A1 basic - Polinomi & Complessi

Titolo nota 04/09/2018

Numeri complessi

$$\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$$

Regole $i^2 = -1$

Es: $(3+i) - (1-2i) = 2+3i$

Es: $(1-i)(2+3i) = 2+3i-2i-3i^2 = 2+3-2i+3i =$
$= 5+i$

$z = a+ib \qquad \bar{z} = a-ib \qquad$ CONIUGIO

$z+\bar{z} = 2a \rightsquigarrow \dfrac{z+\bar{z}}{2} = a \leftarrow$ Parte reale

$z-\bar{z} = 2ib \rightsquigarrow \dfrac{z-\bar{z}}{2i} = b \leftarrow$ Parte immaginaria.

$<, >, \leq, \geq$ si usano con i reali, non con i complessi

$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2+b^2 \geq 0$$

$\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ MODULO di z

$$|z\cdot w| = \sqrt{zw\,(\overline{zw})} = \sqrt{zw\,\bar{z}\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}\,w\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}}\cdot\sqrt{w\bar{w}} = |z||w|$$

$z = a+ib \qquad w = c+id$

$|z|^2 = a^2+b^2 \qquad |w|^2 = c^2+d^2$

$$|z|^2|w|^2 = |zw|^2$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2+(ad+bc)^2$$

$zw = ac-bd+i(ad+bc)$

Identità di SOPHIE-GERMAIN

Es: $X = \{ a + i\sqrt{3}\, b \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$

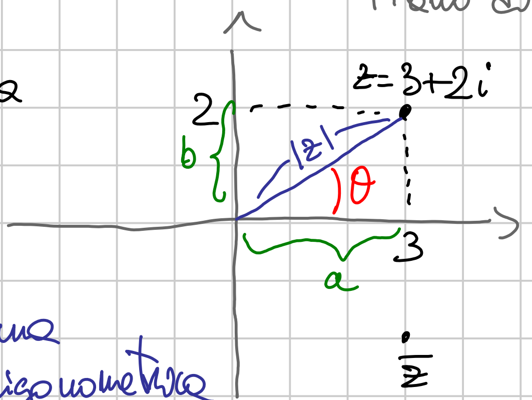
$$(a+ib\sqrt{3})(c+id\sqrt{3}) = ac - 3bd + i\sqrt{3}(bc+ad)$$

$$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2) = (ac-3bd)^2 + 3(bc+ad)^2$$

Oss: $$\frac{2+3i}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{(2+3i)(3+i)}{9+1} = \frac{(6-3)+i(2+9)}{10} = \frac{3}{10} + i\frac{11}{10}$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\underbrace{z\bar{z}}_{=0 \text{ se e solo se } z=0}}$$

Piano di GAUSS



$a+ib \to$ forma cartesiana

$a = |z|\cos\theta$

$b = |z|\sin\theta$

$a+ib = \rho(\cos\theta + i \sin\theta)$ ← forma trigonometrica (polare)

$\rho = |z|$

θ t.c. $\begin{cases} \dfrac{a}{|z|} = \cos\theta \\ \dfrac{b}{|z|} = \sin\theta \end{cases}$

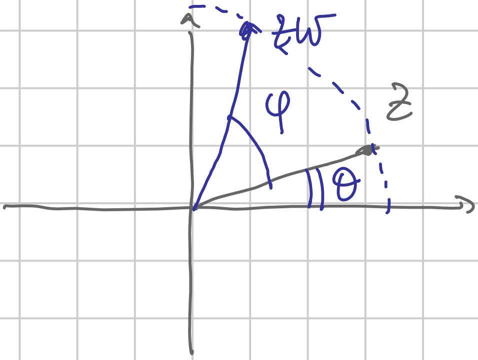
ρ – modulo

θ – ARGOMENTO

$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ $\quad w = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$zw = \rho R(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi))$

Oss: Se $|w| = 1$, allora $z \mapsto z \cdot w$ è una rotazione attorno a 0 che ha come angolo l'argomento di w

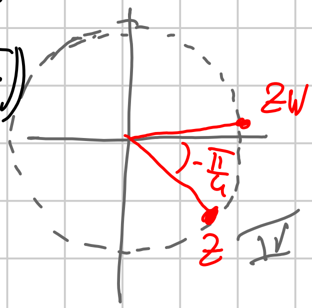


Es: $z = 2 - 2i$

$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$w = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$



$zw = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \bar{z} = \rho(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= \rho(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\rho(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$

Forma esponenziale $\quad z = \rho e^{i\theta}$ se $|z| = \rho$ e $\underbrace{\arg}_{\text{argomento di } z}(z) = \theta$

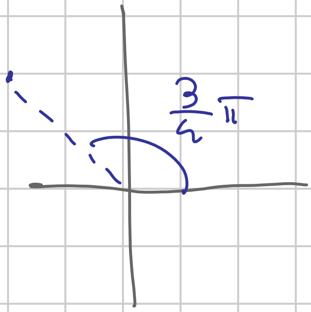
$$\bar{z} = \rho e^{-i\theta} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Oss:

$1 = 1 \cdot e^{i0}$

$-1 = 1 e^{i\pi}$

$-1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$



Potenze: $\quad z = \rho e^{i\theta} \qquad z^n = \rho^n e^{in\theta} \qquad n \geq 0$

1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

$$\cos(7x) = \mathrm{Re}\left((\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)^7\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\Big((\cos x)^7 + 7(\cos x)^6\, i\,\mathrm{sen}\,x - 21(\cos x)^5 \sin^2 x - i\,35 \cos^4 x\,\mathrm{sen}^3 x +$$

$$+ 35\cos^3 x \sin^4 x + i\,21 \cos^2 x \sin^5 x - 7\cos x \sin^6 x - i \sin^7 x\Big) =$$

$$= \cos^7 x - 21\cos^5 x \sin^2 x + 35\cos^3 x \sin^4 x - 7\cos x \sin^6 x$$

Radici n-esime

$$z = w^n \qquad \boxed{z = \rho e^{i\theta}} \qquad w = Re^{i\varphi} \rightsquigarrow \boxed{w^n = R^n e^{in\varphi}}$$

$\Uparrow$

$$\Downarrow$$

$\rho = R^n$ come reali ≥ 0 $\longrightarrow$ $R = \sqrt[n]{\rho}$

$\theta = n\varphi$ come angolo $\longrightarrow$ $\theta + 2k\pi = n\varphi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

$k = 0, 1, 2, \dots, n-1$

$$\boxed{\text{radici } n\text{-esime di } z \quad \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \quad k = 0, 1, \dots, n-1}$$

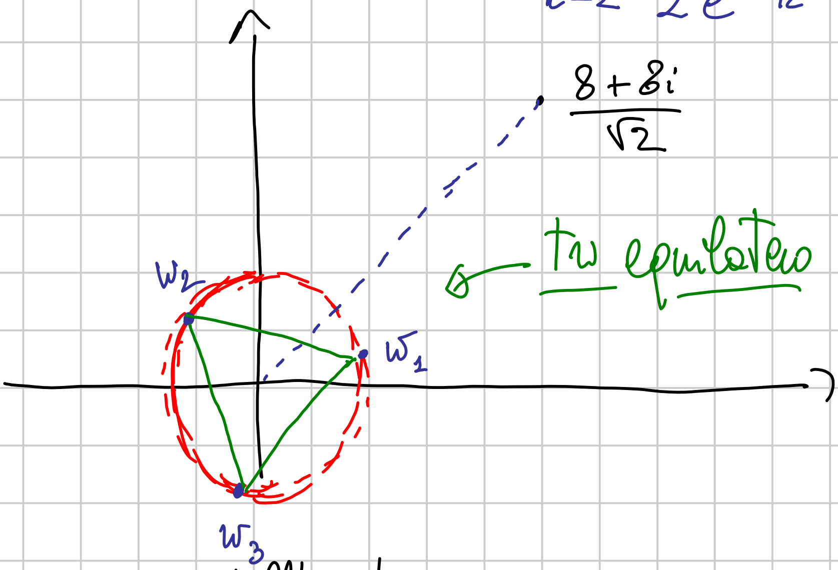
Es: $z = \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}}i$ $\quad \sqrt[3]{z} = ?$ $\quad n = 3$

$z = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$

$k=0 \quad 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ $\quad w_1$

$k=1 \quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi\right)} = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = w_2$

$k=2 \quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi\right)} = 2e^{i\frac{17}{12}\pi} = w_3$



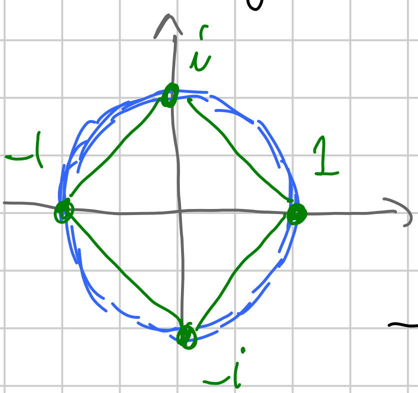
Le radici n-esime di un numero complesso sono i vertici di un poligono regolare con centro l'origine

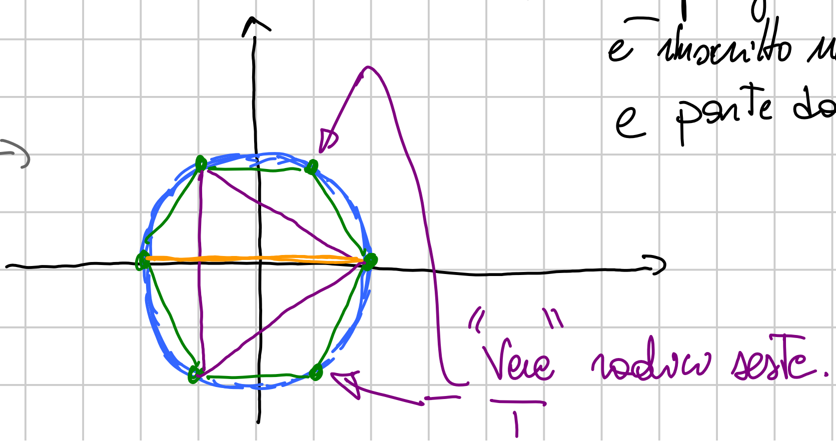
Radici dell'unità

Voglio risolvere $z^n = 1$

1 ha modulo 1
argomento 0

$\Rightarrow$ il poligono delle radici è inscritto nella cf. unitaria e parte da 1.





ξ radice n-esima

Radici primitive di 1

$$(\xi^k)^n = (\xi^n)^k = 1^k = 1$$

$$\xi^k = \xi^h \qquad \xi^{k-h} = 1$$

$$k > h$$

Polinomi $\quad a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = p(x)$

polinomio $\quad a_0, a_1, \dots, a_d$ coeff. del polinomio

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$\mathbb{Z}[x]$ = polinomi a coeff. interi

$\cap$

$\mathbb{Q}[x]$

$\cap$

$\mathbb{R}[x]$

$\cap$

$\mathbb{C}[x]$

$\deg p(x)$ = il massimo $d \geq 0$ per cui $a_d \neq 0$

se $p(x)$ non è la costante 0

deg di zero = non def / "$-\infty$"

$$\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

$$\deg(p(x) + q(x)) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\}$$

$p(x)$ si dice MONICO se $a_d = 1$

Teo (divisione euclidea) $a(x), b(x)$ polinomi in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$

allora $\exists\, q(x), r(x)$ nello stesso insieme tali che

$$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\deg r(x) < \deg b(x)$$

Es:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+2x^2+1 & x^2+3 \\ \hline
-x^5-3x^3 & \boxed{x^3-3x+2} \text{ quoziente} \\ \hline
-3x^3+2x^2+1 & \\
3x^3+9x & \\ \hline
2x^2+9x+1 & \\
-2x^2-6 & \\ \hline
\boxed{9x-5} \text{ resto} &
\end{array}
$$

$x^5+2x^2+1 : x^2+3$

$x^5 = x\cdot(x^2)^2 \longrightarrow x(-3)^2$

$2x^2 \longrightarrow 2(-3)$

$9x-6+1 = 9x-5$

$\Rightarrow$ Posso calcolare MCD di due polinomi con l'algoritmo di Euclide

$MCD(a(x), b(x)) = MCD(b(x), r(x))$

$a(x) = b(x)\cdot q(x) + r(x)$

(e vale il teo di Bezout: $MCD(a,b) = h(x)\cdot a(x) + k(x)\cdot b(x)$)

Se $r(x)$ è zero, si dice che $b(x)$ divide $a(x)$

Def: Un polinomio si dice <u>irriducibile</u> se non è divisibile per polinomi di grado minore, non costanti.

<u>Oss</u>: Essere irriducibile cambia a seconda dell'insieme dei coeff

- x^2-2 è irrid. in $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$ ma è riducibile in $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$
- x^2+2 è irrid in $\mathbb{Z}[x]$, $\mathbb{Q}[x]$, $\mathbb{R}[x]$ ma non in $\mathbb{C}[x]$

  $(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})$

<u>Teo di Ruffini</u>: $(x-a)$ divide $p(x)$ se e solo se $p(a)=0$

a si dice RADICE di $p(x)$

$\Rightarrow$ Un pol. di grado n ha al più n radici.

Principio di identità dei polinomi

$p(x), q(x)$ polinomi di grado $\leq n$. Se esistono $x_1, \dots, x_{n+1}$ valori t.c. $p(x_i) = q(x_i)$ $i = 1, \dots, n+1$, allora $p(x) = q(x)$.

Es: $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ t.c. $p(1) = 7$ $p(7) = 1$ $p(8) > 0$

Quanto vale al min. $p(8)$?

$$p(x) = 8 - x + (x-7)(x-1)q(x)$$

$$p(x) - (8-x) = (x-7)(x-1)q(x)$$

$$\Rightarrow q(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

Oss: $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$b(x)$ monico

$\Rightarrow a(x) = b(x)q(x) + r(x)$

con $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$p(8) = 0 + 1 \cdot 7 \cdot q(8) = 7 \cdot q(8) > 0 \quad \Rightarrow q(8) > 0$$

$\Rightarrow$ al minimo $q(8) = 1$ $\Rightarrow p(8) = 7$

$$p(x) = 8 - x + (x-7)(x-1)$$

Es: $p(x)$ monico di grado 20 t.c.

$$\boxed{p(1) = 2, \dots, p(20) = 40}$$

Trovare $p(x)$.

$$p(x) - 2x = (x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-20)$$

$$p(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-20) + 2x$$

Teo fondamentale dell'algebra

$p(x) \in \mathbb{C}[X]$, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ e $m_1, \dots, m_k$ interi positivi

t.c. $p(x) = A \cdot (x-\lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x-\lambda_k)^{m_k}$ $\quad A \in \mathbb{C}$.

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ radici di $p(x)$

$m_1, \dots, m_k$ molteplicità delle radici

— • —

$$p(x) = a_d (x-\lambda_1) \cdot \dots \cdot (x-\lambda_d) = a_d x^d - a_d x^{d-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) +$$
$$+ a_d x^{d-2}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_i\lambda_j + \dots)$$
$$- a_d x^{d-3}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \dots \text{ tutti i prod. a 3 a 3})$$

$$\parallel$$
$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

$$(-1)^k \frac{a_{d-k}}{a_d} = \text{somma dei prodotti a } k \text{ a } k \text{ delle radici}$$

Formule di Viete

Es: $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 = S \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3 = Q \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -4 = P \end{cases}$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = S^2 - 2Q$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \frac{Q}{P}$$

Polinomi a coeff. interi

1) Se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$ allora lo è in $\mathbb{Z}[x]$

2) $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow p(a) \in \mathbb{Z}$

Es: $p(x) = \frac{x(x-1)}{2}$

3) $p(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

se $\frac{m}{n}$ è radice di $p(x)$ allora $m \mid a_0$, $n \mid a_d$
$(m, n) = 1$

4) $p(x)$ coeff. interi, $a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $a-b$ divide $p(a)-p(b)$ (come interi)

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$p(x) = c_d x^d + \dots + c_0$$

$$p(a) - p(b) = c_d \underbrace{(a^d - b^d)}_{} + c_{d-1} \underbrace{(a^{d-1} - b^{d-1})}_{} + \dots + c_1 \underbrace{(a-b)}_{}.$$

Es: 69, 71, 72, 73, 76, 77, 83

Problemi: 7, 10, 11, Quanto vale il prodotto di tutti i lati e tutte le diagonali di un poligono regolare di n lati inscritto nella cfr. unitaria?

69) $\_\_\_ \cdot \_\_\_$

$$\lambda = e^{i\frac{2\pi}{1024}}$$

$$(x-1)(1 + x + \dots + x^{1023}) = x^{1024} - 1$$

$$\parallel$$

$$\underbrace{(x-\lambda)(x-\lambda^2) \cdot \dots \cdot (x - \lambda^{1023})}(x-1)$$

$$\lambda^{512} = e^{i\frac{2 \cdot 512\pi}{1024}} = e^{i\pi} = -1$$

$$(x-\lambda)(x-\bar\lambda) = x^2 - \underbrace{(\lambda+\bar\lambda)}_{\in\,\mathbb{R}}x + \underbrace{\lambda\bar\lambda}_{\in\,\mathbb{R}}$$

$$\lambda = e^{i\frac{2\pi}{1024}}$$

$$\overline{\lambda^k} = \lambda^{-k} = e^{-i\frac{2k\pi}{1024}} \left(= \frac{1}{\lambda^k} \right)$$

$\bar z = \frac{1}{z}$ se e solo se $|z|=1$

$$(x-\lambda^k)(x-\lambda^{-k}) = x^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{1024}\right)x + 1$$

$$(x+1)\left(x^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{1024}\right)x+1\right)\left(x^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{1024}\right)x+1\right)\cdot$$
$$\cdots\left(x^2-2\cos\left(\frac{2\cdot 511\,\pi}{1024}\right)x+1\right)$$

$\boxed{71}$ $\quad x^3-2x^2-3x-4 \qquad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = ?$

$x^3 = 2x^2+3x+4$ se $x=\alpha,\beta,\gamma$

$$x^4 = 2x^3+3x^2+4x = 4x^2+3x^2+6x+4x+8 = 7x^2+10x+8$$

$$2x^3 = 4x^2+6x+8$$

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = 7(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+10(\alpha+\beta+\gamma)+8 =$$
$$= 7(2^2+6)+10(2)+8$$

$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sono radici di $p(x)$ e $\deg p(x) = n$

allora $\frac{1}{\alpha_1},\dots,\frac{1}{\alpha_n}$ sono radici $x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n \cdot p\left(\frac{1}{1/\alpha_1}\right) = \frac{1}{\alpha_1^n}\, p(\alpha_1) = 0$$

Es: $p(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x - 1$

$$q(x) = x^4 p\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x} - 1\right)x^4 = 3 + 5x + 2x^3 - x^4$$

$\boxed{73}$

$\underbrace{a-2}$ divide $p(a) - p(2) = a + 2 - a = \underbrace{2}$

$\Rightarrow a - 2 = \pm 1, \pm 2$

$a = 3$
$a = 4$
$a = 1$
$a = 0$

$p(2) = a$

$p(x) - a = (x-2)\, q(x)$

$p(a) - a = (a-2)\, q(a)$

$\parallel$

$a+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = (a-2)\, q(a)$

$$p(x) = (x-2)\left(\frac{2}{a-2}\right) + a$$

76]

$p(x)$ = membro dx

$p(a) = p(b) = p(c) = 1$

poiché $\deg p(x) \leq 2$

allora $p(x)$ coincide con 1

$\Rightarrow$ FINE.

Es: trovare $p(x)$ t.c. $p(a) = 18 \quad p(b) = -11 \quad p(c) = \sqrt{3}$

$\deg p(x) \leq 2$.

$$\varphi_a(x) = \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} \qquad \varphi_b(x) = \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} \qquad \varphi_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$18\, \varphi_a(x) - 11\, \varphi_b(x) + \sqrt{3}\, \varphi_c(x) = p(x)$$

$\boxed{77}$ $p(n+1)-p(n)=(n+1)^5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$p(x+1)-p(x)=(x+1)^5$

$\Downarrow$

$x=-1$

Problemi: 10) $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad P(0), P(13)$ dispari

Quante radici intere può avere $P(x)$?

Sia $n \in \mathbb{Z}$ una radice intera $\Longrightarrow P(n)=0$.

$n-0$ divide $P(n)-P(0)$ $\leftarrow$ DISPARI

$n-13$ divide $P(n)-P(13)$ $\leftarrow$ DISPARI

$\Longrightarrow$ n e $n-13$ sono dispari, impossibile $\Longrightarrow$ niente radici intere

7) $$\sum_{n=0}^{k} \prod_{\substack{j=0\\ j\neq n}}^{k} \frac{(x-j)}{n-j} 2^j = p(x)$$

Esiste $p(x)$ t.c. $p(k)=2^k \ \forall k \in \mathbb{N}$?

Se esistesse, allora $p(n+1)=2p(n) \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow p(x+1)=2p(x)$ come polinomi

$p(x)=a_d x^d+\dots+a_1 x+a_0$

$p(x+1)=a_d(x+1)^d+\dots+a_1(x+1)+a_0=a_d x^d+\dots$

$2p(x)=2a_d x^d+\dots$

$\Rightarrow a_d = 2a_d \Rightarrow a_d = 0.$

$\Rightarrow$ $p(x)$ è zero. Assurdo.

$\boxed{\text{Extra}}$ Poligono $\longrightarrow$ raggio di 1

$$\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}} \qquad 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$$

$$|1-\xi|\cdot|1-\xi^2|\cdots|1-\xi^{n-1}| = |(1-\xi)(1-\xi^2)\cdots(1-\xi^{n-1})|$$

$$p(x) = (x-\xi)\cdots(x-\xi^{n-1})$$

$$(x-1)p(x) = x^n - 1 \qquad p(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$$

$$|p(1)| = \qquad p(1) = n$$

$$n^{n/2}$$

11) $p(z)$ $\quad \lambda_1, \dots, \lambda_{2002}$

$$P_1(z) = z - a_1$$
$$P_2(z) = P_1^2 - a_2$$
$$\vdots$$
$$P_{2002}(z) = P_{2001}^2(z) - a_{2002}$$

Vedere che $p(z)$ divide $P_{2002}(z)$ $\Longleftrightarrow$ $\lambda_1, \dots, \lambda_{2002}$ sono radici di $P_{2002}(z)$

$$P_{2001}(\lambda_j)^2 - a_{2002} = 0$$

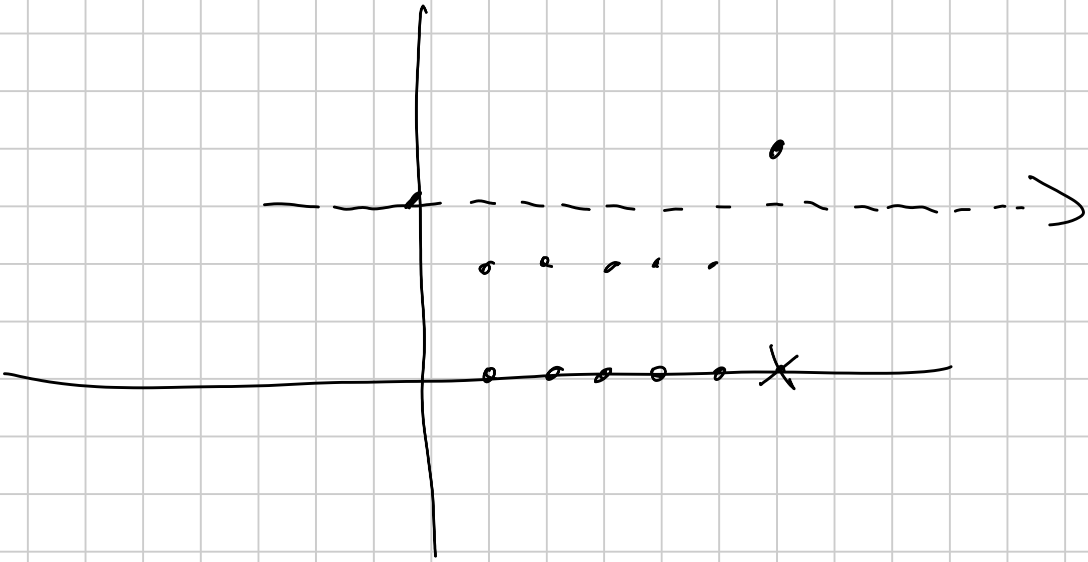
$$P_{2001}(\lambda_j) = c \quad j = 1, \dots, 2001 \qquad a_{2002} = -c^2$$

$$P_{2001}(\lambda_{2002}) = -c$$

$$p_{2001}(z) = p_{2000}(z)^2 - a_{2001}$$

se $p_{2000}(\lambda_1)^2 = p_{2000}(\lambda_2)^2 = \dots = p_{2000}(\lambda_{2001})^2$

allora scelgo $a_{2001} = \dfrac{p_{2000}(\lambda_1)^2 + p_{2000}(\lambda_{2002})^2}{2}$



Polinomio ciclotomico

Polinomio le cui radici sono le radici primitive n-esime di 1.