Senior 2018 - N1 Advanced - Anér

Titolo nota 04/09/2018

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = +\infty .$$

Def Sia $a_1, a_2, \dots$ una successione di reali ≥ 0.

Allora la successione $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$ è debolmente crescente. Se $\ell = \lim_{n \to \infty} S_n < +\infty$, allora diciamo che

"La serie converge a ℓ" $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \ell$. Altrimenti "La serie diverge a $+\infty$" $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Per i primi $p_1, p_2, p_3, \dots$

$= 2, 3, 5, 7, \dots$

$$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} .$$

S è un insieme (anche infinito), $a : S \to [0, \infty)$ $a(s) = a_s$ $s \in S$

$$\sum_{s \in S} a_s = \sup_{\substack{T \subseteq S \\ T \text{ finito}}} \left(\sum_{s \in T} a_s \right)$$

Esempio $a_n = \lambda^n$ (partendo da $a_0 = 1$) $\lambda \geq 0$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i = \begin{cases} +\infty & \text{se } \lambda \geq 1 : \text{ogni volta aggiungo } \lambda^n \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-\lambda} & : \text{infatti } \sum_{i=0}^{n} \lambda^i = \dfrac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda} \xrightarrow{n \to \infty} \dfrac{1}{1-\lambda} \end{cases}$$

Esempio $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$ (partendo da a_1).

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right] \overset{?}{=} 1$$

Infatti $\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right] = 1 - \frac{1}{n+1}$

Variante $a_n = \frac{1}{n^2}$. $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ converge o no?

Sì: a parte il primo termine $\frac{1}{1^2}$, ogni altro

$a_i = \frac{1}{i^2} < \frac{1}{i(i-1)}$ e la serie di questi ultimi converge.

Esempio $s > 0$ $a_n = \frac{1}{n^s}$ con $n \geq 1$

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ converge? sí se $s > 1$; NO se $s \leq 1$

CRITERIO DI CONDENSAZIONE DI CAUCHY

$a_n \geq 0$, a_n è decrescente (deb.), allora

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge se e solo se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ converge

diverge // // diverge

$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^s}$ converge se e solo se $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{ks}}$ converge

$\shortparallel$

mi riconduco alla serie geometrica $\sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{2^{s-1}}\right)}_{\lambda}^{k}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

Excursus sui logaritmi

Diamo una definizione di e.

Lemma La successione $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente $n\geq 1$

La successione $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ è decrescente $n\geq 1$

DIM

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \overset{?}{<} \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \overset{?}{<} \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$1-\frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \overset{?}{<} \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^n = \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n$$

Bernoulli

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n > \cancel{1} - \frac{n}{(n+1)^2} \overset{?}{>} \cancel{1} - \frac{1}{n+2}$$

$$\frac{1}{n+2} \overset{?}{>} \frac{n}{(n+1)^2} \qquad 1 \overset{?}{>} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \qquad \checkmark$$

L'altra per esercizio.

e è il lim della succ. crescente $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

e è il lim // , decr. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

$$\forall n \quad \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

$$\frac{1}{n+1} < \log\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$$

$\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p} = +\infty$. Basta dim. che $\sum_{p \text{ primo}} \frac{1}{p-1} = +\infty$:

levo il primo termine qui, ogni altro termine è < di quello qui rel. al primo precedente.

Siano $p_1 \dots p_k$ i primi fino a N.

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i - 1} > \sum_{i=1}^{k} \log\left(1+\frac{1}{p_i-1}\right) = \log\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right) >$$

$$> \log\left(\prod_{i=1}^{k} \frac{1-\left(\frac{1}{p_i}\right)^{\lceil \log_{p_i}(N)\rceil+1}}{1-\frac{1}{p_i}}\right) =$$

$$= \log\left(\prod_{i=1}^{k} \left(1+\frac{1}{p_i}+\dots+\frac{1}{p_i^{\lceil \log_{p_i}(N)\rceil}}\right)\right) =$$

$$= \log\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{N}+\sum_{\text{finiti}} \text{altri } \frac{1}{M}\right) > \underbrace{\log\left(1+\dots+\frac{1}{N}\right)}_{\text{diventa arbitr. grande}}$$

Variazione sul tema: $\sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p\equiv 1 \pmod 4}} \frac{1}{p} = +\infty$

$n \geq 1$ $\qquad n = 2^{\alpha} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ $\qquad p_i$ dispari (tutto in $\mathbb{N}$)

n si scrive come somma di quadrati u^2+v^2 con $u,v \in \mathbb{Z}$ in quanti modi?

Interi di Gauss $\qquad n = u^2+v^2 = (u+iv)(u-iv) = m \cdot \overline{m}$

Abbiamo già visto che i primi $\equiv 3 \pmod 4$ devono comparire con esp. pari.

Se $p_i^{\alpha_i} \parallel n$ $\quad \alpha_i$ pari $\quad p_i \equiv 3 \ (4)$, allora

$p_i^{\alpha_i/2}$ deve dividere sia u che v.

Il caso interessante è quello con 2 e primi $\equiv 1 \ (4)$.

$p_i = q_i \cdot \overline{q_i}$

$n = i^t (1+i)^{2\alpha} \, q_1^{\alpha_1} \cdot \overline{q_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot q_k^{\alpha_k} \cdot \overline{q_k}^{\alpha_k} = m \cdot \overline{m}$

m deve avere la forma $\quad i^r (1+i)^{\alpha} \cdot q_1^{\beta_1} \cdot \overline{q_1}^{\alpha_1-\beta_1} \cdot \ldots \cdot q_k^{\beta_k} \, \overline{q_k}^{\alpha_k-\beta_k}$

Posso scegliere r in 4 modi e β_i in (α_i+1) modi

$\rightarrow$ n si scrive come u^2+v^2 in $4(\alpha_1+1) \cdot \ldots \cdot (\alpha_k+1)$ modi con $u,v \in \mathbb{Z}$.

Per casa: sistemare i particolari sulla convergenza/divergenza

GRANDE CONGETTURA

$$\sum_{\substack{(u,v)\in\mathbb{Z}^2\\(u,v)\neq(0,0)}} \frac{1}{u^2+v^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\#\{(u,v) : u^2+v^2=n\}}{n}$$

$$\overset{*}{=} 4\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\cdot\prod_{p\equiv 3 \pmod 4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\cdot\prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)^2$$

<u>Lemma</u> Se $\lambda\in(0,1)$ $a_n=(n+1)\cdot\lambda^n$ $(n\geq 0)$.

Allora $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)\lambda^i=\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i\right)^2$.

<u>DIM</u> Sto sommando i seguenti numeri

$$\begin{array}{ccccc}
1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \cdots\\
\lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \ddots & \\
\lambda^2 & \lambda^3 & \ddots & & \\
\lambda^3 & \ddots & & & \\
\vdots & & & &
\end{array}$$

Se espando

$$4\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\cdot\prod_{p\equiv 3 \pmod 4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\cdot\prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)^2=$$

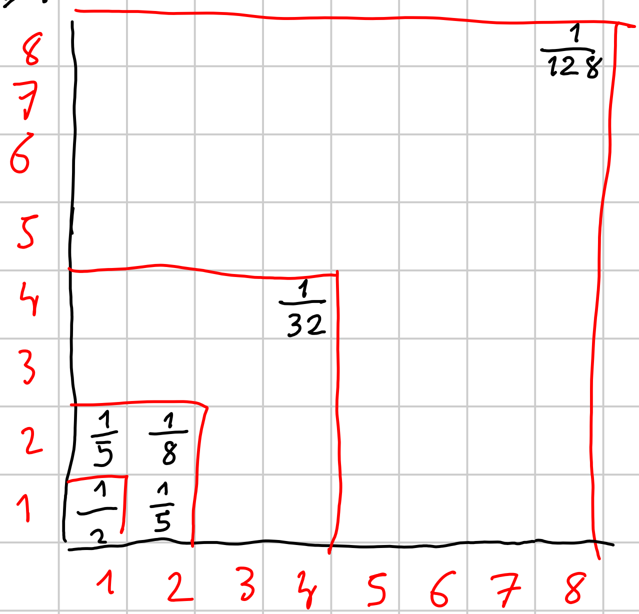
$$=4\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots\right)\cdot\prod_{p\equiv 3\ (4)}\left(1+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^4}+\frac{1}{p^6}+\dots\right)\cdot\prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left(1+\frac{2}{p}+\frac{3}{p^2}+\frac{4}{p^3}+\dots\right)$$

quante volte ottengo $\dfrac{1}{n}$?

GRANDE CONGETTURA DIMOSTRATA!

Adesso dim. che $\displaystyle\sum_{(u,v)\neq(0,0)} \frac{1}{u^2+v^2}$ diverge. Basta

dim che $\displaystyle\sum_{u,v\geq 1} \frac{1}{u^2+v^2}$ diverge



$$\sum_{u,v\geq 1} \frac{1}{u^2+v^2} > \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3\cdot \cancel{4^k}}{8\cdot \cancel{4^k}} = +\infty$$

Nel prodotto con termini ≥ 1

$$4\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right)\cdot\prod_{p\equiv 3 \pmod 4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\right)\cdot\prod_{p\equiv 1 \pmod 4}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)^2$$

Un fattore deve divergere a $+\infty$. Ma

$$\prod_{p\equiv 3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^2}}\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} < \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

n si fatt. solo con primi $\equiv 3$ (4)

qualsiasi

Quindi $\prod_{p \equiv 1\ (n)} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p}} \right)^2 = +\infty$, ma allora

$$2 \sum_{p \equiv 1} \log\left(1 + \frac{1}{p-1}\right) = +\infty$$

$$\wedge$$

$$2 \sum_{p \equiv 1} \frac{1}{p-1} \rightsquigarrow \sum_{p \equiv 1} \frac{1}{p-1} = +\infty$$

ma allora anche $\sum_{p \equiv 1} \frac{1}{p} = +\infty$

__Teo (Dirichlet)__ Se a, b sono coprimi, allora

$$\sum_{\substack{p \text{ primo} \\ p \equiv a \ (\mathrm{mod}\, b)}} \frac{1}{p} = +\infty$$

__D'ora in poi niente più analisi.__

Sia $f: \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ una funzione (spesso a valori naturali)

f è __moltiplicativa__ se $f(mn) = f(m) \cdot f(n)$ $\forall\, m, n$ coprimi.

f è __completamente moltiplicativa__ se $f(mn) = f(m) f(n)$ sempre.

__Esempio__ $f(n) \equiv 1$

__Esempio__ $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è coprimo con } K \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

Esempio $\varphi(n)$ è moltiplicativa, ma non compl.

$\left[\tau(n) = \#\text{ divisori} \geq 1 \text{ di } n\right]$ è molt., ma non c.m.

$\left[\sigma(n) = \sum_{d|n} d\right]$ è molt., ma non c.m.

Esempio di prima $F(n) = \frac{1}{4}\#\{(u,v) : n = u^2+v^2\}$

è moltiplicativa!

In generale posso considerare, data una funzione $F : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$, la serie formale di Dirichlet associata

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}$. Ho un'operazione di convoluzione, corrispondente al prodotto

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overbrace{\left[\sum_{d|n} F(d)\cdot g\left(\frac{n}{d}\right)\right]}^{\text{è una nuova funzione di } n}}{n^s}$$

Esempio importante $\mu : \mathbb{N}_0 \to \{0, 1, -1\}$

Funz. di Möbius

$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{se c'è un } \alpha_i \geq 2 \quad (n \text{ non è libero da quadrati}) \\ \text{altrimenti} & \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ pari} \\ -1 & \text{se } k \text{ dispari} \end{cases} \end{cases}$$

μ è moltiplicativa.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}\right)$$

Se calcolo $\sum_{d|n} \mu(d) \cdot 1 = \begin{cases} \text{se } n=1 & \text{viene } 1 \\ \text{se } n \geq 2 & \text{viene } 0 \end{cases}$

$$\sum \frac{\tau(n)}{n^s} = \prod_p \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}\right)^2 = \left(\sum \frac{1}{n^s}\right)^2$$

In generale se F è moltiplicativa

$$\sum \frac{F(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{F(p)}{p^s} + \frac{F(p^2)}{p^{2s}} + \dots\right)$$

se F è compl. molt.

$$= \prod_p \left(\frac{1}{1 - \frac{F(p)}{p^s}}\right)$$

Esercizi ① Calcolare / interpretare

$$\sum \frac{\varphi(n)}{n^s}$$

② Definiamo ricorsivamente $a_n \in \mathbb{Z}$ con la formula $\sum_{d|n} a_d = 2^n$. Allora $n \mid a_n$

Per casa

(3) Sia a_n una successione crescente di naturali con $b_n = a_{n+1} - a_n$ debolmente crescente.

Sappiamo che $\forall i \neq j$, a_i e a_j sono coprimi.

Dimostrare che $\sum \frac{1}{a_n}$ converge.

(4) $\boxed{M19}$ Problems in Elementary Number theory (PEN).

a_n è definita da $a_1 = 1$ $a_2 = K \geq 2$, poi a_n è il più piccolo intero positivo diverso da $a_1 \dots a_{n-1}$ e non coprimo con a_{n-1}.

Tesi Tutti gli interi positivi prima o poi compaiono.

---

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{p-1}{p^s} + \frac{(p-1)p}{p^{2s}} + \dots\right) =$$

$$= \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{p-1}{p^s}\left(1 + \frac{p}{p^s} + \frac{p^2}{p^{2s}} + \dots\right)\right)$$

$$= \prod_{p \text{ primo}} \left(1 + \frac{p-1}{p^s}\left(\frac{1}{1 - p^{1-s}}\right)\right)$$

$$\sum_{d \mid n} \varphi(d) = n \qquad \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right)}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right) \underbrace{\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}}\right)}_{\zeta(s-1)}$$

$$\varphi(n) = \sum_{d \mid n} d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

---

2 $\quad 2^n = \sum_{d \mid n} a_d \cdot 1 \qquad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^s}\right)$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^s}\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right)$$

$a_n = \sum_{d \mid n} 2^d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)$ è un multiplo di n

$n = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$. Ragioniamo un primo alla volta

$\boxed{\text{Se } \alpha \geq 1}$

$2^\alpha \mid a_n$. Infatti gli addendi interessanti

sono quelli con $\frac{n}{d}$ libero da quadrati

$\rightsquigarrow 2^{\alpha-1} \mid d \rightsquigarrow d \geq 2^{\alpha-1} \qquad 2^d > 2^{\alpha-1}$

e quindi ogni addendo è multiplo di 2^α.

$\boxed{p_i^{\alpha_i}} \qquad a_n = \sum_{\substack{e \mid n \\ e \text{ lib. da quadrati}}} \mu(e) \cdot 2^{n/e} =$

$e \mid 2 \cdot p_1 \cdots p_k$

$$= \sum_{e \mid 2 \cdot p_1 \cdots \widehat{p_i} \cdots p_k} \mu(e) \left[2^{n/e} - 2^{n/e \cdot p_i} \right]$$

$$2^{n/e} - 2^{n/e \cdot p_i} = \underbrace{2^{n/e \cdot p_i} \left(2^{\frac{n}{e \cdot p_i}(p_i - 1)} - 1 \right)}_{\text{è un multiplo di } p_i^{\alpha_i}}$$

$\varphi(p_i^{\alpha_i}) = (p-1) \cdot p_i^{\alpha_i - 1}$ divide l'esponente.

Posso risolvere il problema anche con qualsiasi $b \geq 1$ al posto di 2

$$b^n = \sum_{d \mid n} a_d$$

(x CASA).

Uno potrebbe verificare a mano che definita $\mu(n) = \begin{cases} 0 & -- \\ 1 & - \\ -1 & - \end{cases}$ come sopra

Se $b_n := \sum_{d \mid n} a_d$ allora $a_n = \sum_{d \mid n} b_d \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right)$

Infatti $\sum_{d \mid n} b_d \, \mu\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d \mid n} \sum_{e \mid d} a_e \cdot \mu\left(\frac{n}{d}\right) =$

$$= \sum_{e \mid n} a_e \cdot \left[\sum_{d' \mid \frac{n}{e}} \mu\left(\frac{n}{d'}\right) \right] = a_n$$