Senior 2018 - P Advanced - Anér

Titolo nota 02/09/2018

Teorema (Van der Waerden, 1927)

Siano $r \geq 1$ un numero di colori e $K \geq 2$ una lunghezza. Esiste un numero naturale $N = W(r,k)$ con questa proprietà: supponiamo di colorare con r colori i numeri $\{1, \ldots, N\}$; allora esiste certamente una progressione aritmetica di lunghezza K monocromatica.

<u>OSS</u> Se colorare N naturali basta, anche colorarne $N+m$ basta.

<u>Domanda interessante</u> Capire qual è il minimo N con la proprietà sopra. DIFFICILE

LASCIAMO PERDERE

<u>Strategia</u> Vogliamo dim. che $\forall k, \forall r$ esiste $W(r,k)$. Introdurremo un numero $\overline{W}(r,k,h)$ che sarà un naturale (abb. grande) per cui vale una proprietà che dipende da $r \geq 1, k \geq 2, h \geq 1$. Dimostreremo che $\forall k, r, h$ esiste $\overline{W}(r,k,h)$. Poi sarà evidente che se esiste $\overline{W}(r,k,1)$ allora

esiste $W(r,k)$

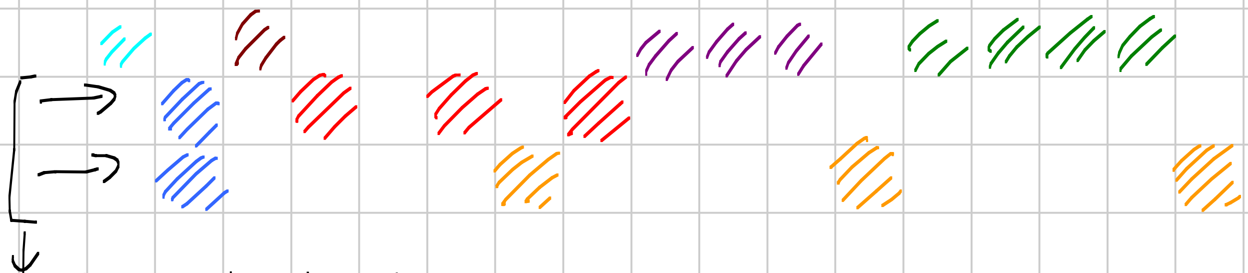
Per dim. che $\overline{W}(r,k,h)$ esiste usiamo un'induzione strana. Dim. per ind. su k e h congiuntamente la seguente prop.: "$\forall r \geq 1$ esiste $\overline{W}(r,k,h)$" $= P(k,h)$

P.B sarà $k = 2$ $h = 1$. Poi aumenteremo progressivamente h, e per induzione guadagneremo tutti i $\overline{W}(r,2,h)$. A questo punto se $\overline{W}(r,2,r+1)$ esiste, anche $\overline{W}(r,3,1)$ esiste. Parte una nuova ind. su h, guadagniamo i $\overline{W}(r,3,h)$.

$$\overline{W}(r,3,r+1) \rightsquigarrow \overline{W}(r,4,1).$$

Introduciamo la nozione di pettine di lunghezza k e taglia h: è una collezione di h progressioni aritmetiche, tutte di lunghezza $k+1$, con soltanto il primo elemento in comune, ognuna, tolto il primo elemento, è monocromatica, e le h successioni (amputate del primo el. comune) esibiscono tutti colori diversi.
Il primo elem. del pettine può avere colore qualsiasi

1 2 3 4 5 6 ....



pettine di lunghezza 3 e taglia 2

$\overline{W}(r,k,h)$ è un nat. abbastanza grande per cui esiste almeno uno tra ① un pettine di taglia h e lunghezza k o ② una progr. lunga $(k+1)$, per ogni r-colorazione.

<u>Lemma</u> Se esiste $\overline{W}(r,k,r+1)$, allora visto che con r colori non esistono pettini di taglia $r+1$, ① non può valere, quindi vale ②, quindi esiste $W(r,k+1)$. Per $\overline{W}(r,k+1,1)$ prendo $2 \cdot W(r,k+1)$ e cerco una progr. aritm. monocr. lunga $k+1$ nella seconda metà, poi aggiungete la radice

---

Fissiamo ora k, dimostriamo $P(k,h)$ per induzione su $h \geq 1$, assumendo il passo base (l'esistenza $\forall r$ di $\overline{W}(r,k,1)$ e anche di $W(r,k)$, che come visto deriva da casi precedenti in k).

Il passo base base $k=2$: per una progr. aritm. lunga 2, basta colorare $r+1$ naturali. Per un pettine di taglia $h=1$ e lunghezza $k=2$ bastano $2r+1$ naturali

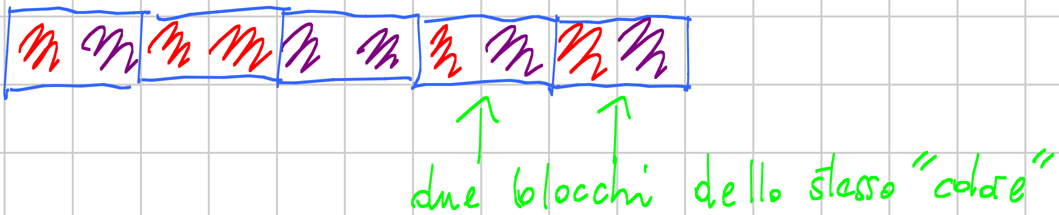
<u>Passo induttivo</u> $h \rightsquigarrow h+1$. Supponiamo che $\forall r$ esiste $\overline{W}(r,k,h)$. Vogliamo dim. che esiste $\overline{W}(\overline{r},k,h+1)$ per un qualsiasi certo $\overline{r}$.

Prendiamo N un multiplo opportuno di $\overline{W}(\bar{r}, K, h)$

$N = M \cdot \overline{W}(\bar{r}, k, h)$; dividiamo i numeri $\{1, \dots, N\}$ in M blocchi da $\overline{W}(\bar{r}, k, h)$. Se coloriamo con $\bar{r}$ colori $\{1, \dots, N\}$, ogni blocco esibisce una stringa di $\overline{W}(\bar{r}, k, h)$ colori. Ci sono $\underbrace{\bar{r}^{\,\overline{W}(\bar{r}, k, h)}}_{=\, r'}$ possibili stringhe.

<u>Esempio</u> (per capire) $\quad \overline{W}(\bar{r}, k, h) = 2 \qquad \bar{r} = 2$

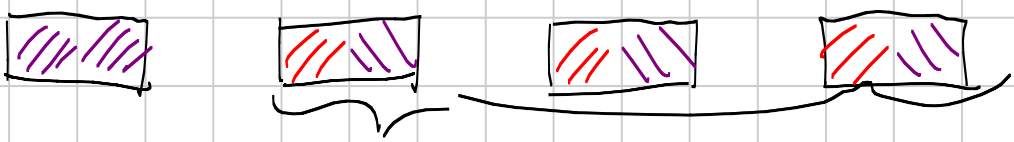
$M = 5 \qquad N = M \cdot \overline{W}(\bar{r}, k, h) = 10$



Il nostro scopo è trovare una progr. aritmetica di pettini tutti uguali

$M = \overline{W}(r', K, 1)$ (esiste perché il caso $h = 1$ è già stato conquistato)

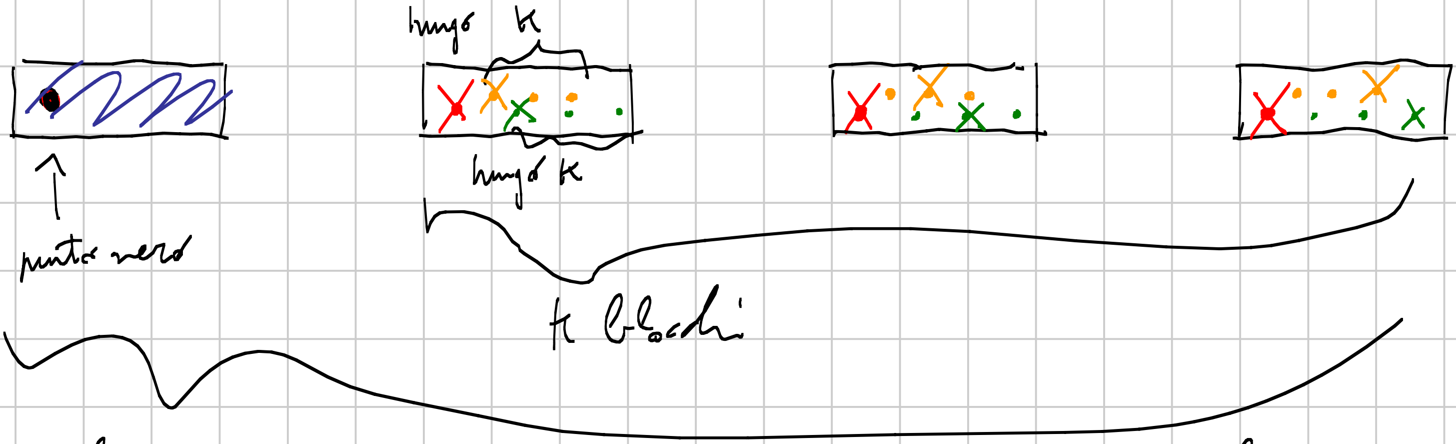
Allora comunque coloro $N = M \cdot \overline{W}(\bar{r}, k, h)$ con $\bar{r}$ colori, ci sarà un pettine di taglia 1 e lunghezza K, fatto di $K+1$ blocchi, con gli ultimi K blocchi colorati allo stesso modo.



Ogni blocco di questi K contiene un pettine

(lo stesso pettine!) di taglia h e lungh. k
(supponendo di non essere così fortunati da aver già trovato una progr. lunga $k+1$).

In part. supponiamo che la radice del pettine abbia un colore diverso dai denti



ho trovato un pettine di lunghezza k e taglia $h+1$
(se sono fortunato, il pto nero è in realtà di uno degli $h+1$ colori, quindi ho una progressione lunga $k+1$). $\square$

Determinare il min $W(r,k)$ è difficile

Gowers ha dim. che

$$\text{il minimo } W(r,k) \leq 2^{2^{r^{2^{2^{k+9}}}}}$$

Se colorate $\{1, \dots N\}$ con r colori, ci sono $\frac{1}{r}N$ numeri dello stesso colore, dove $\frac{1}{r}$ è un reale $\in [0,1]$

Teo (Szemerédi, 1975)

Fissato $\varepsilon \in (0,1]$, fissato K, esiste $N = S(\varepsilon, K)$ abb. grande per cui comunque scegliete almeno $\varepsilon \cdot N$ elementi di $\{1, \dots, N\}$, questi contengono una progressione aritmetica lunga K.

Ovviamente Szemerédi $\Rightarrow$ Van der Waerden.

Congettura (Erdős) Prendete un sottoinsieme infinito dei numeri interi positivi $A \subseteq \mathbb{N}_0$, e supponete che $\sum_{a \in A} \frac{1}{a} = +\infty$ (es. se $A = \mathbb{N}_0$, se $A =$ numeri primi)

Allora è vero che A contiene progr. aritm. lunghe K per ogni $K \geq 2$?

DIM che Erdős $\rightarrow$ Szemerédi

Teo (Green-Tao, 2004) All'interno dei numeri primi esistono progr. aritm. lunghe K per ogni $K \geq 2$.

Anche Erdős $\rightarrow$ Green-Tao ...