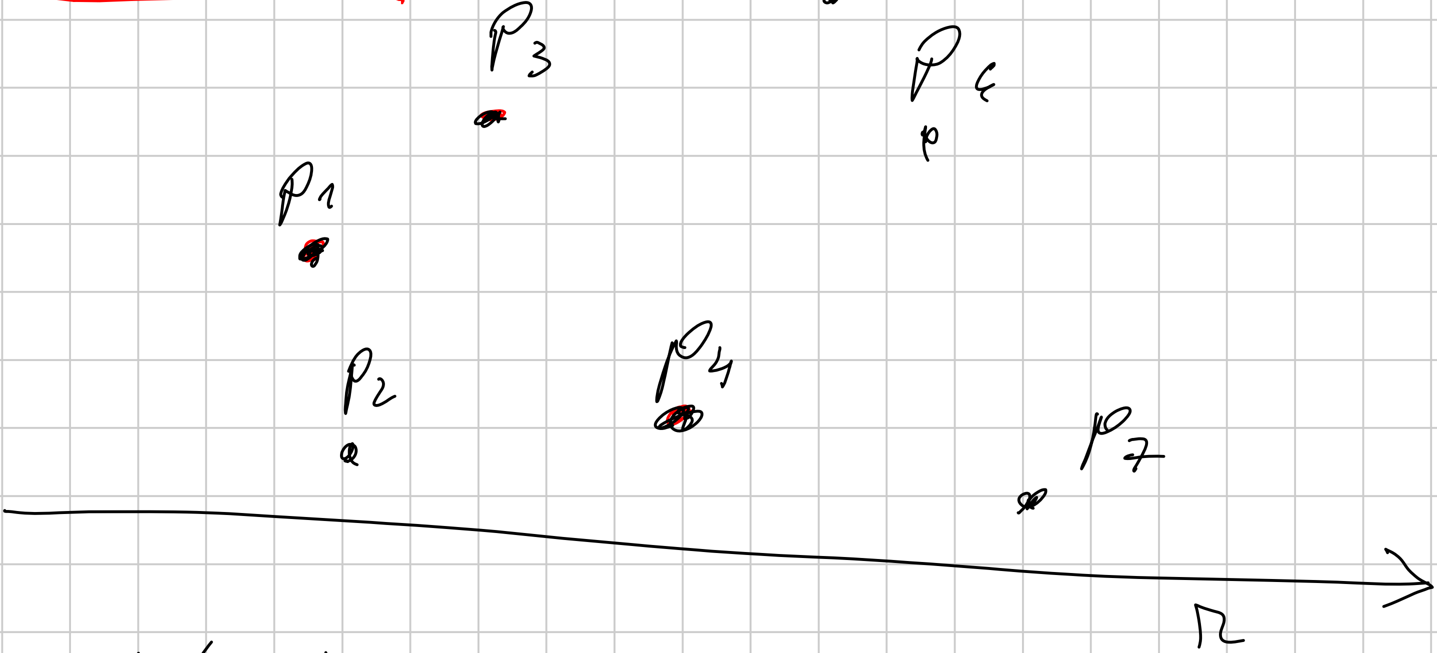
Problema Se prendo n punti nel piano $P_1 \dots P_n$, quante distanze vedo come minimo?

$$\min_{\substack{\text{conf di} \\ n \text{ punti}}} \left| \left\{ \overline{P_i P_j} \mid i \neq j \right\} \right| = A_n = ?$$

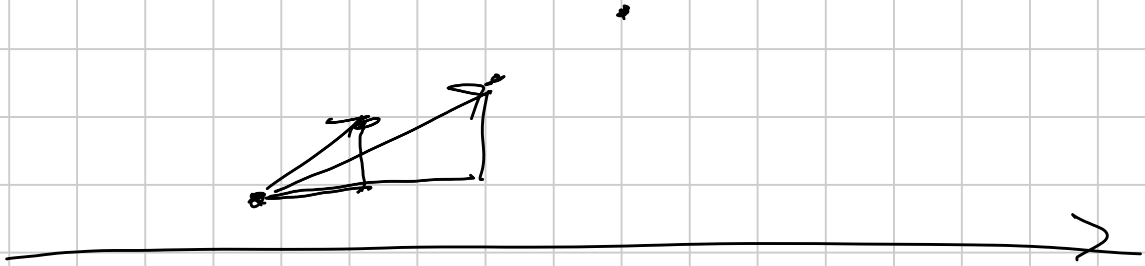
Esempio: se gli n punti sono $(1,0)$ $(2,0)$ ... $(n,0)$

Vediamo $(n-1)$ distanze diverse

$$\boxed{A_n \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor}$$



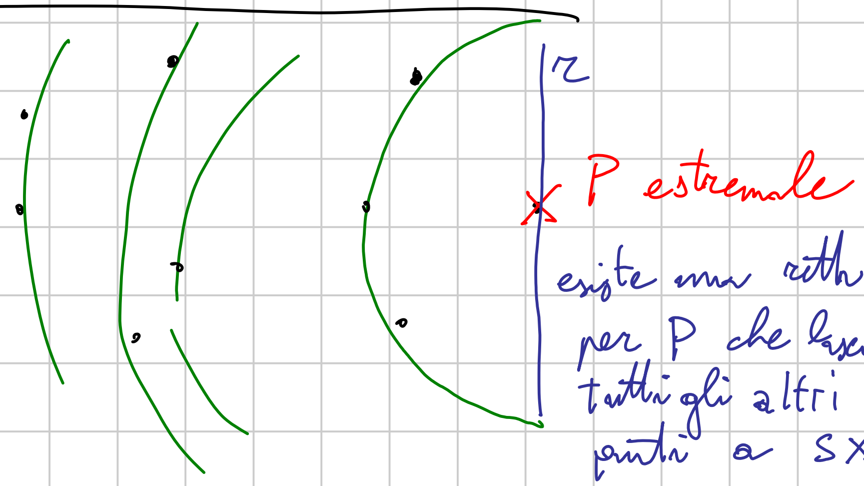
$d(P_i)$ = distanza tra P_i e r



Dilworth: data una stringa di n reali distinti riesco a trovare una sua sottostringa monotona di almeno $\lceil \sqrt{n} \rceil - 1$

$\lceil \sqrt{n} \rceil - 2$

Altra strategia



esiste una retta per P che lascia tutti gli altri punti a SX.

Traccio tutte le cfr centrate in P passanti per gli altri punti.

Se ci sono $\geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ cfr. abbiamo vinto.

Se ci sono $\leq \lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1$ cfr., una contiene almeno

$$\frac{n-1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor - 1} \geq \frac{n-1}{\sqrt{n}-1} = \sqrt{n}+1 \geq \lfloor \sqrt{n} \rfloor + 1$$

sono tutti sulla stessa semicirconferenza

Teo Se ho numeri reali $x_1, \dots, x_{ab+1}$ tutti distinti, c'è una sottosucc. lunga $(a+1)$ crescente o una lunga $(b+1)$ decrescente. $a, b \geq 0$

Dim Induzione su b. $\boxed{b=0}$ x_1 è una sottosucc. decr. lunga 1 ✓

Passo induttivo $b \rightsquigarrow b+1$

Voglio trovare in $x_1 \dots x_{ab+a+1}$ una $(a+1)$ crescente o una $(b+2)$ decrescente

$\underbrace{x_1, x_2 \dots \cancel{x_{k_1}}\ x_{ab+1}}$ $\dots\dots$ x_{ab+a+1}

qui trovo una $(b+1)$ decrescente

$\underbrace{x_1 \dots \cancel{x_k}\ \cancel{x_{k_2}}\ x_{ab+2}}$

qui trovo una $(b+1)$ decrescente

Trovo $a+1$ succ. lunghe $(b+1)$ decrescenti, tutte con ultimi termini diversi tra loro

Considero la succ. $x_{k_1}, \dots, x_{k_{a+1}}$.

Se sono sfortunato, non è crescente, ma allora $\exists\ x_{k_h} > x_{k_{h+1}}$, ma allora la succ. lunga $b+1$ che termina in x_{k_h} può essere allungata $\square$

Problema un po' più difficile $k \geq 3$. n punti nel piano, no k allineati. Quante distanze almeno?

Sia ℓ il n° di distanze che occorrono.

Contiamo i triangoli isosceli: sono al più $\binom{n}{2} \cdot (k-1)$:

infatti ogni coppia di pti la uso al max $(k-1)$ volte come base.

$d_1 \dots d_\ell$ distanze che occorrono. X_{ij} = n° di pti a distanza d_j da P_i, $j \le \ell$ $i \le n$.

$$\forall i \quad \sum_{j=1}^{\ell} x_{ij} = n-1$$

$$(k-1)\binom{n}{2} = (k-1)\frac{\cancel{n(n-1)}}{\cancel{2}}$$

$$\sum_{i,j}\binom{x_{ij}}{2} = \text{n° tr. isosceli} \overset{\text{Jensen}}{\ge} \cancel{\ell \cdot n}\, \frac{\left[\cancel{(n-1)/\ell}\right]\left[(n-1)/\ell - 1\right]}{\cancel{2}}$$

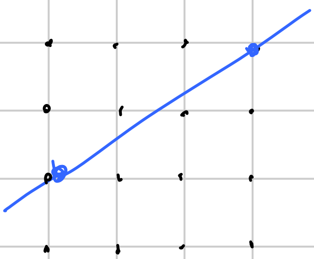
$\boxed{\frac{x^2-x}{2} \text{ è convessa}}$

$$(k-1) \ge \frac{n-1}{\ell} - 1$$

$\boxed{\ell \ge \frac{n-1}{k}}$ lineare in n

Per $n = k^2$ ho la configurazione $\{1, \dots k\} \times \{1, \dots k\}$

In questa conf. quante distanze vedo? Tante quanti gli interi $1 \le m \le 2n$ che si possono scrivere come somma di due quadrati. Quali interi positivi che si scrivono come somma di 2 quadrati?



$$1 \le h \le 2n$$

$h = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r} \cdot q_1^{\beta_1} \cdots q_s^{\beta_s}$ con $p_i \equiv 1 \pmod 4$ e $q_i \equiv 3 \pmod 4$.

Allora $h = x^2 + y^2$ se e solo se tutti i β_i sono pari

Non abbiamo davvero tutti i numeri da 1 a $2n$!

Esempio non ho $i \equiv 3, 6 \pmod 9$. $\rightsquigarrow$ ho al

max $2n \cdot \left(1 - \frac{3-1}{3^2}\right)$. Analogamente per il 7, l'11...

Su larghe scale ho al massimo

$$\underbrace{2n \cdot \left(1 - \frac{3-1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{7-1}{7^2}\right)\left(1 - \frac{11-1}{11^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{p-1}{p^2}\right)}_{\text{diventa piccolo a piacere!}}$$

Problema aperto capire con che velocità cresce davvero

$$\lfloor \sqrt{n} \rfloor < A_n < \frac{C \cdot n}{\log n} \quad \text{per qualche } C \text{ positivo}$$

Happy ending theorem (Paul Erdős - George Szekeres, 1935)

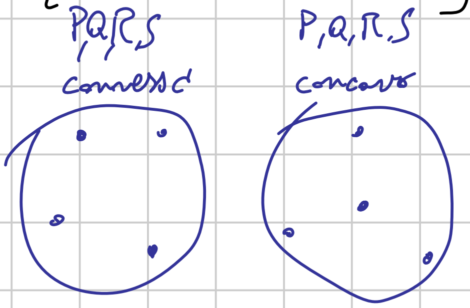
Per ogni $k \geq 2$ esiste un N abbastanza grande ($N = \binom{2k-4}{k-2} + 1$ basta) per cui comunque si prendano N punti nel piano, a 3 a 3 non allineati, ne esistono k che formano un poligono convesso.

Caso particolare $k = 4$ (Esther Klein, 1933)

Per $k = 4$ basta $N = 5$.

Da questo segue in realtà il teorema per k generico: prendiamo N punti

nel piano e associamo a ogni quaterna $\{P,Q,R,S\}$
un colore scelto tra 2 colori $\{\text{conv.}, \text{conc.}\}$



Ramsey ci dice che se N è molto grande rispetto ai parametri (K, h, s) se coloro le s-uple di un insieme U di N elementi con 2 colori, allora esiste un $A \subseteq U$ con $|A| = K$ e A monocromatico conv.
oppure $B \subseteq U$ $|B| = h$ B monocrom. conc.

5 4

Da qui segue H.E.T. (con una stima peggiore): per N grande trovo o 5 punti con tutte le quaterne concave (assurdo), o K punti con tutte le quaterne convesse $\rightsquigarrow$ K-agono convesso.

H.E.T. si chiama così perché Klein pose il problema generale, Szekeres lo risolse, i due si sposarono, Erdős diede questo nome al teorema.

Prendo N punti nel piano. Fisso le coordinate cartesiane in modo che tutte le ascisse siano diverse e tutte le ordinate siano diverse. $\underset{P_1}{(x_1, y_1)}, \dots \underset{P_N}{(x_N, y_N)}$

con $x_1 < x_2 < \dots < x_N$.

Diciamo che una sottosequenza $P_{i_1}\ P_{i_2}, \dots P_{i_h}$

$(i_1 < \dots < i_h)$ è <u>convessa</u> se i rapporti incrementali sono crescenti.

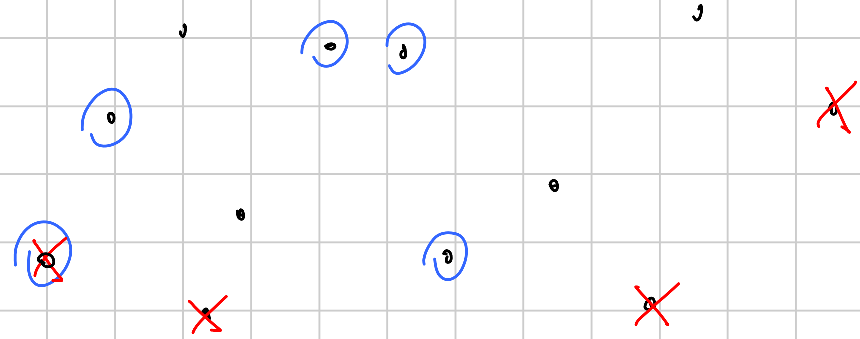
$$\frac{y_{i_2}-y_{i_1}}{x_{i_2}-x_{i_1}} < \frac{y_{i_3}-y_{i_2}}{x_{i_3}-x_{i_2}} < \dots < \frac{y_{i_h}-y_{i_{h-1}}}{x_{i_h}-x_{i_{h-1}}}$$

è <u>concava</u> se i rapp. incr. sono decresenti.

<u>Esempio</u>

sottosequenza convessa ✗

sottosequenza concava



<u>Entrambe generano nel piano un poligono convesso</u>

$ES(k,h)$ è un numero N abb. grande tale che

$\forall N$ punti $P_1=(x_1,y_1) \dots P_N=(x_N,y_N)$ esiste una

k-sottosequenza convessa, o una h-sottoseq. concava.

<u>Tesi</u> $ES(k,h)$ esiste $\left(\le \binom{k+h-4}{k-2} + 1 \right)$

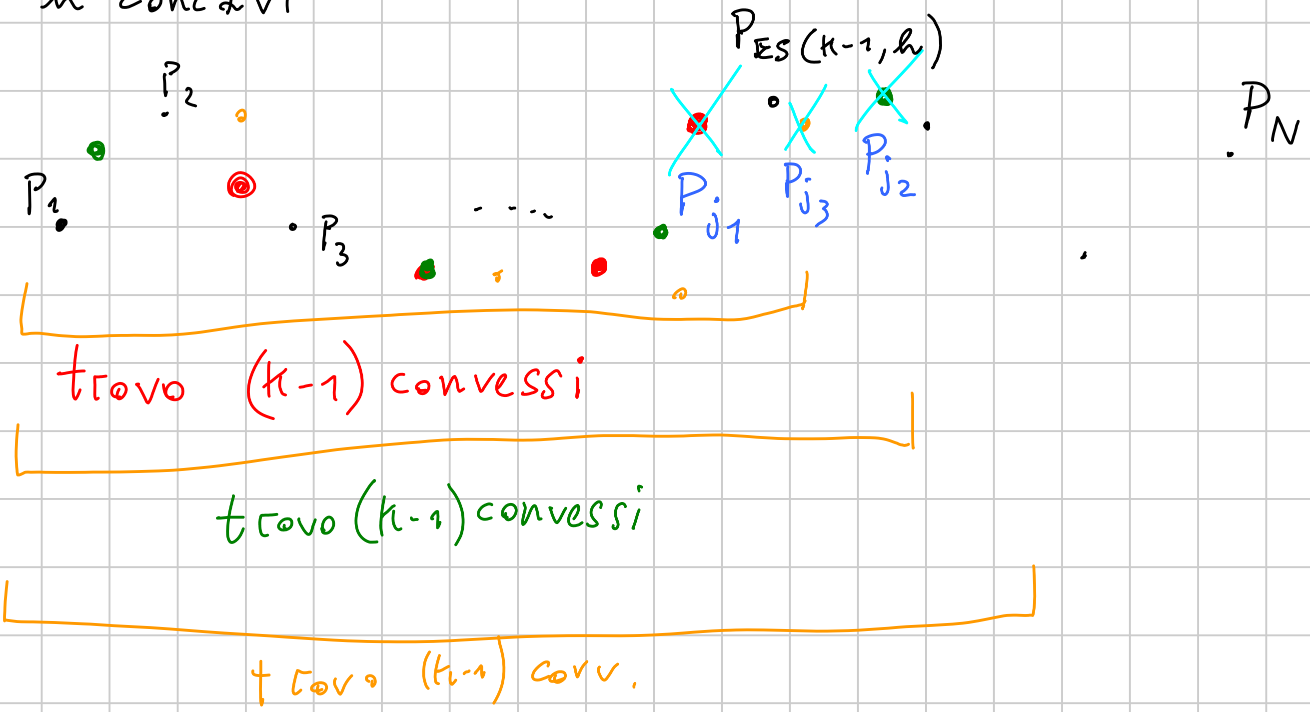
Induzione su k e h (<u>induzione su $k+h$</u>, <u>induzione su h</u>..)

<u>Passo base</u> $h=2$, k qualsiasi.

Bastano 2 punti: fanno sempre una 2-sequenza concava!

$$\binom{k+2-4}{k-2}+1=2$$

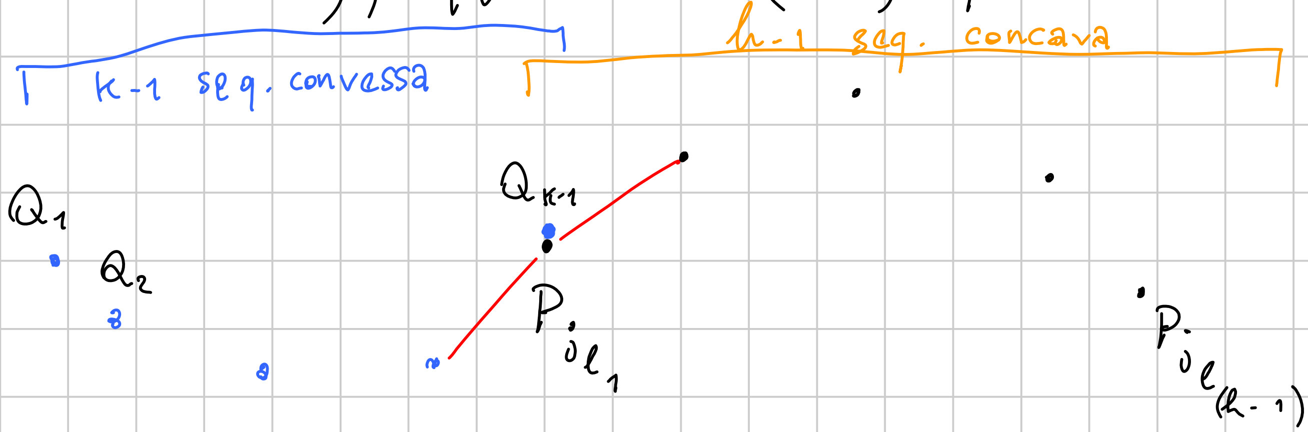
Passo induttivo Prendiamo $N = ES(k-1, h) + ES(k, h-1) - 1$ punti nel piano. Voglio trovarne k convessi o h concavi



Non assumo che $x_{j_1} < x_{j_2} < \dots$

Trovo un insieme $P_{j_1} \dots P_{ES(k,h-1)}$ punti, tutti questi sono al termine di una $(k-1)$-seq. convessa.

Tra questi ci sono o una k seq. convessa (caso fortunato), oppure una $(h-1)$ seq. concava.



La lotta tra i due rapporti incrementali determina se c'è una k-seq. convessa o una h-seq. concava

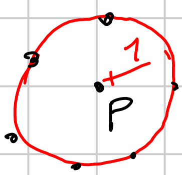
$ES(k,h)$ possiamo prenderlo pari a

$$ES(k-1,h)+ES(k,h-1)-1 = \binom{k-1+h-4}{k-1-2}+1 + \binom{k+h-1-4}{k-2}\cancel{+1} \cancel{-1} = \binom{k+h-4}{k-2}+1$$

Problemi per la pausa

(1) $n \geq 3$ punti nel piano. La minima distanza tra 2 punti è 1. Allora ci sono non più di $3n-6$ coppie a distanza 1

(2)
- Dim. che esistono ∞ punti del piano a distanze $\in \mathbb{Q}$, non tutti allineati
- Dim. che // ∞ punti, distanze $\in \mathbb{Q}$, a 3 a 3 non allineati
- Dim. che se ∞ punti del piano hanno tutte distanze $\in \mathbb{N}$, allora sono tutti allineati.

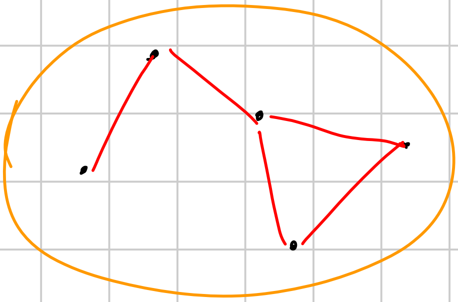
(1)
- 

Ci sono ≤ 6 punti a distanza 1 da P (altrimenti 1 non è la min. distanza).

\# coppie ordinate a distanza 1 $\leq 6n$

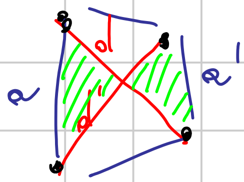
\# // non ord. // // $\leq 3n$

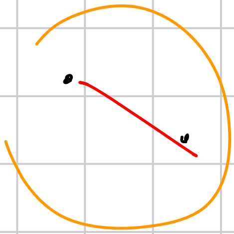
•



Se colleghiamo i punti a distanza 1 con dei segmenti otteniamo un grafo planare.
Non ho

$d+d' > a+a'$





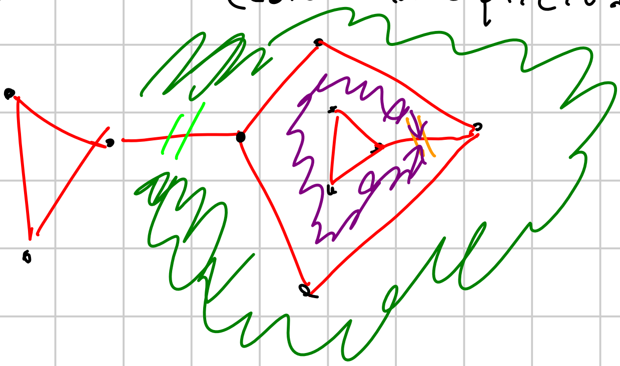
È connesso il grafo? Se non lo è avvicino q.b. le componenti connesse.

wlog
$\leadsto$ connesso

• $F+V-S=2$ Eulero

• A meno che il grafo non sia •—• ($n=2$, quindi supponiamo solo $n \geq 3$)

ogni faccia tocca (con molteplicità) almeno 3 lati.



$$\boxed{3F \leq 2S}$$

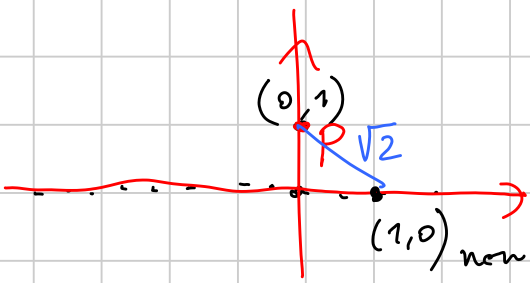
$F \leq \frac{2}{3} S$ $\qquad$ $\frac{2}{3} S + V - S \geq 2$

$-\frac{1}{3} S + n - 2 \geq 0$ $\qquad$ $S \leq 3n-6$

$\square$

(2) • ... tutti i pti della forma $(u,0)$ con $u \in \mathbb{Q}$

Provo ad aggiungere $P=(0,1)$.



non va più bene.

Ci sono punti $(u,0)$ che continuano ad andare bene? Vogliamo $\boxed{1+u^2=v^2}$ per $v \in \mathbb{Q}$.
Questo capita ∞ volte. ha ∞ soluzioni in $\mathbb{Q}$.

- Invertiamo in P con raggio 1.

  Q e R due pti qualsiasi della forma $(u,0),(u',0)$ con u,u' buoni. $\overline{QR} \in \mathbb{Q}$. $\overline{PR} \in \mathbb{Q}$ $\overline{PQ} \in \mathbb{Q}$.

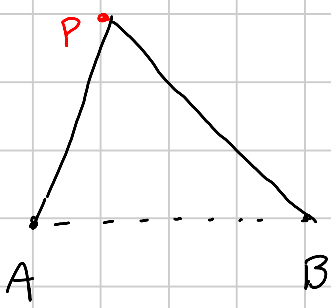
$Q \rightsquigarrow Q'$ $R \rightsquigarrow R'$

$$\overline{Q'R'} = \frac{\overline{QR} \cdot 1^2}{\overline{PQ} \cdot \overline{PR}} \in \mathbb{Q}$$

. I pti $Q'R'$, e gli altri .... si trovano su una circonferenza (a 3 a 3 non allineati)

- Non esistono ∞ punti a distanza intera (non tutti allineati)

Prendiamo 3 pti non allineati A,B,C a distanza intera. Quanti punti (e dove) posso aggiungere?



$\overline{PA}, \overline{PB} \in \mathbb{N}$

$\overline{PA} - \overline{PB}$ è intero

$$\underbrace{-\overline{AB} \le \overline{PA} - \overline{PB} \le \overline{AB}}_{}$$

Fissati A e B, ho finiti valori possibili.

Se fisso $\lambda \in [-\overline{AB}, \overline{AB}]$, il luogo dei pti P

con $\overline{PA} - \overline{PB} = \lambda$ è un ramo di iperbole

($\lambda = 0$ viene l'asse di AB, $\lambda = \pm \overline{AB}$ viene una semiretta)

Tutti i punti P della collezione giacciono su una tra $(2\overline{AB}+1)$ curve (rami di iperbole o rette).

Idem per B e C, ogni P giace su una tra $2\overline{BC}+1$ curve determinate da B e C.

Un'iperbole (retta) con asse focale $= AB$ non può coincidere con un'iperbole/retta con asse focale $= BC$.
(Per una retta, nel caso dell'asse prendo la perp., nel caso sia una semiretta, prendo la retta a cui appartiene).

Supponiamo che $AB \not\perp BC$ (altrimenti uso AC)

Se ho n punti nel piano, ci sono $\lesssim n^{3/2}$ coppie a distanza 1 ($\lesssim$ vuol dire $\leq$ a meno di piccole perturbazioni del RHS che vi lascio per esercizio).

$x_i = n°$ di pti a distanza 1 da P_i

$\{P_1 \dots P_n\}$. wlog $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$.

Siamo interessati a disuguaglianze del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \leq ?$$

Scegliamo j tra 1 e n

$$\sum_{i=1}^{j} x_i \le n + 2\binom{j}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{j} \underbrace{\left[x_i - (2i-2)\right]}_{\ge} \le n$$

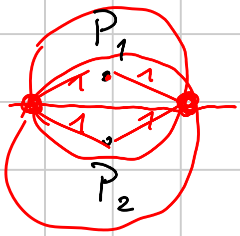
n° di pti P_h per cui i è il minimo indice ℓ per cui $\overline{P_h P_\ell} = 1$

$$x_1 + \underbrace{(x_2 - 2)}_{\ge} + \underbrace{(x_3 - 4)}_{\ge}$$

pti a distanza 1 da P_1

pti a dist. 1 da P_2 ma non da P_1

pti a dist. 1 da P_3 ma non da P_1 né da P_2



Fisso $j \simeq \sqrt{n}$

$$\sum_{i=1}^{j} x_i \le n + 2\binom{j}{2} \simeq n + 2\,\frac{\sqrt{n}(\sqrt{n}-1)}{2}$$

$$= 2n - \sqrt{n} \simeq 2n$$

$$x_j \le \frac{2n}{j} \simeq 2\sqrt{n}.$$

$$\sum_{i=j+1}^{n} x_i \le 2\sqrt{n}\cdot(n-\sqrt{n}) = \boxed{2n^{3/2} - 2n}$$

$$\square + \bigcirc = 2n^{3/2}$$

Quindi $\underset{\displaystyle 2(\#\text{coppie a distanza } 1)}{\underset{\parallel}{\sum_{i=1}^{n} x_i}} \lesssim 2n^{3/2}$