- successioni
- funzioni

$$a_n = \underbrace{2n^2+3n+1}$$

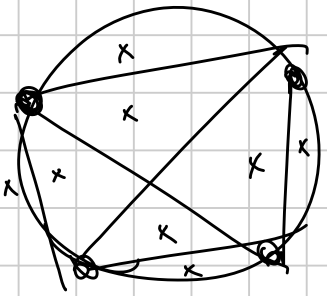
a_n = il numero di lettere "e" che servono per scrivere n in lettere

$a_0 = 1$
$a_1 = 0$
$a_2 = 1$

$a_{23} = 2$

1, 2, 4, 8, 16, 32 ... →
$$\begin{cases} a_n = 2^n & \text{per } n \leq 1000 \\ a_n = 0 & \text{per } n \geq 1001 \end{cases}$$

QUALUNQUE REGOLA



1, 2, 4, 8, 16, 31

a_n = "somma dei numeri da 1 a n"

1	2	3	4	...	n	→ a_n
n	n-1	n-2	-	...	1	→ a_n

$2a_n$

n colonne ognuna con somma n+1

$$b_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$b_n \sum_{k=1}^{n} k^2$$

somma telescopica:

IDEA:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 =$$

$$= (\cancel{2}^3 - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + \dots + (\cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3}) + (n+1)^3 - \cancel{n^3}$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^{n} \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1 - \cancel{k^3} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 3 b_n + 3\frac{(n+1)n}{2} + n$$

Conto... $b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Allo stesso modo,

$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4$ mi consente di calcolare $\sum_{k=1}^{n} k^3$

(a patto di sapere già $\sum_{k=1}^{n} k^2$)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Prog. aritmetica

$X_0 = b \quad X_1 = a+b \quad X_2 = 2a+b, \ \dots \quad X_n = na+b$

$$\begin{cases} X_0 = b \\ X_{k+1} = X_k + a \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

$X_0 + X_1 + \dots + X_n = ??$ Stesso trucco di $1..n$

$$\begin{matrix} b & a+b & 2a+b & \dots & na+b \\ na+b & (n-1)a+b & (n-2)a+b & \dots & b \end{matrix}$$

$$\sum_{k=0}^{n} ka+b = a\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = a\frac{n(n+1)}{2} + b(n+1)$$

Prog. geometriche:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$$\begin{cases} X_0 = K \\ X_{n+1} = aX_n + b \quad n=0,1,2,\dots \end{cases} \quad \text{es:} \quad \begin{cases} X_0 = 37 \\ X_{n+1} = 2X_n + 1 \quad n=0,1,2\dots \end{cases}$$

Dipendenza del termine precedente.

Formule chiuse?

Caso facile: $b=0$

$$\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_{n+1} = a\,x_n \qquad n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

FORMULA CHIUSA: $x_n = x_0 \cdot a^n$

Caso speciale:

$$\text{(ii)} \begin{cases} x_0 = 37 \\ x_{n+1} = 2\,x_n + 1 \qquad n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

Trucco: $y_n := x_n + c$

$x_n = y_n - c \qquad n=0,1,2,\dots$

(ii) $y_{n+1} - \cancel{c} = 2(y_n - c) + 1 = 2y_n \cancel{- 2c + 1}$

si semplificano se

$-c = -2c + 1$

$c = 1$

$$y_{n+1} = 2y_n$$

$\boxed{\text{se } c=1}$

$y_n := x_n + 1$

$$\begin{cases} y_0 = 38 \\ y_{n+1} = 2y_n \quad n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

$\Rightarrow y_n = 38 \cdot 2^n \qquad x_n = 38 \cdot 2^n - 1$

Questo trucco funziona sempre per $\begin{cases} x_0 = k \\ x_{n+1} = a x_n + b \end{cases}$

a patto che $a \neq 1$

Formula: $x_{n+1} = a x_n + b \quad n=0,1,\dots \Leftrightarrow x_n = a^n x_0 + b\,\dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ $\boxed{\text{se } a \neq 1}$

omogenea — termine noto — soluzione delle ricorrenze omogenee — sol. particolare di $x_{n+1} = ax_n + b$

$$\begin{cases} x_0 = k & \text{(i)} \\ x_1 = h & \text{(ii)} \\ x_{n+1} = a x_n + b x_{n-1} + c & \text{(iii)} \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

servono due valori iniziali!

Idea: trascuro (i) e (ii) per ora, e cerco succ. che risolvono (iii)

ES:
$$\begin{cases} \dots \\ \dots \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{(iii)} \end{cases}$$

Ha soluzioni:

- $y_0 = y_1 = y_2 = \dots = y_n = \dots = 1$

  $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n$ ✓ per ogni n

- $z_0 = 1 \quad z_1 = 3 \quad z_2 = 3^2, \dots \quad z_n = 3^n$

soddisfa (iii)? $\quad \cancel{3}^{n+2} \overset{?}{=} 4 \cdot \cancel{3}^{n+1} - 3 \cdot \cancel{3}^{n} \qquad 3^2 \overset{?}{=} 4 \cdot 3 - 3$

- se $\{y_k\}, \{z_k\}$ soddisfano (iii), allora anche $u_k = \lambda y_k + \mu z_k$ soddisfa:

verifica: $\quad u_{k+2} = 4u_{k+1} - 3u_k \iff$

$$\cancel{\lambda y_{k+2}} + \cancel{\mu z_{k+2}} \overset{?}{=} 4\left(\cancel{\lambda y_{k+1}} + \cancel{\mu z_{k+1}}\right) - 3\left(\cancel{\lambda y_k} + \cancel{\mu z_k}\right) \qquad ✓$$

$$u_n = 57 \cdot \underset{\sim}{3^n} + 27{,}5 \cdot \underset{\sim}{1}$$

Se ho anche cond. iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_1 = 7 \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

C'è una u_n che soddisfa queste condiz. iniziali?

$$x_n = u_n = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 3^n \qquad \begin{cases} x_0 = \boxed{\lambda + \mu \cdot 1} \\ x_1 = \boxed{\lambda + \mu \cdot 3} \end{cases}$$

Riesco sempre a trovare dei λ, μ che soddisfano (è un sist. lineare)

Questa strategia funziona sempre!

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_1 \text{ dato} \\ x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$y_n = \alpha^n$ è soluzione di (iii)

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^{\cancel{n}+2} = a \cdot \alpha^{\cancel{n}+1} + b \cdot \alpha^{\cancel{n}} \Leftrightarrow \alpha^2 = a\alpha + b$$

È un'equaz. di 2° grado in α, avrà due soluzioni α_1, α_2
(supponiamo che ce le abbia e che siano distinte) (*)

- $y_n = \alpha_1^n \qquad z_n = \alpha_2^n$ soddisfano (iii)

$u_n = \lambda \alpha_1^n + \mu \alpha_2^n$ soddisfano (iii) per ogni scelta di λ, μ

Per trovare la successione con i val. iniziali assegnati risolvo
$$\begin{cases} x_0 = u_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = u_1 = \lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 \end{cases}$$

Questo produce una successione $u_n = \lambda \alpha_1^n + \mu \alpha_2^n$ che soddisfa
$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_1 = x_1 \\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \end{cases}$$

(se volete, potete dimostrare per induzione che due successioni che soddisfano (i) (ii) (iii) sono uguali)

ES: Fibonacci

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \qquad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \iff \alpha^2 = \alpha + 1 \qquad \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1 \\ 1 = \lambda \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -\lambda \\ 1 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \lambda \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Formula chiusa per Fibonacci:

$$X_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$X_0=0 \quad X_1=1$
$X_2=1 \quad X_2=2$
$X_3=3, \dots$

(*): cosa succede se $\alpha^2 = a\alpha + b$ non ha soluzioni reali? Uso le soluzioni complesse!

Cosa succede se ho due soluzioni coincidenti?

Prendo $\quad y_n = \alpha_1^n \quad z_n = n\alpha_1^n$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + 0\cdot\mu \\ x_1 = \lambda\alpha + \mu\alpha \end{cases}$$

Cosa succede se ho $X_{n+2} = aX_{n+1} + bX_n + cX_{n-1} + dX_{n-2}$?

equazione di IV grado, se la so risolvere posso fare le stesse cose: $\quad u_n = \lambda\alpha_1^n + \mu\alpha_2^n + \nu\alpha_3^n + \xi\alpha_4^n$

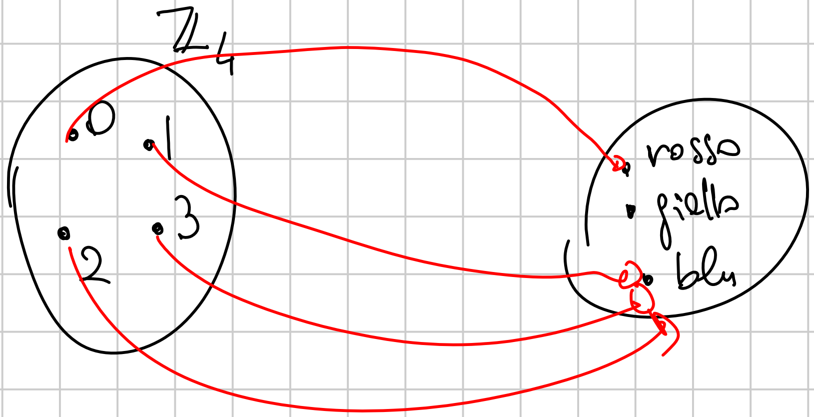
e risolvo un sist. con le 4 cond. iniziali

Se ho sol. multiple, prendo $\alpha_1, n\alpha_1, n^2\alpha_1, \dots n^{k-1}\alpha_1$

EQUAZIONI FUNZIONALI

Cos'è una funzione?

Una regola univoca per assegnare a un elemento di un insieme uno di un altro:



$f(0) = \text{rosso}$
$f(1) = \text{blu}$
$f(2) = \text{blu}$
$f(3) = \text{blu}$

$$f : \underbrace{\mathbb{Z}_4}_{\text{DOMINIO}} \to \underbrace{\{\text{rosso, giallo, blu}\}}_{\text{CODOMINIO}}$$

(0, rosso)
(1, blu)
(2, blu)
(3, blu)

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dev'essere definita per ogni elemento di $\mathbb{R}$

$f(x) = 1/x$ non è una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$

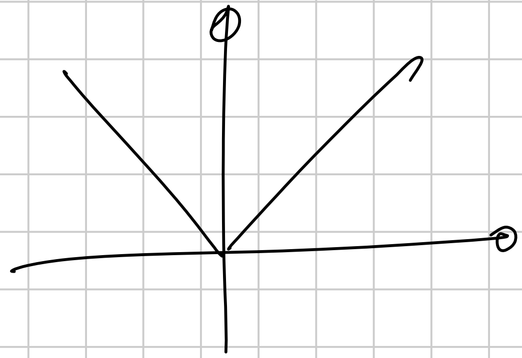
se vuoi, è una funzione da $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

IMMAGINE: insieme degli elementi del codominio che "vengono raggiunti".

$$Im(f) = \{ y \in \text{codominio} : \text{esiste } x \text{ con } y = f(x) \}$$

ES: l'immagine della funz. sopra è $\{\text{rosso, blu}\}$

funzioni $\neq$ formule

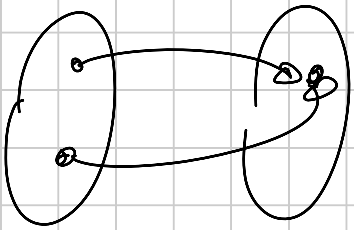


es: $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

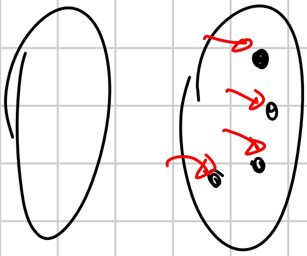
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

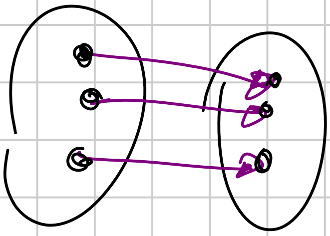
f iniettiva se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$



f suriettiva se per ogni $z \in$ codominio esiste $x \in$ dominio t.c. $f(x) = z$

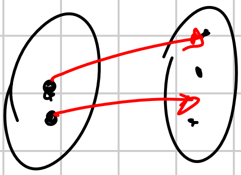


iniettiva + suriettiva = bigettiva
biiettiva



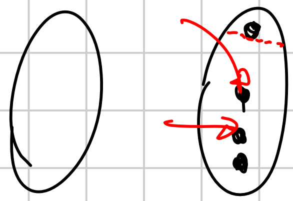
Oss: se A, B insiemi con un # finito di elementi, esiste $f: A \to B$ iniettiva se e solo se

$$|A| \leq |B|$$



suriettiva se e solo se $|A| \geq |B|$

biiettiva sse $|A| = |B|$



---

composizione: dati $g: A \to B$ $f: B \to C$

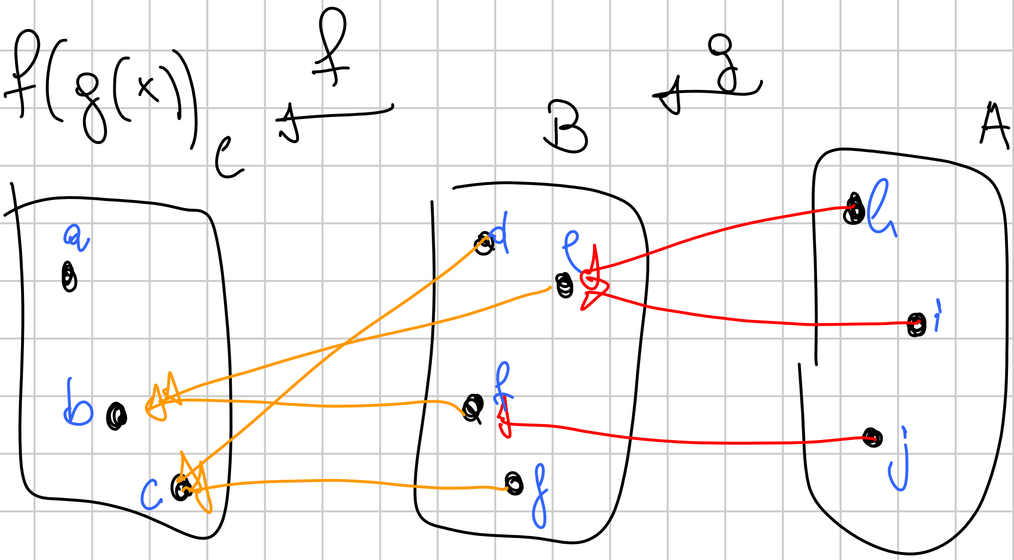
$f \circ g : A \to C$ $x \in A$

$$f(g(x))$$

Teo: se $f \circ g$ è iniettiva, allora g iniettiva

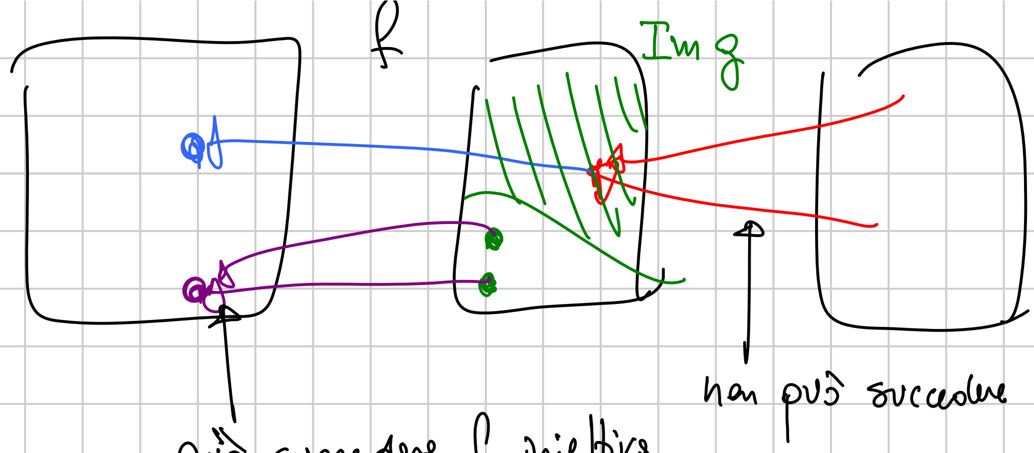
se $f \circ g$ è suriettiva, allora f suriettiva

Dim: $f(g(x))$



$\mathrm{Im}(f \circ g) = b$ $\mathrm{Im}(f) = \{b, c\}$

Dim: se $f \circ g$ iniettiva, "frecce non si congiungono mai" andando da dx a sx



EQ. FUNZIONALE:

"Trovare tutte le $f : A \to B$ che soddisfano una proprietà"

ad es. Trovare $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

che soddisfano

$$(*) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

ES: la funzione $z \mapsto 2z$ soddisfa l'equazione

la funzione $z \mapsto z^2$ non soddisfa

$$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

EQUAZIONE DI CAUCHY: Trova $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

t.c.

$$P(x,y): \quad \text{"} f(x+y) = f(x) + f(y) \text{"} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$P(0,0): \quad f(0+0) = f(0) + f(0)$$

vera se e solo se $\boxed{f(0) = 0}$

STEP 1: "conquisto $\mathbb{N}$": $f(n) = an$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per una certa costante $a \in \mathbb{Q}$

dim: $f(0) = 0$ ✓ Definisco $a = f(1) \in \mathbb{Q}$

$P(1,1)$: $f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a$ ✓

induzione: $f(0) = 0$ ✓ $f(1) = a$ ✓ P.B.

P.I. $n \to n+1$ $P(n,1)$: $f(n+1) = f(n) + f(1) = an + a =$
$= (n+1)a$ ✓

STEP 2: conquisto $\mathbb{Z}$: $f(n) = an$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$P(-n, n)$ per un certo $n \in \mathbb{N}$:

$$: \underbrace{f(-n+n)}_{\overset{\shortparallel}{f(0)=0}} = f(-n) + \underbrace{f(n)}_{\overset{\shortparallel}{an}}$$

$\rightsquigarrow f(-n) = -an$

STEP 3: per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$

$$f(nx) = n f(x)$$

Dim: induzione! (su n) $f(0) = 0$ ✓ $f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x)$ ✓ P.B.

P.I. $P(x, nx)$: $f(x+nx) = f(x) + \underbrace{f(nx)}_{\text{ip. ind.}}$

$$\Downarrow$$

$$f((n+1)x) = f(x) + nf(x) = (n+1)f(x)$$

STEP 4: conquisto $\mathbb{Q}$:

$f(x) = ax$ $\forall x \in \mathbb{Q}$, per una certa costante a

DIM: uso lo step 3 con $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$:

e $n = q$

$$ap \overset{\text{per lo step 2}}{=} f\left(\cancel{q} \cdot \frac{p}{\cancel{q}}\right) = q f(p/q) \quad \text{vera } \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(p/q) = a\, p/q \qquad \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

STEPS 1+2+3+4: se f soddisfa $P(x,y)$ $\forall x, y$, allora

$f(x) = ax$ per una qualche costante $a \in \mathbb{Q}$.

È vero che tutte le funzioni del tipo $f(x) = ax$ sono soluzioni, cioè soddisfano $P(x,y)$? ✓

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \rightarrow a(x+y) = ax + ay$$

Se avessi avuto quest'altro esercizio:

Trova $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c.

$P(x,y)$ $\quad f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$

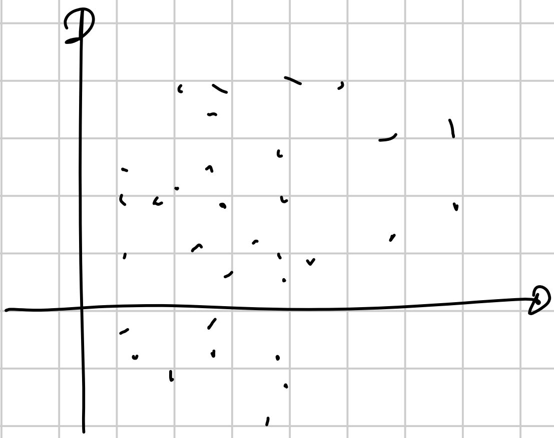
Le soluzioni sono le stesse?

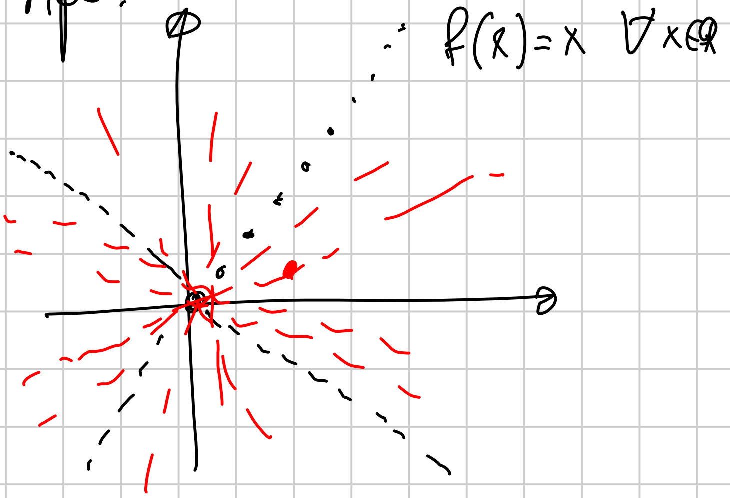
se $f(x)=ax \Rightarrow$, allora soddisfa $P(x,y)$

$$a(x+y)=ax+ay \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Però ci sono anche altre soluzioni che soddisfano $P(x,y)$

ma non sono di quel tipo!





$f(x)=-\frac{1}{2}x$ se $x/\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

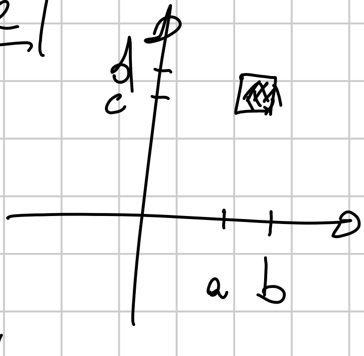
$P(x,y)$

$f(x+y)=f(x)+f(y)$ EQUAZIONE DI CAUCHY

Teo (cennone) CARATT. SOLUZ. EQ. DI CAUCHY

Se f risolve l'equazione di Cauchy [e]

- esiste un intervallo $[c,d]$ tale che $f(x)\notin[c,d]$ per ogni $x\in[a,b]$ $\quad a<b,\ c<d,$



allora $f(x)$ è della forma $f(x)=\lambda x \quad \forall x\in\mathbb{R}$.

ES: trovare $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ t.c.

$$P(x,y):\quad f(xf(y)) = xy + f(x) - x \qquad \forall x,y\in\mathbb{Q}$$

TENTATIVI:

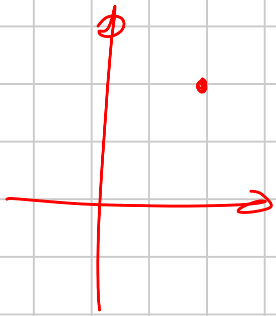
$$P(0,y):\quad f(0) = 0 + f(0) - 0$$

non implica nulla! :(

$$P(x,0):\quad f(xf(0)) = 0 + f(x) - x \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$$

Provo a dimostrare iniettività/suriettività!

ES: $P(x,0)$: $f(xf(0)) = 0+f(x)-x$



$$P(1,y):\quad \underbrace{f(f(y))}_{f\circ f} = \underbrace{y+f(1)-1}_{\uparrow}$$

y + costante: iniettiva e suriettiva!

$y_1+c\neq y_2+c$ se $y_1\neq y_2$

ogni z si scrive come $y+c$

→ f iniettiva

f suriettiva

suriettività: esiste un valore z t.c. $f(z)=0$.

$$P(x,z):\quad \underbrace{f(xf(z))}_{=f(0)} = xz + f(x) - x \qquad \forall x\in\mathbb{Q}$$

$$f(x) = x - xz + f(0) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ esistono a, b tali che $f(x) = ax + b \ \forall x \in \mathbb{Q}$

Quali funzioni di questa forma soddisfano $P(x,y)$?

$$a\left(x(ay+b)\right) + b = xy + ax + b - x$$

$$\underbrace{a^2}xy + \underbrace{ab}x + \cancel{b} = \underbrace{\ }xy + \underbrace{a}x + \cancel{b} - x \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}?$$

deve valere che $a^2 = 1$, $\quad ab = a - 1$

$a = 1, b = 0$ oppure $a = -1, b = 2$

Le soluzioni sono $f(x) = x$, $\quad f(x) = 2 - x$

ERRORI COMUNI:

- $f(f(x)) = f(x+8)$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}}$ $\cancel{\Rightarrow}$ $f(x) = x + 8$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}}$

  solo se f iniettiva

- $f(f(x)) = f(x) + 8$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}}$ $\Rightarrow$ sostituisco $z = f(x)$

  $f(z) = z + 8$

  ⚠ $\boxed{\begin{array}{l} \forall z \text{ t.c. esiste } x \ z = f(x) \\ \forall z \in \mathrm{Im}(f) \end{array}}$

  se f suriettiva, $\forall z \in \mathbb{Q}$

- $f(x^2) = x^2 + 8 \quad \forall x \in \mathbb{Q} \ \overset{z = x^2}{\Rightarrow} \quad f(z) = z + 8 \quad \forall z$ positivo!

A3-3, A3-6, A3-10

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$P(x,y)$ $\quad f(x f(x)+f(y)) = [f(x)]^2+y \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

STEP 1: biiettività

$P(0,y)$ $\quad \underbrace{f(f(y))}_{f\circ f} = \underbrace{[f(0)]^2+y}_{\text{iniettiva + suriettiva (in } y)}$

$\Rightarrow f$ iniettiva, $\underbrace{\text{suriettiva}}$

$\Downarrow$

$\exists z$ t.c. $f(z)=\dots$

STEP 2: $f(f(y))=y \quad \boxed{\forall y\in\mathbb{R}}$

$\exists z$ t.c. $f(z)=0$ (per suriettività)

(*) $P(z,y)$: $\quad f(f(y))=y \quad \boxed{\forall y\in\mathbb{R}}$

STEP 3: $\forall a\in\mathbb{R}, \forall y\in\mathbb{R}$

$= f(f(a)a+f(y)) = a^2+y$

$P(f(a),y)$: $\quad f\Big(f(a)\overbrace{f(f(f(a)))}^{(*)}+f(y)\Big) = \Big[\overbrace{f(f(a))}^{(*)}\Big]^2+y$

$P(a, y) \;:\; f(af(a)+f(y)) = [f(a)]^2+y$

sottraendo termine a termine, resta $[f(a)]^2 = a^2 \quad \forall a\in\mathbb{R}$

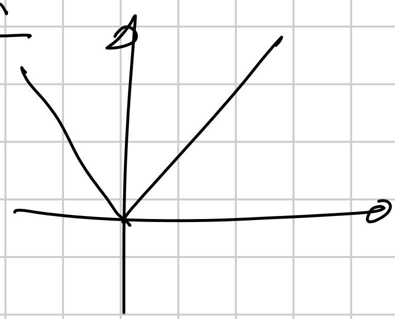
$(*)\quad \boxed{f(a) = \pm a \quad \forall a\in\mathbb{R}}$

due soluzioni: $f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$f(x)=-x \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\hookrightarrow f(x)=x$ per un po' di x reali

$f(x)=-x$ per gli altri



$$f(x)=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Q} \\ -x & x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\end{cases}$$

"mistone"

Come lo escludo?

Suppongo di avere a t.c. $f(a)=a \neq 0$

b t.c. $f(b)=-b \neq 0$

$P(a,b)$:

$$f(af(a)+f(b)) = [f(a)]^2+b$$

$$f(a^2-b) = a^2+b$$

$$a^2 - b = a^2 + b \Rightarrow -b = b, \text{ imp.}$$

Quindi vale uno fra:

$$b - a^2 = a^2 + b \Rightarrow -a^2 = a^2 \text{ imp.}$$

$$f(x) = x \qquad f(x) = -x.$$

A3.6

$$x_0 = 1 \qquad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i \qquad n = 0, 1, \dots$$

MODO 1:

$$y_n := \sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$x_1 = 6x_0 - 2x_0 = 4x_0 = 4$$

$$x_{n+1} = 6x_n - 2y_n$$

$$\boxed{y_n - y_{n-1} = x_n}$$

$$y_{n+1} - y_n = x_{n+1}$$

$$\boxed{y_{n+1} - y_n = 6(y_n - y_{n-1}) - 2y_n}$$

$$y_{n+1} = 5y_n - 6y_{n-1}$$

MODO 2

$$(-1) \qquad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i$$

$$(+1) \qquad x_{n+2} = 6x_{n+1} - 2\sum_{i=0}^{n+1} x_i$$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 6(x_{n+1} - x_n) - 2x_{n+1}$$

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$

$$\alpha^2 = 5\alpha - 6 \qquad \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \qquad (\alpha-2)(\alpha-3) = 0$$

$$u_n = \underline{\lambda} \cdot 2^n + \underline{\mu} \cdot 3^n \qquad u_0 = 1$$

$u_1 = 4$ (calcolo x_1 brutalmente dal testo)

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 4 = \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda = - \\ \mu = \end{matrix}$$

$$u_n = - \quad \cdot 2^n + \quad \cdot 3^n$$

Determinare x_{2002}: $\qquad x_{2002} = - \quad \cdot 2^{2002} + \quad \cdot 3^{2002}$

→ a parametro reale fissato

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x^2 + axy + y^2) = x^2 + axy + y^2 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

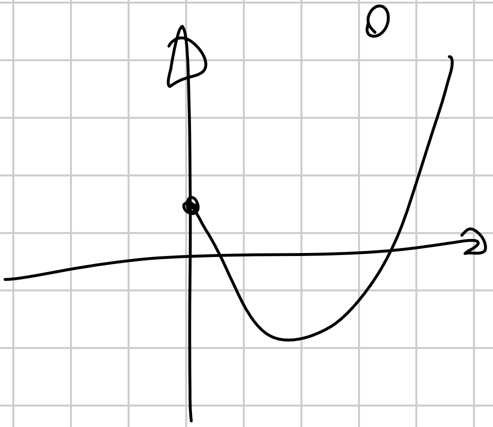
Quali valori possono assumere $f(1)$, $f(-1)$?

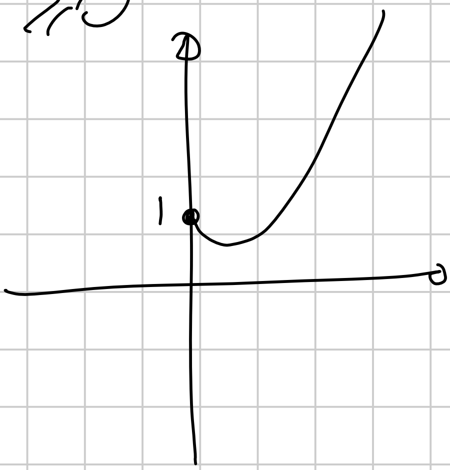
$x = 1$, $y = 0$: $f(1) = 1$

$f(z) = z$ $\quad \forall z$ che potete scrivere come $x^2 + axy + y^2$ per $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2\left(1+a\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right) = x^2(1+at+t^2), \quad \text{con } t = y/x$$

Se $1+at+t^2$ può assumere solo valori positivi, allora $\underbrace{x^2}_{\geq 0}\underbrace{(1+at+t^2)}_{\geq 0} \geq 0$





$1+at+t^2=0$ si risolve se e solo se $\Delta = a^2-4$ è positivo

cioè se $|a| \geq 2$

- Se $|a| > 2$, allora $x^2(1+at+t^2)$ assume valori positivi e negativi
- se $|a| \leq 2$, assume solo valori positivi o nulli

$x^2+axy+y^2$

Se esistono x, y t.c. $x^2+axy+y^2 = -k$ $\quad k \geq 0$,

allora $$\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2 + a\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\cdot\frac{y}{\sqrt{k}}\right) + \left(\frac{y}{\sqrt{k}}\right)^2 = -1$$

se $|a| > 2$, allora riesco a scrivere $z = -1$

e quindi $f(z) = z \Rightarrow f(-1) = -1$

se $|a| \leq 2$, $x^2 + axy + y^2$ assume solo valori

positivi $\Rightarrow$ il testo non mi dà nessuna

condizione su f(valori negativi)

Esibisco f che soddisfa $P(x,y)$ e

che $f(-1)$ = un qualunque valore a mia scelta

$$\begin{cases} f(z) = z & \forall\, z \geq 0 \\ f(z) = \text{quello che voglio per } z < 0 \end{cases}$$

Definisco $f(t) = \begin{cases} t & \text{se } t \geq 0 \\ 37 & \text{se } t < 0 \end{cases}$

+ verifico che soddisfa $P(x,y)$