Stage Senior 2018 – Livello Basic

Stampato integrale delle lezioni

Autori vari

Indice

A1 basic - Polinomi & Complessi

Titolo nota 04/09/2018

Numeri complessi

$$\mathbb{C} = \{ a+ib \mid a,b \in \mathbb{R} \}$$

Regole $i^2 = -1$

Es: $(3+i) - (1-2i) = 2+3i$

Es: $(1-i)(2+3i) = 2+3i-2i-3i^2 = 2+3-2i+3i = 5+i$

$z = a+ib \qquad \bar{z} = a-ib \qquad$ CONIUGIO

$z+\bar{z} = 2a \rightsquigarrow \frac{z+\bar{z}}{2} = a \leftarrow$ Parte reale

$z-\bar{z} = 2ib \rightsquigarrow \frac{z-\bar{z}}{2i} = b \leftarrow$ Parte immaginaria

$<, >, \leq, \geq$ si usano con i reali, non con i complessi

$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 - i^2b^2 = a^2+b^2 \geq 0$$

$\sqrt{z\bar{z}} = |z|$ MODULO di z

$$|z\cdot w| = \sqrt{zw\,(\overline{zw})} = \sqrt{zw\bar{z}\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}w\bar{w}} = \sqrt{z\bar{z}}\cdot\sqrt{w\bar{w}} = |z|\,|w|$$

$z = a+ib \qquad w = c+id$

$|z|^2 = a^2+b^2 \qquad |w|^2 = c^2+d^2$

$$|z|^2|w|^2 = |zw|^2$$

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = (ac-bd)^2 + (ad+bc)^2$$

$zw = ac - bd + i(ad+bc)$

Identità di SOPHIE-GERMAIN

<u>Es</u>: $X = \{ a + i\sqrt{3}\, b \mid a, b \in \mathbb{Z} \}$

$$(a+ib\sqrt{3})(c+id\sqrt{3}) = ac - 3bd + i\sqrt{3}(bc+ad)$$

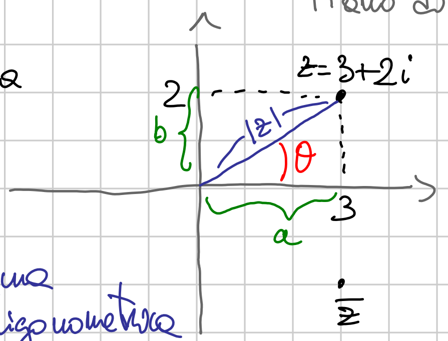
$$(a^2+3b^2)(c^2+3d^2) = (ac-3bd)^2 + 3(bc+ad)^2$$

<u>Oss</u>: $\dfrac{2+3i}{3-i} \cdot \dfrac{3+i}{3+i} = \dfrac{(2+3i)(3+i)}{9+1} = \dfrac{(6-3)+i(2+9)}{10} = \dfrac{3}{10} + i\dfrac{11}{10}$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{\underbrace{z\bar{z}}_{=0 \text{ se e solo se } z=0}}$$

Piano di GAUSS

$a+ib \longrightarrow$ forma cartesiana



$a = |z|\cos\theta$

$b = |z|\,\mathrm{sen}\,\theta$

$a+ib = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$ ← forma trigonometrica (polare)

$\rho = |z|$

θ t.c. $\begin{cases} \dfrac{a}{|z|} = \cos\theta \\ \dfrac{b}{|z|} = \sin\theta \end{cases}$

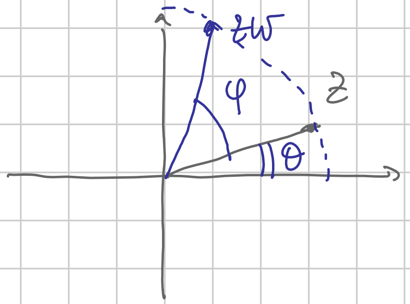
ρ – modulo

θ – ARGOMENTO

$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad w = R(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$

$zw = \rho R(\cos(\theta+\varphi) + i\,\mathrm{sen}(\theta+\varphi))$

<u>Oss</u>: Se $|w| = 1$, allora $z \longmapsto z\cdot w$ è una rotazione attorno a 0 che ha come angolo l'argomento di w

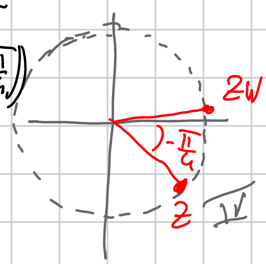


<u>Es</u>: $z = 2-2i$

$w = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$

$w = 1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{3}\right)$



$zw = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right) =$

$$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{12}\right)$$

$$z = \rho(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta) \qquad \bar{z} = \rho(\cos\theta - i\,\mathrm{sen}\,\theta) =$$

$$= \rho(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\rho(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))}{\rho^2} = \frac{1}{\rho}(\cos(-\theta) + i\,\mathrm{sen}(-\theta))$$

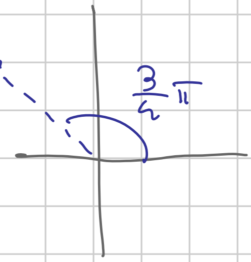
Forma esponenziale $\quad z = \rho e^{i\theta}$ se $|z| = \rho$ e $\underbrace{\arg(z)}_{\text{argomento di } z} = \theta$

$$\bar{z} = \rho e^{-i\theta} \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{\rho e^{i\theta}} = \frac{1}{\rho} e^{-i\theta}$$

Oss: $1 = 1 \cdot e^{i0}$

$-1 = 1 e^{i\pi}$

$-1 + i = \sqrt{2} e^{i\frac{3}{4}\pi}$



Potenze: $z = \rho e^{i\theta} \qquad z^n = \rho^n e^{in\theta} \quad n \geq 0$

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

$$\cos(7x) = \mathrm{Re}((\cos x + i\,\mathrm{sen}\,x)^7) =$$

$$= \mathrm{Re}\left((\cos x)^7 + 7(\cos x)^6 i\,\mathrm{sen}\,x - 21(\cos x)^5 \sin^2 x - i\,35 \cos^4 x\,\mathrm{sen}^3 x + \right.$$

$$\left. + 35\cos^3 x \sin^4 x + i\,21\cos^2 x \sin^5 x - 7\cos x \sin^6 x - i \sin^7 x\right) =$$

$$= \cos^7 x - 21\cos^5 x \sin^2 x + 35\cos^3 x \sin^4 x - 7\cos x \sin^6 x$$

Radici n-esime

$$z = w^n \qquad \boxed{z = \rho e^{i\theta}} \qquad w = R e^{i\varphi} \rightsquigarrow \boxed{w^n = R^n e^{in\varphi}}$$

$$\Uparrow$$

$$\Downarrow$$

$\rho = R^n$ come reale ≥ 0 $\longrightarrow$ $R = \sqrt[n]{\rho}$

$\theta = n\varphi$ come angolo $\longrightarrow$ $\theta + 2k\pi = n\varphi$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

radici n-esime di z

$$\boxed{\sqrt[n]{\rho} \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2\pi}{n}k\right)} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

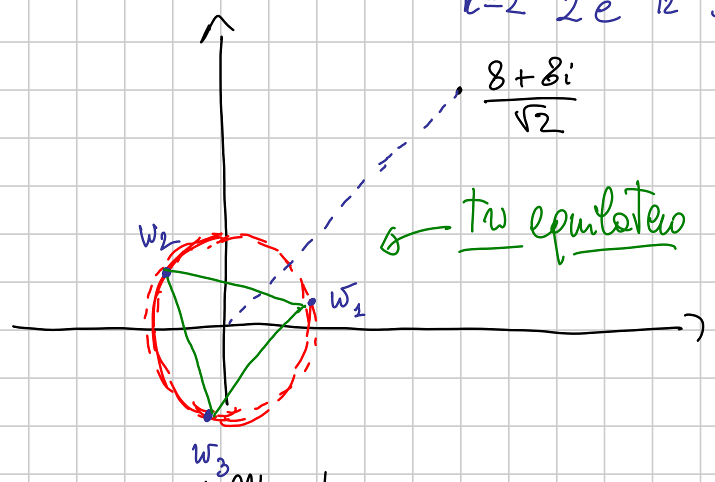
Es1: $z = \frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}}i$ $\quad \sqrt[3]{z} = ?$ $\quad n = 3$

$z = 8e^{i\frac{\pi}{4}}$

$k=0 \quad 2e^{i\frac{\pi}{12}}$ $\quad w_1$

$k=1 \quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}\pi\right)} = 2e^{i\frac{3}{4}\pi} = w_2$

$k=2 \quad 2e^{i\left(\frac{\pi}{12} + \frac{4}{3}\pi\right)} = 2e^{i\frac{17}{12}\pi} = w_3$



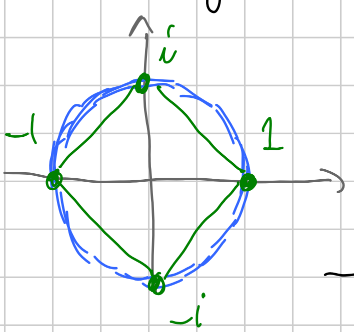
Le radici n-esime di un numero complesso sono i vertici di un poligono regolare con centro l'origine

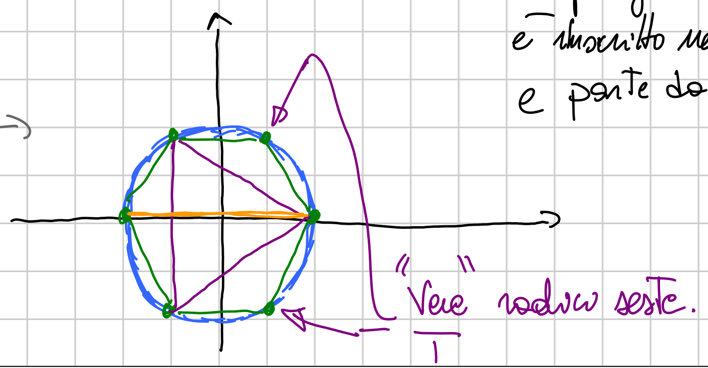
Radici dell'unità

Voglio risolvere $z^n = 1$

1 ha modulo 1, argomento 0

$\Rightarrow$ il poligono delle radici è inscritto nella cf. unitaria e parte da 1.





ξ radice n-esima

Radici primitive di 1

$$(\xi^k)^n = (\xi^n)^k = 1^k = 1$$

$$\xi^k = \xi^h \qquad \xi^{k-h} = 1$$

$$k > h$$

Polinomi $\qquad a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = p(x)$

polinomio $\qquad a_0, a_1, \dots, a_d$ coeff. del polinomio

$$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$\mathbb{Z}[x]$ = polinomi a coeff. interi

$\cap$

$\mathbb{Q}[x]$

$\cap$

$\mathbb{R}[x]$

$\cap$

$\mathbb{C}[x]$

$\deg p(x)$ = il massimo $d \geq 0$ per cui $a_d \neq 0$

se $p(x)$ non è la costante 0

deg di zero = non def

"$-\infty$"

$$\deg(p(x) \cdot q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

$$\deg(p(x) + q(x)) \leq \max\{\deg p(x), \deg q(x)\}$$

$p(x)$ si dice MONICO se $a_d = 1$

Teo (divisione euclidea) $a(x), b(x)$ polinomi in $\mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x], \mathbb{C}[x]$

allora $\exists\, q(x), r(x)$ nello stesso insieme tali che

$$a(x) = b(x) \cdot q(x) + r(x)$$

$$\deg r(x) < \deg b(x)$$

<u>Es1</u>:

$$
\begin{array}{l|l}
x^5+2x^2+1 & x^2+3 \\ \hline
-x^5-3x^3 & \boxed{x^3-3x+2} \ \text{quoziente} \\ \hline
-3x^3+2x^2+1 & \\
3x^3+9x & \\ \hline
2x^2+9x+1 & \\
-2x^2-6 & \\ \hline
\boxed{9x-5} \ \text{resto} &
\end{array}
$$

$x^5+2x^2+1 : x^2+3$

$x^5 = x\cdot(x^2)^2 \longrightarrow x(-3)^2$

$2x^2 \longrightarrow 2(-3)$

$9x-6+1 = 9x-5$

$\Rightarrow$ Posso calcolare MCD di due polinomi con l'algoritmo di Euclide

$$MCD(a(x), b(x)) = MCD(b(x), r(x))$$

$$a(x) = b(x)\cdot q(x) + r(x)$$

(e vale il teo di Bezout: $MCD(a,b) = h(x)\cdot a(x) + k(x)\cdot b(x)$)

Se $r(x)$ è zero, si dice che $b(x)$ divide $a(x)$

<u>Def</u>: Un polinomio si dice <u>irriducibile</u> se non è divisibile per polinomi di grado minore, non costanti.

<u>Oss</u>: Essere irriducibile cambia a seconda dell'insieme dei coeff

∘) x^2-2 è irrid. in $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x]$ ma è riducibile in $\mathbb{R}[x]$ e $\mathbb{C}[x]$

∘) x^2+2 è irrid in $\mathbb{Z}[x], \mathbb{Q}[x], \mathbb{R}[x]$ ma non in $\mathbb{C}[x]$

$(x+i\sqrt{2})(x-i\sqrt{2})$

<u>Teo di Ruffini</u>: $(x-a)$ divide $p(x)$ se e solo se $p(a)=0$

a si dice RADICE di $p(x)$

$\Rightarrow$ Un pol. di grado n ha al più n radici.

Principio di identità dei polinomi

$p(x)$, $q(x)$ polinomi di grado $\leq n$. Se esistono $x_1, \dots, x_{n+1}$ valori t.c. $p(x_i) = q(x_i)$ $i = 1, \dots, n+1$, allora $p(x) = q(x)$.

Es: $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ t.c. $p(1) = 7$ $p(7) = 1$ $p(8) > 0$

Quanto vale al min. $p(8)$?

Oss: $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$
$b(x)$ monico
$\Rightarrow a(x) = b(x)q(x) + r(x)$
con $q(x), r(x) \in \mathbb{Z}[x]$

$$p(x) = 8 - x + (x-7)(x-1)q(x)$$

$$p(x) - (8-x) = (x-7)(x-1)\,q(x)$$

$$\Rightarrow q(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

$$p(8) = 0 + 1 \cdot 7 \cdot q(8) = 7 \cdot q(8) > 0 \quad \Rightarrow q(8) > 0$$

$\Rightarrow$ al minimo $q(8) = 1$ $\Rightarrow p(8) = 7$

$$p(x) = 8 - x + (x-7)(x-1)$$

Es: $p(x)$ monico di grado 20 t.c.

$$\boxed{p(1) = 2, \dots, p(20) = 40}$$

Trovare $p(x)$.

$$p(x) - 2x = (x-1)(x-2) \cdot \ldots \cdot (x-20)$$

$$p(x) = (x-1) \cdot (x-2) \cdots (x-20) + 2x$$

Teo fondamentale dell'algebra

$p(x) \in \mathbb{C}[X]$, allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ e $m_1, \dots, m_k$ interi positivi

t.c. $p(x) = A \cdot (x-\lambda_1)^{m_1} \cdot \dots \cdot (x-\lambda_k)^{m_k}$ $\quad A \in \mathbb{C}$.

$\lambda_1, \dots, \lambda_k$ radici di $p(x)$

$m_1, \dots, m_k$ molteplicità delle radici

—— • ——

$$p(x) = a_d (x-\lambda_1) \cdot \dots \cdot (x-\lambda_d) = a_d x^d - a_d x^{d-1}(\lambda_1 + \dots + \lambda_k) +$$

$$\| \qquad\qquad + a_d x^{d-2}(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots + \lambda_i\lambda_j + \dots)$$

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \qquad - a_d x^{d-3}(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \dots \text{ tutti i prod. a 3 a 3})$$

$$(-1)^k \frac{a_{d-k}}{a_d} = \text{somma dei prodotti a } k \text{ a } k \text{ delle radici}$$

Formule di Viete

Es: $x^3 - 2x^2 + 3x + 4$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 = S \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = 3 = Q \\ \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = -4 = P \end{cases}$$

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = S^2 - 2Q$$

$$\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\lambda_3} = \frac{Q}{P}$$

Polinomi a coeff. interi

1) Se $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ è riducibile in $\mathbb{Q}[x]$ allora lo è in $\mathbb{Z}[x]$

2) $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a \in \mathbb{Z} \Rightarrow p(a) \in \mathbb{Z}$

Es: $p(x) = \frac{x(x-1)}{2}$

3) $p(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

se $\frac{m}{n}$ è radice di $p(x)$ allora $m | a_0$, $n | a_d$
$(m, n) = 1$

4) $p(x)$ coeff. interi, $a, b \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $a-b$ divide $p(a)-p(b)$ (come interi)

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$p(x) = c_d x^d + \dots + c_0$$

$$p(a) - p(b) = c_d \underbrace{(a^d - b^d)} + c_{d-1} \underbrace{(a^{d-1} - b^{d-1})} + \dots + c_1 \underbrace{(a-b)}.$$

Es: 69, 71, 72, 73, 76, 77, 83

Problemi: 7, 10, 11, Quanto vale il prodotto di tutti i lati e tutte le diagonali di un poligono regolare di n lati inscritto nella cfr. unitaria?

69)

$$(x-1)(1 + x + \dots + x^{1023}) = x^{1024} - 1$$

$$\lambda = e^{i\frac{2\pi}{1024}}$$

$$\| $$

$$\underbrace{(x-\lambda)(x-\lambda^2) \cdot \dots \cdot (x-\lambda^{1023})}(x-1)$$

$$\lambda^{512} = e^{i\frac{2 \cdot 512 \pi}{1024}} = e^{i\pi} = -1$$

$$(x-\lambda)(x-\bar\lambda) = x^2 - \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{(\lambda+\bar\lambda)}}\,x + \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\lambda\bar\lambda}}$$

$$\lambda = e^{i\frac{2\pi}{1024}}$$

$$\overline{\lambda^k} = \bar\lambda^{k} = e^{-i\frac{2k\pi}{1024}} \left(= \frac{1}{\lambda^k} \right)$$

$\bar z = \frac{1}{z}$ se e solo se $|z|=1$

$$(x-\lambda^k)(x-\bar\lambda^k) = x^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{1024}\right)x + 1$$

$$(x+1)\left(x^2-2\cos\left(\frac{2\pi}{1024}\right)x+1\right)\left(x^2-2\cos\left(\frac{4\pi}{1024}\right)x+1\right)\cdot$$
$$\cdots\left(x^2-2\cos\left(\frac{2\cdot 511\,\pi}{1024}\right)x+1\right)$$

$\boxed{71}$ $\quad x^3-2x^2-3x-4 \qquad \alpha^4+\beta^4+\gamma^4=?$

$$x^3 = 2x^2+3x+4 \quad \text{se } x=\alpha,\beta,\gamma$$

$$x^4 = 2x^3+3x^2+4x = 4x^2+3x^2+6x+4x+8 = 7x^2+10x+8$$

$$2x^3 = 4x^2+6x+8$$

$$\alpha^4+\beta^4+\gamma^4 = 7(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)+10(\alpha+\beta+\gamma)+8 =$$
$$= 7(2^2+6)+10(2)+8$$

$\alpha_1,\dots,\alpha_n$ sono radici di $p(x)$ e $\deg p(x) = n$

allora $\frac{1}{\alpha_1},\dots,\frac{1}{\alpha_n}$ sono radici $x^n p\left(\frac{1}{x}\right)$

$$\left(\frac{1}{\alpha_1}\right)^n \cdot p\left(\frac{1}{1/\alpha_1}\right) = \frac{1}{\alpha_1^n}\,p(\alpha_1) = 0$$

Es: $p(x) = 3x^4 + 5x^3 + 2x - 1$

$$q(x) = x^4 p\left(\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x} - 1\right)x^4 = 3 + 5x + 2x^3 - x^4$$

$\boxed{73}$ $\underbrace{a-2}$ divide $p(a) - p(2) = a + 2 - a = \underbrace{2}$

$\Rightarrow a - 2 = \pm 1, \pm 2$

$a = 3$
$a = 4$
$a = 1$
$a = 0$

$p(2) = a$

$p(x) - a = (x-2)\,q(x)$

$p(a) - a = (a-2)\,q(a)$

$\Vert$

$a+2 \quad \Leftrightarrow \quad 2 = (a-2)\,q(a)$

$$p(x) = (x-2)\left(\frac{2}{a-2}\right) + a$$

76] $p(x) =$ membro dx

$p(a) = p(b) = p(c) = 1$ poiché $\deg p(x) \leq 2$ allora $p(x)$ coincide con 1

$\Rightarrow$ FINE.

Es: trovare $p(x)$ t.c. $p(a) = 18 \quad p(b) = -11 \quad p(c) = \sqrt{3}$

$\deg p(x) \leq 2$.

$$q_a(x) = \frac{(x-c)(x-b)}{(a-c)(a-b)} \qquad q_b(x) = \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)} \qquad q_c(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}$$

$$18\,q_a(x) - 11\,q_b(x) + \sqrt{3}\,q_c(x) = p(x)$$

$\boxed{77}$ $p(n+1) - p(n) = (n+1)^5 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Downarrow$

$p(x+1) - p(x) = (x+1)^5$

$\Downarrow$

$x = -1$

<u>Problemi</u>: 10) $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ $\quad P(0), P(13)$ dispari

Quante radici intere può avere $P(x)$?

Sia $n \in \mathbb{Z}$ una radice intera $\Longrightarrow P(n) = 0$.

$n - 0$ divide $P(n) - P(0)$ $\leftarrow$ DISPARI

$n - 13$ divide $P(n) - P(13)$ $\leftarrow$ DISPARI

$\Longrightarrow$ n e $n-13$ sono dispari, impossibile $\Longrightarrow$ niente radici intere

7) $$\sum_{n=0}^{k} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq n}}^{k} \frac{(x-j)}{n-j} 2^{j} = p(x)$$

Esiste $p(x)$ t.c. $p(k) = 2^k \quad \forall k \in \mathbb{N}$?

Se esistesse, allora $p(n+1) = 2p(n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow p(x+1) = 2p(x)$ come polinomi

$p(x) = a_d x^d + \dots + a_1 x + a_0$

$p(x+1) = a_d (x+1)^d + \dots + a_1 (x+1) + a_0 = a_d x^d + \dots$

$2p(x) = 2a_d x^d + \dots$

$\Rightarrow a_d = 2a_d \Rightarrow a_d = 0.$

$\Rightarrow p(x)$ è zero. Assurdo.

$\boxed{\text{Extra}}$ Poligono $\to$ radici di 1

$\xi = e^{i\frac{2\pi}{n}} \qquad 1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^{n-1}$

$$|1-\xi| \cdot |1-\xi^2| \cdots |1-\xi^{n-1}| = |(1-\xi)(1-\xi^2)\cdots(1-\xi^{n-1})|$$

$p(x) = (x-\xi)\cdots(x-\xi^{n-1})$

$(x-1)p(x) = x^n - 1 \qquad p(x) = x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1$

$|p(1)| = \dots$

$\quad \shortparallel$

$\quad n$

$n^{n/2}$

11) $p(z) \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_{2002}$

$P_1(z) = z - a_1$

$P_2(z) = P_1^2 - a_2$

$\vdots$

$P_{2002}(z) = P_{2001}^2(z) - a_{2002}$

Vedere che $p(z)$ divide $P_{2002}(z) \iff \lambda_1, \dots, \lambda_{2002}$ sono radici di $P_{2002}(z)$

$P_{2001}(\lambda_j)^2 - a_{2002} = 0$

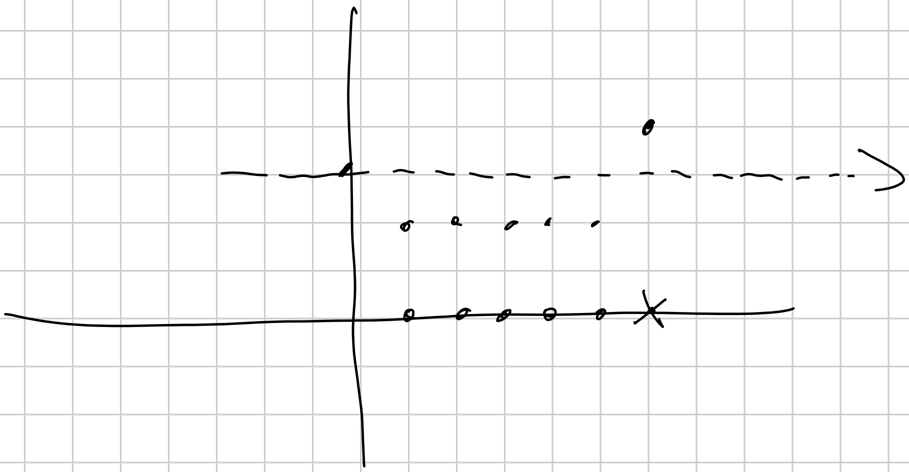
$P_{2001}(\lambda_j) = c \quad j = 1, \dots, 2001 \qquad a_{2002} = -c^2$

$P_{2001}(\lambda_{2002}) = -c$

$P_{2001}(z) = P_{2000}(z)^2 - a_{2001}$

Se $P_{2000}(\lambda_1)^2 = P_{2000}(\lambda_2)^2 \neq \dots = P_{2000}(\lambda_{2001})^2$

allora scelgo $a_{2001} = \dfrac{P_{2000}(\lambda_1)^2 + P_{2000}(\lambda_{2002})^2}{2}$



<u>Polinomio ciclotomico</u> Polinomio le cui radici sono le radici primitive n-esime di 1.

ALGEBRA 2 – BASIC

Titolo nota 05/09/2018

DISUGUAGLIANZE

- $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca \qquad a,b,c \in \mathbb{R}$
- $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ [Nesbitt] $a,b,c \in \mathbb{R}^+$
- $xz+yz \leq C\,(x^2+y^2+z^2)$

  trovare la migliore costante

NOTAZIONE

in 3 var, a,b,c $\qquad \sum_{cyc} f(a,b,c) = f(a,b,c)+f(b,c,a)+f(c,a,b)$

$\sum_{cyc} a = a+b+c \qquad \sum_{cyc} ab = ab+bc+ca$

in n variabili $\qquad \sum_{cyc} f(a_1,a_2,\dots a_n) = f(a_1,\dots)+f(a_2,\dots)+\dots+f(a_n,\dots)$

$$\sum_{sym} f(a,b,c) = f(a,b,c)+f(a,c,b)+f(b,c,a)+f(b,a,c)+f(c,a,b)+f(c,b,a)$$

$$\sum_{sym} a = a+a+b+b+c+c = 2(a+b+c)$$

$$\sum_{sym} ab = 2\sum_{cyc} ab$$

$$\sum_{sym} a^2b = a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

$$\sum_{cyc} a^2b = a^2b + b^2c + c^2a$$

$$[2,1,0] = \sum_{sym} a^2b \qquad [i,j,k] = \sum_{sym} a^i b^j c^k$$

SOS

$$x^2 \geq 0$$

$$x = a-b \Rightarrow (a-b)^2 \geq 0 \qquad a^2+b^2 \geq 2ab$$

$$\sum_{cyc} (a-b)^2 \geq 0$$

$$\parallel$$

$$\sum_{cyc} a^2+b^2-2ab = 2\sum_{cyc} a^2 - 2\sum_{cyc} ab$$

$$\sum_{cyc} a^2 \geq \sum_{cyc} ab$$

RIARRANGIAMENTO

con le cifre 5, 2, 3, 7 – numero più grande? 7532

– piccolo? 2357

$a_1 \geq \dots \geq a_n$

$b_1 \geq \dots \geq b_n$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \geq \sum a_i b_{\sigma(i)} \geq \sum a_i b_{n-i+1}$$

dim.

FATTO: $x \geq a,\ y \geq b \quad (x-a)(y-b) \geq 0$

$$xy + ab \geq xb + ya$$

$(1) = \sum a_i b_{\sigma(i)} \qquad \sigma \neq id \qquad i < j$ t.c. $\sigma(i) > \sigma(j)$

$\underbrace{a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)}}$ $\qquad a_i \geq a_j$

$b_{\sigma(j)} \geq b_{\sigma(i)}$

$a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)} \geq$

FORMALMENTE: induzione sulla "lunghezza" di σ

quella inversa si fa uguale, oppure prendiamo $b'_i = -b_i$

CHEBYCHEFF

$a_1 \geq \dots \geq a_n$
$b_1 \geq \dots \geq b_n$

$$\frac{\sum a_i b_i}{n} \geq \left(\frac{\sum a_i}{n}\right)\left(\frac{\sum b_i}{n}\right)$$

dim. $\left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_{i+j}$

MOD n

usiamo riarr. $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq \sum_{j=1}^{n} a_i b_{i+j}$

$$n \sum a_i b_i \geq \left(\sum a_i\right)\left(\sum b_i\right)$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

WLOG $a \geq b \geq c$ $\quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix}$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

NESBITT $\quad \frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$

WLOG $[a \geq b \geq c]$ $\quad a+b \geq a+c \geq b+c$

$$\left[\frac{1}{a+b} \leq \frac{1}{a+c} \leq \frac{1}{b+c}\right]$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \sum_{cyc} \frac{b}{b+c}$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \sum_{cyc} \frac{c}{b+c}$$

$$+ \implies 2\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \sum \frac{b+c}{b+c} = 3$$

CAUCHY-SCHWARZ (CS PER GLI AMICI)

$x_1, \dots, x_n$
$y_1, \dots, y_n$

$$\left(\sum x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$$

dim_1

$$f(t) = \sum (x_i - t y_i)^2 = t^2\left(\sum y_i^2\right) - 2t\left(\sum x_i y_i\right) + \sum x_i^2$$

$f(t) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

$\Delta \leq 0$

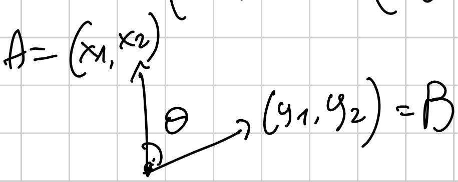
ma $\Delta = 4\left(\sum x_i y_i\right)^2 - 4\left(\sum y_i^2\right)\left(\sum x_i^2\right)$

caso di uguaglianza?

$\Delta = 0$, ovvero $f(t)$ ha una radice λ

$f(\lambda) = 0 \iff \boxed{x_i - \lambda y_i = 0} \quad \forall i = 1, \dots, n$

$\dfrac{x_i}{y_i} = \lambda$



$x_1^2 + x_2^2 = \|A\|^2 \qquad x_1 y_1 + x_2 y_2 = \langle A, B \rangle$

$y_1^2 + y_2^2 = \|B\|^2$

$|\langle A, B \rangle| = \|A\| \cdot \|B\| \cdot \cos\theta$

l'= in CS si ha per $\cos\theta = 1$ ovvero $\theta = 0$

TITU

$a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$

$$\sum \frac{a_i^2}{x_i} \geq \frac{\left(\sum a_i\right)^2}{\sum x_i}$$

dim. $\left(\sum a_i\right)^2 \leq \left(\sum \frac{a_i^2}{x_i}\right)\left(\sum x_i\right)$

che è CS su $\left(\frac{a_1}{\sqrt{x_1}}, \dots \frac{a_n}{\sqrt{x_n}}\right)$ e $\left(\sqrt{x_1}, \dots, \sqrt{x_n}\right)$

rifacciamo Nesbitt

$$\sum \frac{a}{b+c} \overset{\text{TITU}}{\geq} \frac{\left(\sum \sqrt{a}\right)^2}{\sum b+c} = \frac{\sum a + 2\sum \sqrt{ab}}{\cancel{2}\sum a} \overset{?}{\geq} \frac{3}{\cancel{2}}$$

$$\sum a + 2\sum \sqrt{ab} \overset{?}{\geq} 3\sum a \qquad \sum \sqrt{ab} \overset{?}{\geq} \sum a$$

IN REALTÀ È FALSA

è $\sum a^2 \geq \sum ab$ con le radici, al contrario

$$\sum \frac{a}{b+c} = \sum \frac{a^2}{ab+ac} \overset{\text{TITU}}{\geq} \frac{\left(\sum a\right)^2}{\sum ab+ac} = \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{\cancel{2}\sum ab} \overset{?}{\geq} \frac{3}{\cancel{2}}$$

$\sum a^2 \geq \sum ab$ ✓ la Nesbitt è vera dim. 2 CS

x_i, y_i $\qquad \sum_{i,j} (x_i y_j - x_j y_i)^2 \geq 0$

$$\sum_{i,j} x_i^2 y_j^2 + x_j^2 y_i^2 - 2 x_i x_j y_i y_j \geq 0$$

$$\cancel{2} \sum_{i,j} x_i^2 y_j^2 - \cancel{2} \sum_{i,j} \underbrace{x_i x_j y_i y_j}_{(x_i y_i)(x_j y_j)} \geq 0$$

$$\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_j^2\right) - \left(\sum x_i y_i\right)^2 \geq 0$$

$$\sum_{i,j} x_i^2 y_j^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i^2 y_j^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \left(\sum y_j^2\right) = \left(\sum y_j^2\right)\left(\sum x_i^2\right)$$

---

max $\quad x+2y+3z \quad$ t.c. $\quad x^2+y^2+z^2=1$

$$\uparrow$$

$(x,y,z)\cdot(1,2,3)$

CS : $\quad (x+2y+3z)^2 \leq \underbrace{(x^2+y^2+z^2)}_{=1} \cdot (1^2+2^2+3^2)$

$$x+2y+3z \leq \sqrt{14}$$

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow \quad y=2x \quad z=3x \qquad x^2+2^2x^2+3^2x^2=1$

$$x = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$x+2y+3z = x+2^2x+3^2x = \frac{14}{\sqrt{14}} = \sqrt{14}$$

$$\sum_{cyc}\sqrt{x(3x+y)} \le 2(x+y+z)$$

$$\sum_{cyc}\sqrt{x}\cdot\sqrt{3x+y} \le \sqrt{\sum_{cyc}(\sqrt{x})^2}\cdot\sqrt{\sum_{cyc}(\sqrt{3x+y})^2}$$

$$= \sqrt{\sum_{cyc} x}\cdot\sqrt{\sum_{cyc}4\cdot x} = 2\sqrt{\left(\sum_{cyc} x\right)^2} = 2\sum_{cyc} x$$

$$\sum_{cyc} 3x+y = (3x+y)+(3y+z)+(3z+x) = 4(x+y+z)$$

$$\left(\sum x_i y_i\right)^2 \le \left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i^2\right)$$

$$\sum x_i y_i \le \sqrt{\sum x_i^2}\cdot\sqrt{\sum y_i^2}$$

è sempre CS, scritta con le radici.

MEDIE

$a_1, \dots, a_n > 0$

$$AM(a_1, \dots a_n) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} = \frac{\sum a_i}{n}$$

$$GM(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

$$HM(a_1, \dots a_n) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

$$QM(a_1, \dots, a_n) = \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

$\forall a_1 \dots a_n > 0$

$$HM \leq GM \leq AM \leq QM$$

l'= vale solo per $a_1 = a_2 = \dots = a_n$

dim $HM \leq AM$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}} \qquad \left(\sum a_i\right) \cdot \left(\sum \frac{1}{a_i}\right) \geq n^2$$

CS su $(\sqrt{a_1} \dots \sqrt{a_n})$ e $\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{a_n}}\right)$

dim $AM \leq QM$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \leq \sqrt{\frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}}$$

$$(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n \cdot (a_1^2 + \dots + a_n^2)$$

CS su $(1, 1, \dots 1)$ e $(a_1, \dots a_n)$

dim $AM \geq GM$

lemma: se $x_1, \dots, x_n > 0$ $\sum \frac{x_{i+1}}{x_i} \geq n$

dim: riarr.

supp. $x_1 \geq \dots \geq x_n$

$\frac{1}{x_1} \leq \dots \leq \frac{1}{x_n}$

" $\frac{x_2}{x_1} + \frac{x_3}{x_2} + \dots \frac{x_n}{x_{n-1}} + \frac{x_1}{x_n}$

allora $\sum \frac{x_{i+1}}{x_i}$ é una permutazione

$$n = \sum x_i \cdot \frac{1}{x_i} \quad \text{è la perm. } \underline{\text{minima}}$$

$$g = GM(a_1 \dots a_n) = \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n}$$

$$x_i = \frac{a_1 \cdot \dots \cdot a_i}{g^i} \qquad x_1 = \frac{a_1}{g} \quad x_2 = \frac{a_1 \cdot a_2}{g^2}, \quad \dots \quad x_n = \frac{a_1 \cdots}{g^n} = 1$$

Lemma: $\sum \frac{x_{i+1}}{x_i} \geq n$

vale $\frac{x_{i+1}}{x_i} = \frac{a_{i+1}}{g}$ $\qquad \frac{a_1}{g} + \frac{a_2}{g} + \dots + \frac{a_n}{g} \geq n$

$$\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \geq g$$

es:

min $a^4 + b^2 + c$ t.c. $abc = 1$ $\quad a, b, c > 0$

$$\frac{a^4 + b^2 + c}{3} \geq \sqrt[3]{a^4 b^2 c} = \sqrt[3]{a^3 b} = ?$$

$$\frac{a^4 + \frac{b^2}{2} + \frac{b^2}{2} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4} + \frac{c}{4}}{7} \geq \sqrt[17]{a^4 \left(\frac{b^2}{2}\right)^2 \left(\frac{c}{4}\right)^4}$$

$$= \sqrt[17]{\frac{a^4 b^4 c^4}{2^2 4^4}} = \sqrt[17]{\frac{1}{2^{10}}}$$

$$a^4 + b^2 + c \geq 17 \cdot \sqrt[17]{\frac{1}{2^{10}}}$$

quando l'$=$? per $a^4 = \frac{b^2}{2} = \frac{c}{4}$

trova C t.c. $xz+yz \leq C(x^2+y^2+z^2)$ $x,y,z \in \mathbb{R}^+$

$\forall C' < C \ \exists x_0, y_0, z_0$ t.c. $(\ ) \geq C'(\ )$

$xz \leq \frac{x^2+z^2}{2}$ $yz \leq \frac{y^2+z^2}{2}$ $xz+yz \leq \frac{1}{2}(x^2+y^2+2z^2)$

$x^2+y^2+z^2 = \left(x^2+\frac{z^2}{2}\right) + \left(y^2+\frac{z^2}{2}\right) \geq \frac{2xz}{\sqrt{2}} + \frac{2yz}{\sqrt{2}}$

$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}(xz+yz) \leq \frac{1}{\sqrt{2}} x^2+y^2+z^2$

con $C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, la disuguaglianza vale

$a^2+b^2 \geq 2ab$

$x^2 \quad \left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2$

l'$=$ c'è per $x = \frac{z}{\sqrt{2}} = y$ (es: $z=\sqrt{2}$, $x=1, y=1$)

$xz+yz = 2\sqrt{2}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1+1+2) = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

$\sum_{sym} a^3 \geq \sum_{sym} a^2 b$

$2(a^3+b^3+c^3)$ $\quad \underbrace{a^2b}+\underbrace{a^2c}+\dots$

$\frac{a^3+a^3+b^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^6 b^3} = a^2 b$

$\frac{a^3+a^3+c^3}{3} \geq a^2 c$

$$\frac{a^3}{} \geq c^2 a$$
$$\frac{a^3}{} \geq b^2 a$$

a sinistra abbiamo usato $\frac{6 \cdot a^3}{3} = 2a^3$

si fa anche per marr. WLOG $a \geq b \geq c$

$(a^2, a^2, b^2, b^2, c^2, c^2)$ e (a, a, b, b, c, c) ← LHS

(b, c, a, c, a, b) ← RHS

$$\sum_{cyc} a^3 \geq \sum_{cyc} ab \quad \leftarrow \text{NON È OMOGENEA}$$

$f(a,b,c)$ si dice omogenea (di grado d)

se $f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^d f(a,b,c)$

$a^2+b^2+c^2$ è omo di grado 2

$$\boxed{\ }M(\lambda a_1 \dots \lambda a_n) = \lambda \cdot M(a_1 \dots a_n)$$

varrà per $a=b=c$? $\quad 3a^3 \geq 3a^2$. per $a \geq 0$

$a \geq 1$

per $a \leq 1$? $\quad 3a^3 \leq 3a^2$

Back to medie:

dato $p \in \mathbb{R}$ $\quad a_1 \dots a_n \geq 0$

$$M_p(a_1 \dots a_n) = \left(\frac{\sum a_i^p}{n} \right)^{1/p} \qquad (\text{per } p \neq 0)$$

$M_1 = AM \quad M_2 = QM \quad M_{-1} = HM$

$GM = M_0$

$M_2 \geq M_1 \geq M_0 \geq M_{-1}$

$p \geq q \Rightarrow M_p \geq M_q \qquad M_3 \geq M_{-5}$

$M_{\frac{1}{2}} \geq M_{-\frac{1}{2}}$

SCHUR

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq \sum_{sym} x^2 y$$

$$\Updownarrow$$

$$\sum_{cyc} x(x-y)(x-z) \geq 0$$

WLOG $x \geq y \geq z$

$$x\underset{\geq 0}{(x-y)}\underset{\geq 0}{(x-z)} + y\underset{\geq 0}{(y-z)}\underset{\leq 0}{(y-x)} + z\underset{\leq 0}{(z-x)}\underset{\leq 0}{(z-y)} \overset{?}{\geq} 0$$

$$-y(y-z)(x-y) \qquad \underbrace{z(x-z)(y-z)}_{\geq 0}$$

$$= \underset{\geq 0}{(x-y)}\Big[\underbrace{x(x-z)-y(y-z)}_{\geq 0}\Big] + z(\ )(\ ) \geq 0 \quad \checkmark$$

$x \geq y$

$x-z \geq y-z$

BUNCHING

$[2,1,0] = \sum_{sym} a^2 b \, .$ $\qquad [i,j,k] = \sum_{sym} a^i b^j c^k$

$[a_1, \ldots, a_n] \geq [b_1, \ldots b_n]$

se valgono

$a_1 \geq b_1$

$a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2$

$a_1 + a_2 + a_3 \geq b_1 + b_2 + b_3$

$\vdots$

$a_1 + \ldots + a_n = b_1 + \ldots + b_n$

es: $[3,0,0] \geq [2,1,0] \geq [1,1,1]$

$[3,0,0] + [1,1,1] \geq 2[2,1,0]$

ESERCIZI

ES. 86, 87, 88, 89 PAG. 16

ES. 1, 4, 5, 9, 10 PAG. 217

- $a^3b^6+b^3c^6+c^3a^6+3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3)$
- $\sum_{cyc} \frac{a+b}{c} \geq 6$ con $a,b,c>0$
- trovare la più piccola costante K t.c. $(4x+5y+3z)^2 \leq K(3x^2+4y^2+5z^2)$

CORREZIONE

ES. 88 $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3$ $a,b,c>0$

$$\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{3} \geq \frac{\cancel{3}abc}{\cancel{3}}$$

AM-GM ; $\sqrt[3]{a^2cb^2ac^2b} = \sqrt[3]{a^3b^3c^3}$

ES. 89

min $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}$ con $x+y+z=17$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}\right) \geq \sqrt{\frac{xy}{z}\cdot\frac{xz}{y}} = x$$

$$\sum \frac{xy}{z} \geq x+y+z = 17$$ con $x=y=z=\frac{17}{3}$

c'è l'=

min $x+8y+4z$ con $4\frac{1}{x}+\frac{2}{y}+z=3$

$$4\frac{1}{x}+\frac{2}{y}=3-z$$

$$x+8y$$
$$\parallel$$
$$\frac{\frac{x}{2}+\frac{x}{2}+2y+2y+2y+2y}{6} \geq \frac{6}{2\cdot\frac{2}{x}+4\cdot\frac{1}{2y}}$$

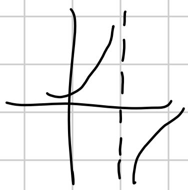
$$x+8y \geq \frac{6^2}{\frac{4}{x}+\frac{2}{y}} = \frac{6^2}{3-z}$$

$$x+8y+4z \geq \frac{6^2}{3-z}+4z$$

il min per z si ha in $z=0$

$$= 6\cdot 2$$

$$\frac{x}{2}=2y$$



ES. 1)

$x_1, \dots x_n$ $\quad AM=8,\ GM=7,\ HM=6$

$$y_i=\prod_{j\neq i} x_j = \frac{\prod x_j}{x_i} = \frac{7^n}{x_i} \qquad y_i' = \frac{y_i}{7^n}$$

$$M_1\left(\frac{1}{x_i}\right) = \frac{\frac{1}{x_1}+\dots+\frac{1}{x_n}}{n} = HM^{-1}$$

$$M_{-1}\left(\frac{1}{x_i}\right) = \frac{n}{x_1+\dots+x_n} = AM^{-1}$$

$$M_0\left(\frac{1}{x_i}\right) = \sqrt[n]{\frac{1}{x_1}\cdots\frac{1}{x_n}} = GM^{-1}$$

ES. 4

max x^5yz con $x+y+z=1$

$$\frac{5\cdot\frac{x}{5}+y+z}{7} \geq \sqrt[7]{\frac{x^5}{5^5}yz} \qquad x^5yz \leq \frac{5^5}{7^7}$$

ES. 5

$$\frac{\sum x_i\sqrt{y_i}}{n} = 9 \qquad \frac{\sum y_i}{n} = 8$$

↑

SEMBRA IL PROD. DI CS

$$\frac{\left(\sum x_i\sqrt{y_i}\right)^2}{n^2} \leq \frac{\left(\sum x_i^2\right)}{n}\cdot\frac{\left(\sum y_i\right)}{n}$$

$$9^2 \leq \frac{\sum x_i^2}{n}\cdot 8 \qquad \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} \geq \frac{9}{\sqrt{8}}$$

ES. 9

$$\sum\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \sqrt{\frac{n}{n-1}} \qquad \text{con } x_1+\dots+x_n=1$$

Chebyshev su $(x_1\dots x_n), \left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}\dots\right)$

$$n\sum\frac{x_i}{\sqrt{1-x_i}} \geq \underbrace{\left(\sum x_i\right)}_{=1}\cdot\left(\sum\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)$$

$$\text{LHS} \geq AM\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right) \geq M_{-2}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_i}}\right)$$

$$M_{-2}(\;) = \left(\frac{\left(\frac{1}{\sqrt{1-x_1}}\right)^{-2}+\dots}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{\sum 1-x_1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} = RHS$$

Es. 10

$a+b=z \quad b+c=x \quad c+a=y$

$(a+b)+(c+a)-(b+c)=2a \Rightarrow a=\frac{y+z-x}{2}$

NESBITT: $\sum \frac{y+z-x}{\cancel{2}x} \geq \frac{3}{\cancel{2}}$

$\|$

$$\sum \frac{y}{x}+\frac{z}{x}-1 \geq 3 \qquad \sum_{sym} \frac{x}{y} \geq 6$$

$$\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y} \geq 6$$

AMGM $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geq 2$ (in gen $t+\frac{1}{t} \geq 2$)

trovare le migliori C_1, C_2 t.c.

$$C_1 \leq \frac{a}{a+b}+\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a} \leq C_2$$

prove: – $a=b=c \rightarrow \frac{3}{2}$

– $(1, M, M^2) \rightarrow \frac{1}{1+M}+\frac{M}{M+M^2}+\frac{M^2}{M^2+1} \simeq 1 \qquad M \gg 1$

$\simeq 0 \qquad \simeq 0 \qquad \simeq 1$

$$-\ (n^2, n, 1) \longrightarrow \underset{\substack{\wr\\ 1}}{\frac{n^2}{n^2+n}} + \underset{\substack{\wr\\ 1}}{\frac{n}{n+1}} + \underset{\substack{\wr\\ 0}}{\frac{1}{1+n^2}} \simeq 2$$

dim: $\sum \frac{a}{a+b} \geq 1$

$$\sum \frac{a^2}{a^2+ab} \geq \frac{(\sum a)^2}{\sum a^2+ab} = \frac{\sum a^2 + 2\sum ab}{\sum a^2 + \sum ab} \geq 1$$

$\Rightarrow C_1 = 1$

il testo è $\sum \frac{a}{a+b}$, noi prendiamo $\sum \frac{b}{a+b}$

$$= \frac{b}{b+a} + \frac{c}{c+b} + \frac{a}{a+c}$$

$$C_1 \leq \sum \frac{b}{a+b} \leq C_2 \qquad C_1 \leq \sum \frac{a}{a+b} \leq C_2$$

$$\sum \frac{a}{a+b} + \sum \frac{b}{a+b} = 3$$

$$C_2 \geq \underset{\substack{\mathbin{\rotatebox{90}{$\geq$}}\\ C_1}}{\sum \frac{a}{a+b}} = \underset{\substack{\mathbin{\rotatebox{90}{$\geq$}}\\ 3-C_2}}{3} - \sum \frac{b}{a+b} \quad \| \quad 3 - C_1$$

$C_1 \leq \frac{3}{2}$

$C_2 \geq \frac{3}{2}$

$$C_1 + C_2 = 3$$

ricaviamo $C_2 = 2$ (perché ci avviciniamo vicini con $(n^2, n, 1)$)

• trovare la più piccola costante K t.c. $(4x+5y+3z)^2 \le K(3x^2+4y^2+5z^2)$

$$(\sqrt{3}x \quad 2y \quad \sqrt{5}z) \cdot \left(\frac{4}{\sqrt{3}} \quad \frac{5}{2} \quad \frac{3}{\sqrt{5}}\right) = 4x+5y+3z$$

$$(4x+5y+3z)^2 \le (3x^2+4y^2+5z^2)\left(\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{5}}\right)^2\right)$$

$$\rotatebox{90}{$\le$} \; K$$

• $a^3b^6+b^3c^6+c^3a^6+3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3)$

divido per $a^3b^3c^3$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^3+\left(\frac{c}{a}\right)^3+\left(\frac{a}{b}\right)^3+3 \geq \frac{1}{a^2b^2c^2}(\quad) + \frac{1}{abc}(\quad)$$

oss: $\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$

magari è Schur su $\left(\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{a}\right)$?

fa il conto ed è VERO.

funziona anche $x=a^2b$ e cicliche

faccio Schur + altro.

A3

Titolo nota 07/09/2018

- successioni
- funzioni

$$a_n = \underbrace{2n^2+3n+1}$$

a_n = il numero di lettere "e" che servono per scrivere n in lettere

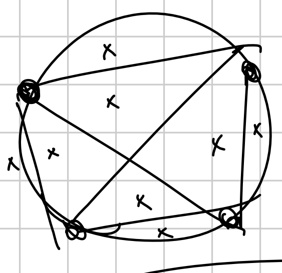
$a_0 = 1$
$a_1 = 0$
$a_2 = 1$

$a_{23} = 2$

1,2,4,8,16,32 ... $\rightarrow$

$$\begin{cases} a_n = 2^n & \text{per } n \leq 18000 \\ a_n = 0 & \text{per } n \geq 18001 \end{cases}$$

QUALUNQUE REGOLA



1,2,4,8,16,31

a_n = "somma dei numeri da 1 a n"

1	2	3	4	...	n	$\rightarrow a_n$
n	n-1	n-2	...	...	1	$\rightarrow a_n$

$2a_n$

n colonne ognuna con somma n+1

$$b_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$b_n \sum_{k=1}^{n} k^2$$

somma telescopica:

IDEA:

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 =$$

$$= (\cancel{2^3} - 1^3) + (\cancel{3^3} - \cancel{2^3}) + (\cancel{4^3} - \cancel{3^3}) + \dots + (\cancel{n^3} - \cancel{(n-1)^3}) + (n+1)^3 - \cancel{n^3}$$

$$= (n+1)^3 - 1$$

$$(n+1)^3 - 1 = \sum_{k=1}^{n} (k+1)^3 - k^3 = \sum_{k=1}^{n} \cancel{k^3} + 3k^2 + 3k + 1 - \cancel{k^3} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} 3k^2 + \sum_{k=1}^{n} 3k + \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= 3 b_n + 3\frac{(n+1)n}{2} + n$$

Conto... $\quad b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Allo stesso modo,

$$\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4 - k^4 \quad \text{mi consente di calcolare} \quad \sum_{k=1}^{n} k^3$$

(a patto di sapere già $\sum_{k=1}^{n} k^2$)

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Prog. aritmetica

$x_0 = b \quad x_1 = a+b \quad x_2 = 2a+b, \; \dots \quad x_n = na+b$

$$\begin{cases} x_0 = b \\ x_{k+1} = x_k + a \quad \forall k \geq 0 \end{cases}$$

$x_0 + x_1 + \dots + x_n = ??$ Stesso trucco di $1..4$

$b \quad a+b \quad 2a+b \quad \dots \quad na+b \rightarrow$

$na+b \quad (n-1)a+b \quad (n-2)a+b \quad \dots \quad b \rightarrow$

$$\sum_{k=0}^{n} ka+b = a\left(\sum_{k=0}^{n} k\right) + b\left(\sum_{k=0}^{n} 1\right) = a\frac{n(n+1)}{2} + b(n+1)$$

Prog. geometriche:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$$

$$\begin{cases} x_0 = k \\ x_{n+1} = ax_n + b \quad n = 0,1,2,\dots \end{cases} \quad \underline{es}: \begin{cases} x_0 = 37 \\ x_{n+1} = 2x_n + 1 \quad n = 0,1,2,\dots \end{cases}$$

Dipendenza dal termine precedente.

Formule chiuse?

Caso facile: $b=0$

$$\begin{cases} x_0 = x_0 \\ x_{n+1} = a\,x_n \qquad n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

FORMULA CHIUSA: $x_n = x_0 \cdot a^n$

Caso speciale:

$$\text{(ii)} \begin{cases} x_0 = 37 \\ x_{n+1} = 2x_n + 1 \qquad n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

Trucco: $y_n := x_n + C$

$x_n = y_n - C \qquad n=0,1,2,\ldots$

$$\text{(ii)} \quad y_{n+1} - \cancel{C} = 2(y_n - C) + 1 = 2y_n \cancel{-2C+1}$$

si semplificano se

$-C = -2C + 1$

$C = 1$

$$y_{n+1} = 2y_n$$

$\boxed{\text{se } C=1}$

$y_n := x_n + 1$

$$\begin{cases} y_0 = 38 \\ y_{n+1} = 2y_n \quad n=0,1,2,\ldots \end{cases}$$

$\Rightarrow y_n = 38 \cdot 2^n \qquad x_n = 38 \cdot 2^n - 1$

Questo trucco funziona sempre per $\begin{cases} x_0 = k \\ x_{n+1} = a x_n + b \end{cases}$ a patto che $a \neq 1$

Formula: $x_{n+1} = a x_n + b \quad n=0,1,\ldots \iff x_n = a^n x_0 + b\,\dfrac{a^n - 1}{a - 1}$ $\boxed{\text{se } a \neq 1}$

omogenea — termine noto — soluzione delle ricorrenze omogenee — sol. particolare di $x_{n+1} = ax_n + b$

(i) (ii) (iii) $\begin{cases} x_0 = k \\ x_1 = h \\ x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + c \end{cases}$ $\rightarrow$ servono due valori iniziali! $\quad n = 1, 2, 3, \dots$

Idea: trascuro (i) e (ii) per ora, e cerco succ. che risolvono (iii)

ES: $\begin{cases} \dots \\ \dots \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n \end{cases}$ (iii) $\quad n = 0, 1, 2, \dots$

Ha soluzioni:
- $y_0 = y_1 = y_2 = \dots = y_n = \dots = 1$

  $y_{n+2} = 4y_{n+1} - 3y_n$ ✓ per ogni n

- $z_0 = 1 \quad z_1 = 3 \quad z_2 = 3^2, \dots \quad z_n = 3^n$

soddisfa (iii)? $\quad \cancel{3^{n}}3^{2} \overset{?}{=} 4 \cdot \cancel{3^{n}}3^{1} - 3 \cdot \cancel{3^{n}} \qquad 3^2 \overset{?}{=} 4 \cdot 3 - 3$

- se $\{y_k\}, \{z_k\}$ soddisfano (iii), allora anche $u_k = \lambda y_k + \mu z_k$ soddisfa:

verifica: $\quad u_{k+2} = 4u_{k+1} - 3u_k \iff$

$\lambda \cancel{y_{k+2}} + \mu \cancel{z_{k+2}} \overset{?}{=} 4(\lambda \cancel{y_{k+1}} + \mu \cancel{z_{k+1}}) - 3(\lambda \cancel{y_k} + \mu \cancel{z_k}) \qquad$ ✓

$$u_n = \underline{57} \cdot 3^n + \underline{27{,}5} \cdot 1$$

Se ho anche cond. iniziali:

$$\begin{cases} x_0 = 5 \\ x_1 = 7 \\ x_{n+2} = 4x_{n+1} - 3x_n \quad n = 0, 1, \dots \end{cases}$$

C'è una u_n che soddisfa queste condiz. iniziali?

$$x_n = u_n = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 3^n \qquad \begin{cases} x_0 = \boxed{\lambda + \mu \cdot 1} \\ x_1 = \boxed{\lambda + \mu \cdot 3} \end{cases}$$

Riesco sempre a trovare dei λ, μ che soddisfano (è un sist. lineare)

Questa strategia funziona sempre!

$$\text{(iii)} \quad \begin{cases} x_0 \text{ dato} \\ x_1 \text{ dato} \\ x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$y_n = \alpha^n$ è soluzione di (iii)

$$\Leftrightarrow \quad \alpha^{\cancel{n}+2} = a \cdot \alpha^{\cancel{n}+1} + b \cdot \alpha^{\cancel{n}} \Leftrightarrow \alpha^2 = a\alpha + b$$

È un'equaz. di 2° grado in α, avrà due soluzioni α_1, α_2 (supponiamo che ce le abbia e che siano distinte) (*)

- $y_n = \alpha_1^n \qquad z_n = \alpha_2^n$ soddisfano (iii)

$u_n = \lambda \alpha_1^n + \mu \alpha_2^n$ soddisfano (iii) per ogni scelta di λ, μ

Per trovare la successione con i val. iniziali assegnati risolvo

$$\begin{cases} x_0 = u_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = u_1 = \lambda \alpha_1 + \mu \alpha_2 \end{cases}$$

Questo produce una successione $u_n = \lambda \alpha_1^n + \mu \alpha_2^n$ che soddisfa

$$\begin{cases} u_0 = x_0 \\ u_1 = x_1 \\ u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n \end{cases}$$

(se volete, potete dimostrare per induzione che due successioni che soddisfano (i) (ii) (iii) sono uguali)

ES: Fibonacci

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_{n+2} = x_{n+1} + x_n \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\alpha^{n+2} = \alpha^{n+1} + \alpha^n \iff \alpha^2 = \alpha + 1 \qquad \alpha_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1 \\ 1 = \lambda \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} + \mu \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} \lambda + \mu = 0 \Rightarrow \mu = -\lambda \\ 1 = \lambda \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) = \lambda \sqrt{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \mu = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Formula chiusa per Fibonacci:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

$x_0 = 0$ $x_1 = 1$
$x_2 = 1$ $x_2 = 2$
$x_3 = 3, \dots$

(*): cosa succede se $\alpha^2 = a\alpha + b$ non ha soluzioni reali? Uso le soluzioni complesse!

Cosa succede se ho due soluzioni coincidenti?

Prendo $y_n = \alpha_1^n$ $z_n = n\alpha_1^n$

$$\begin{cases} x_0 = \lambda + 0 \cdot \mu \\ x_1 = \lambda\alpha + \mu\alpha \end{cases}$$

Cosa succede se ho $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} + dx_{n-2}$?

equazione di IV grado, se la so risolvere posso fare le stesse cose: $u_n = \lambda\alpha_1^n + \mu\alpha_2^n + \nu\alpha_3^n + \xi\alpha_4^n$

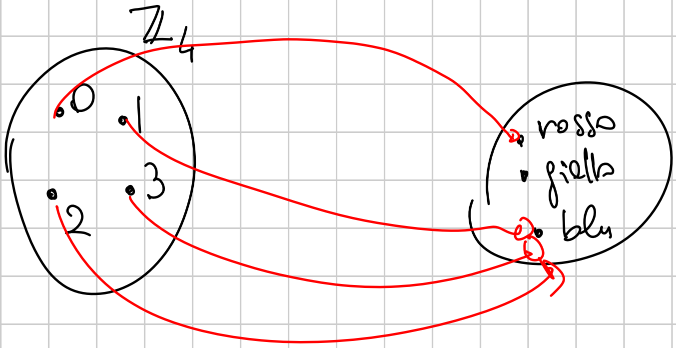
e risolvo un sist. con le 4 cond. iniziali

Se ho sol. multiple, prendo α_1, $n\alpha_1$, $n^2\alpha_1, \dots n^{k-1}\alpha_1$

EQUAZIONI FUNZIONALI

Cos'è una funzione?

Una regola univoca per associare a un elemento di un insieme uno di un altro:



$f(0)=\text{rosso}$
$f(1)=\text{blu}$
$f(2)=\text{blu}$
$f(3)=\text{blu}$

$$f: \underbrace{\mathbb{Z}_4}_{\text{DOMINIO}} \to \underbrace{\{\text{rosso, giallo, blu}\}}_{\text{CODOMINIO}}$$

(0, rosso)
(1, blu)
(2, blu)
(3, blu)

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dev'essere definita per ogni elemento di $\mathbb{R}$

$f(x) = 1/x$ non è una funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$

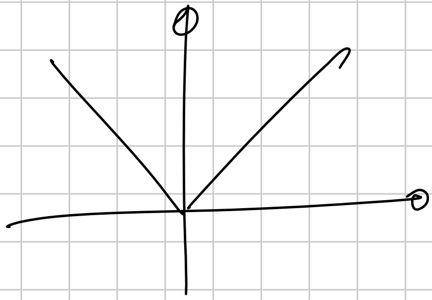
se vuoi, è una funzione da $\mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$

IMMAGINE: insieme degli elementi del codominio che "vengono raggiunti".

$$\mathrm{Im}(f) = \{y \in \text{codominio} : \text{esiste } x \text{ con } y = f(x)\}$$

ES: l'immagine della funz. sopra è $\{\text{rosso, blu}\}$

funzioni $\neq$ formule

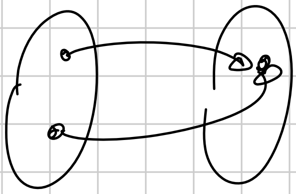


es: $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

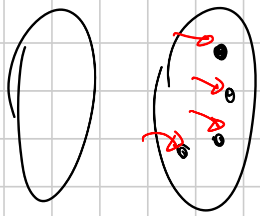
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

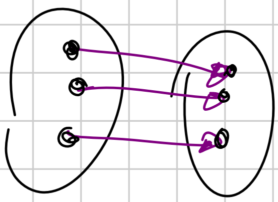
f iniettiva se $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$



f suriettiva se per ogni $z \in$ codominio esiste $x \in$ dominio t.c. $f(x) = z$

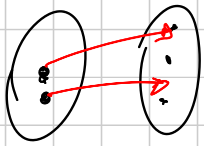


iniettiva + suriettiva = bigettiva
biiettiva



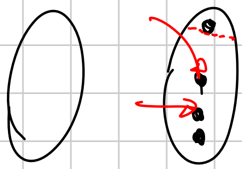
Oss: se A, B insiemi con un # finito di elementi, esiste $f: A \to B$ iniettiva se e solo se

$$|A| \leq |B|$$



suriettiva se e solo se $|A| \geq |B|$

biiettiva sse $|A| = |B|$



composizione: dati $g: A \to B$ $\quad f: B \to C$

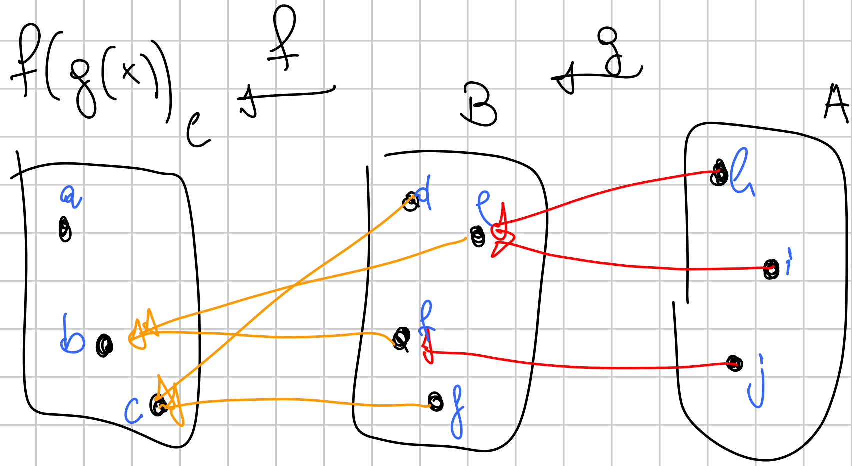
$f \circ g : A \to C \qquad x \in A$

$$f(g(x))$$

Teo: se $f \circ g$ è iniettiva, allora g iniettiva

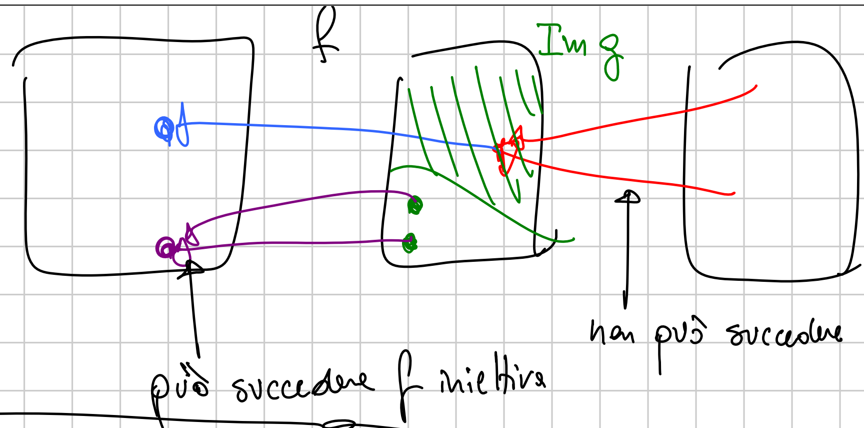
se $f \circ g$ è suriettiva, allora f suriettiva

Dim:



$\mathrm{Im}(f \circ g) = b \qquad \mathrm{Im}(f) = \{b, c\}$

Dim: se $f \circ g$ iniettiva, "frecce non si congiungono mai" andando da dx a sx



EQ. FUNZIONALE:

"Trovare tutte le $f: A \to B$ che soddisfano una proprietà"

ad es. Trovare $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

che soddisfano

$$(*) \qquad f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

ES: la funzione $z \mapsto 2z$ soddisfa l'equazione

la funzione $z \mapsto z^2$ <u>non</u> soddisfa

$$(x+y)^2 \neq x^2 + y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

EQUAZIONE DI CAUCHY: TROVA $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

t.c.

$$P(x,y): \quad \text{"} f(x+y) = f(x) + f(y) \text{"} \quad \forall x, y \in \mathbb{Q}$$

$$P(0,0): \quad f(0+0) = f(0) + f(0)$$

vera se e solo se $\boxed{f(0) = 0}$

STEP 1: "conquisto $\mathbb{N}$": $f(n) = an$ per ogni $n \in \mathbb{N}$
e per una certa costante $a \in \mathbb{Q}$

dim: $f(0) = 0$ ✓ Definisco $a = f(1) \in \mathbb{Q}$

$P(1,1)$: $f(1+1) = f(1) + f(1) = a + a$ ✓

induzione: $f(0) = 0$ ✓ $f(1) = a$ ✓ P.B.

P.I. $n \to n+1$ $P(n,1)$: $f(n+1) = f(n) + f(1) = an + a =$
$= (n+1)a$ ✓

STEP 2: conquisto $\mathbb{Z}$: $f(n) = an$ $\forall n \in \mathbb{Z}$

$P(-n,n)$ per un certo $n \in \mathbb{N}$:

$$: \underbrace{f(-n+n)}_{f(0)=0} = f(-n) + \underbrace{f(n)}_{an}$$

$\leadsto f(-n) = -an$

STEP 3: per ogni $x \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{N}$
$f(nx) = n f(x)$

Dim: induzione! (su n) $f(0) = 0$ ✓ $f(1 \cdot x) = 1 \cdot f(x)$ ✓ P.B.

P.I. $P(x, nx)$: $f(x+nx) = f(x) + \underbrace{f(nx)}_{\text{ip. ind.}}$

$$\Downarrow$$

$$f((n+1)x) = f(x) + n f(x) = (n+1) f(x)$$

STEP 4: conquisto $\mathbb{Q}$:

$f(x) = ax \quad \forall x \in \mathbb{Q}$, per una certa costante a

DIM: uso lo step 3 con $x = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$:

e $n = q$

$$ap \overset{\text{per lo step 2}}{=} f\left(\cancel{q} \cdot \frac{p}{\cancel{q}}\right) = q f(p/q) \qquad \text{vero } \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow f(p/q) = a\, p/q \qquad \forall p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$$

STEPS 1+2+3+4: se f soddisfa $P(x,y)$ $\forall x, y$, allora

$f(x) = ax$ per una qualche costante $a \in \mathbb{Q}$.

È vero che tutte le funzioni del tipo $f(x) = ax$

sono soluzioni, cioè soddisfano $P(x,y)$? ✓

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \rightarrow a(x+y) = ax + ay$$

Se avessi avuto quest'altro esercizio:

Trova $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ t.c.

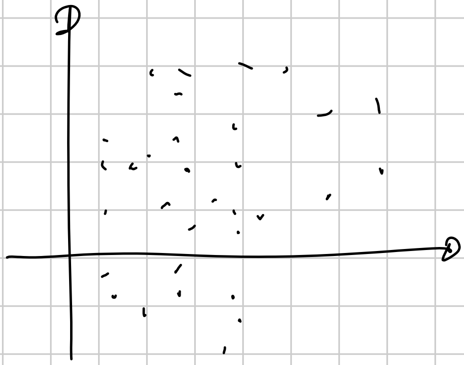
$P(x,y)$ $\quad f(x+y)=f(x)+f(y) \quad \forall\, x,y\in\mathbb{R}$

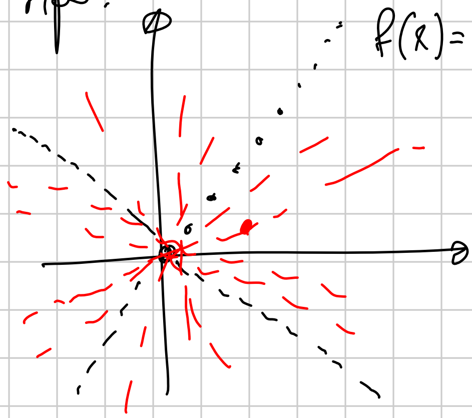
Le soluzioni sono le stesse?

se $f(x)=ax$, allora soddisfa $P(x,y)$

$$a(x+y)=ax+ay \quad \forall x,y\in\mathbb{R}$$

Però ci sono anche altre soluzioni che soddisfano $P(x,y)$ ma non sono di quel tipo!





$f(x)=x \quad \forall x\in\mathbb{Q}$

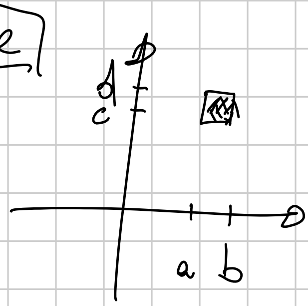
$f(x)=-\frac{1}{2}x$ se $x/\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$

$P(x,y)$
$f(x+y)=f(x)+f(y)$ EQUAZIONE DI CAUCHY

Teo (comune) CARATT. SOLUZ. EQ. DI CAUCHY

Se f risolve l'equazione di Cauchy [e]

- esiste un intervallo $[c,d]$ tale che $f(x)\notin[c,d]$ per ogni $x\in[a,b]$ $\quad a<b,\ c<d,$



<u>allora</u> $f(x)$ è della forma $f(x) = \lambda x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

<u>ES</u>: trovare $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ t.c.

$$P(x,y):\quad f(xf(y)) = xy + f(x) - x \qquad \forall x,y \in \mathbb{Q}$$

TENTATIVI:

$$P(0,y):\quad f(0) = 0 + f(0) - 0$$

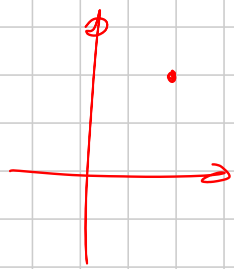
non implica nulla! :(

$$P(x,0):\quad f(xf(0)) = 0 + f(x) - x \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

Provo a dimostrare iniettività/suriettività!

<u>ES</u>: $P(x,0)$: $f(xf(0)) = 0 + f(x) - x$

$$P(1,y):\quad \underbrace{f(f(y))}_{f \circ f} = \underbrace{y + f(1) - 1}_{y + \text{costante}}$$



y + costante: iniettiva e suriettiva!

$y_1 + c \neq y_2 + c$ se $y_1 \neq y_2$

ogni z si scrive come $y + c$

→ f iniettiva

f suriettiva

suriettività: esiste un valore z t.c. $f(z) = 0$.

$$P(x,z):\quad \underbrace{f(xf(z))}_{= f(0)} = xz + f(x) - x \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$$f(x) = x - xz + f(0) \qquad \forall x \in \mathbb{Q}$$

$\Rightarrow$ esistono a, b tali che $f(x) = ax + b \ \forall x \in \mathbb{Q}$

Quali funzioni di questa forma soddisfano $P(x,y)$?

$$a\left(x(ay+b)\right) + b = xy + ax + b - x$$

$$a^2xy + abx + \cancel{b} = xy + ax + \cancel{b} - x \qquad \forall x, y \in \mathbb{Q}?$$

deve valere che $a^2 = 1$, $ab = a - 1$

$a = 1, b = 0$ oppure $a = -1, b = 2$

Le soluzioni sono $f(x) = x$, $f(x) = 2 - x$

ERRORI COMUNI:

- $f(f(x)) = f(x+8)$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}}$ $\not\Rightarrow$ $f(x) = x + 8$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}}$

  solo se f iniettiva

- $f(f(x)) = f(x) + 8$ $\boxed{\forall x \in \mathbb{Q}}$ $\Rightarrow$ sostituisco $z = f(x)$

  $f(z) = z + 8$

  ⚠ $\boxed{\forall z \text{ t.c. esiste } x \ z = f(x) \qquad \forall z \in \operatorname{Im}(f)}$

  se f suriettiva, $\forall z \in \mathbb{Q}$

- $f(x^2) = x^2 + 8 \quad \forall x \in \mathbb{Q} \ \overset{z = x^2}{\Rightarrow} \ f(z) = z + 8 \quad \forall z$ positivo!

A3-3, A3-6, A3-10

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

$P(x,y)\qquad f\big(xf(x)+f(y)\big)=[f(x)]^2+y \qquad \forall x,y\in\mathbb{R}$

STEP 1: biiettività

$P(0,y)\qquad \underbrace{f(f(y))}_{f\circ f}=\underbrace{[f(0)]^2+y}_{\text{iniettiva + suriettiva (in } y)}$

$\Rightarrow f$ iniettiva, suriettiva

$\Downarrow$

$\exists z$ t.c. $f(z)=\ldots$

STEP 2: $f(f(y))=y \quad \boxed{\forall y\in\mathbb{R}}$

$\exists z$ t.c. $f(z)=0$ (per suriettività)

(*) $P(z,y)$: $f(f(y))=y \quad \boxed{\forall y\in\mathbb{R}}$

STEP 3: $\forall a\in\mathbb{R},\ \forall y\in\mathbb{R}$

$P(f(a),y)$: $f\big(f(a)\underbrace{f(f(a))}_{a}+f(y)\big)=[\underbrace{f(f(a))}_{a}]^2+y$

$= f\big(f(a)a+f(y)\big) = a^2+y$

$$P(a, y) : f(a f(a) + f(y)) = [f(a)]^2 + y$$

sottraendo termine a termine, resta $[f(a)]^2 = a^2 \ \forall a \in \mathbb{R}$

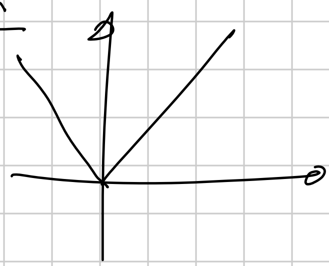
$$(*) \quad \boxed{f(a) = \pm a \quad \forall a \in \mathbb{R}}$$

due soluzioni: $f(x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = -x \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\rightarrow f(x) = x$ per un po' di x reali

$f(x) = -x$ per gli altri



$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ -x & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

"mistone"

Come lo escludo?

Suppongo di avere a t.c. $f(a) = a \neq 0$

b t.c. $f(b) = -b \neq 0$

$P(a, b)$:

$$f(a f(a) + f(b)) = [f(a)]^2 + b$$

$$f(a^2 - b) = a^2 + b$$

$a^2 - b = a^2 + b \Rightarrow -b = b,$ imp.

Quindi vale una tra:

$b - a^2 = a^2 + b \Rightarrow -a^2 = a^2$ imp.

$f(x) = x \qquad f(x) = -x.$

A3.6

$$x_0 = 1 \qquad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i \qquad n = 0, 1, \dots$$

MODO 1:

$$y_n := \sum_{i=0}^{n} x_i$$

$x_1 = 6x_0 - 2x_0 = 4x_0 = 4$

$$x_{n+1} = 6x_n - 2y_n$$

• $\boxed{y_n - y_{n-1} = x_n}$

$y_{n+1} - y_n = x_{n+1}$

$$\boxed{y_{n+1} - y_n = 6(y_n - y_{n-1}) - 2y_n}$$

$$y_{n+1} = 5y_n - 6y_{n-1}$$

MODO 2

$(-1)\quad x_{n+1} = 6x_n - 2\sum_{i=0}^{n} x_i$

$(+1)\quad x_{n+2} = 6x_{n+1} - 2\sum_{i=0}^{n+1} x_i$

$$x_{n+2} - x_{n+1} = 6(x_{n+1} - x_n) - 2x_{n+1}$$

$$x_{n+2} = 5x_{n+1} - 6x_n$$

$\alpha^2 = 5\alpha - 6 \qquad \alpha^2 - 5\alpha + 6 = 0 \qquad (\alpha-2)(\alpha-3) = 0$

$u_n = \underline{\lambda} \cdot 2^n + \underline{\mu} \cdot 3^n \qquad u_0 = 1$

$u_1 = 4$ (calcolo x_1 brutalmente dal testo)

$$\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 4 = \lambda \cdot 2 + \mu \cdot 3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} \lambda = - \\ \mu = \end{matrix}$$

$$u_n = - \ \cdot 2^n + \ \cdot 3^n$$

Determinare x_{2002}: $\qquad x_{2002} = - \ \cdot 2^{2002} + \ \cdot 3^{2002}$

$\to a$ parametro reale fissato

Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x^2 + axy + y^2) = x^2 + axy + y^2 \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

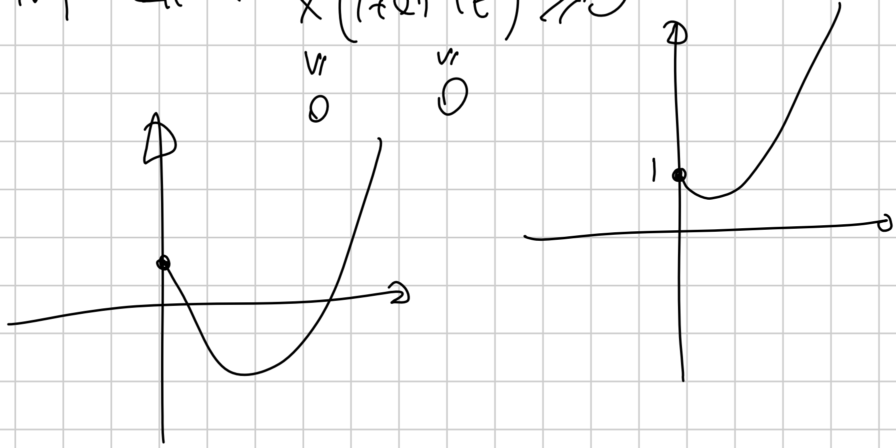
Quali valori possono assumere $f(1)$, $f(-1)$?

$x = 1$, $y = 0$: $f(1) = 1$

$f(z) = z \quad \forall z$ che potete scrivere come $x^2 + axy + y^2$ per $x, y \in \mathbb{R}$

$$x^2\left(1+a\frac{y}{x}+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right)=x^2(1+at+t^2),\quad \text{con } t=y/x$$

se $1+at+t^2$ può assumere solo valori positivi, allora $\underset{\overset{\vee\!\shortmid}{0}}{x^2}\underset{\overset{\vee\!\shortmid}{0}}{(1+at+t^2)}\geq 0$



$1+at+t^2=0$ si risolve se e solo se $\Delta=a^2-4$ è positivo

cioè se $|a|\geq 2$

- se $|a|>2$, allora $x^2(1+at+t^2)$ assume valori positivi e negativi
- se $|a|\leq 2$, assume solo valori positivi o nulli

$x^2+axy+y^2$

se esistono x,y t.c. $x^2+axy+y^2=-k$ $k\geq 0$, allora $\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\right)^2+a\left(\frac{x}{\sqrt{k}}\cdot\frac{y}{\sqrt{k}}\right)+\left(\frac{y}{\sqrt{k}}\right)^2=-1$

se $|a|>2$, allora riesco a scrivere $z=-1$

e quindi $f(z)=z \Rightarrow f(-1)=-1$

se $|a|\leq 2$, $x^2+axy+y^2$ assume solo valori

positivi $\Rightarrow$ il testo non mi dà nessuna

condizione su f (valori negativi)

Esibisco f che soddisfa $P(x,y)$ e

che $f(-1)=$ un qualunque valore a mia scelta

$$\begin{cases} f(z)=z & \forall\, z\geq 0 \\ f(z)= \text{quello che voglio per } z<0 \end{cases}$$

Definisco $f(t)=\begin{cases} t & \text{se } t\geq 0 \\ 37 & \text{se } t<0 \end{cases}$

+ verifico che soddisfa $P(x,y)$

Combinatoria 1 Basic [Tess]

Titolo nota 03/09/2018

i) Conteggi

ii) Double-Counting

CONTEGGI

Regola della somma

$$X = A \sqcup B$$

$$|X| = |A| + |B|$$

unione $\boxed{\text{disgiunta}}$

Regola del prodotto

se $X = A \times B$

$$|X| = |A| \cdot |B|$$

indipendenza

Esempi

1) A, B insiemi (finiti)

$A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$n = |A|$

$$|\{f : A \to B\}| = *$$

posso scegliere a_1 in $|B|$ modi diversi

indip. a_2 " "

indip. a_3 " "

$$* = |B|^n = |B|^{|A|}$$

2) Funzioni iniettive $= *$

similmente a prima scelgo prima a_1, poi a_2, ...

questa volta ho

$$* = |B| \cdot (|B|-1) \cdot (|B|-2) \cdot \ldots \cdot (|B|-|A|+1).$$

3) Funzioni suriettive

per la regola della somma:

$$|\{f \text{ suriettive}\}| + |\{f \text{ non suriettive}\}| = |\{f\}|$$

$F_m = \{ f :$ l'immagine manca almeno m elementi $\}$

mi piacerebbe che fosse

$$|F_1| \neq |B| \cdot (|B|-1)^{|A|} = g_1$$

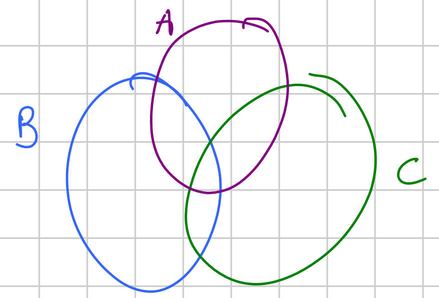
l'elemento da escludere

le funzioni senza un elem. in B

$$g_m = \binom{|B|}{m} \cdot (|B|-m)^{|A|}$$

$$|F_1| = g_1 - g_2 + g_3 - g_4 \ldots + (-1)^{|B|-1} \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g_{|B|}}.$$

Principio di inclusione-esclusione

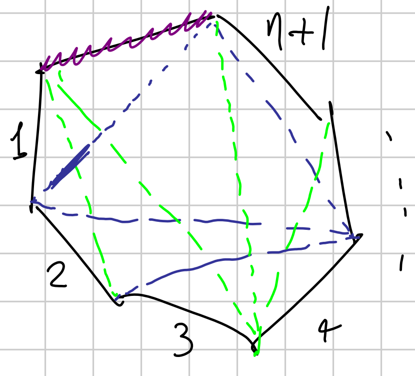


$$
\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A| + |B| + |C| \\
&\quad - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| \\
&\quad + |A \cap B \cap C| .
\end{aligned}
$$

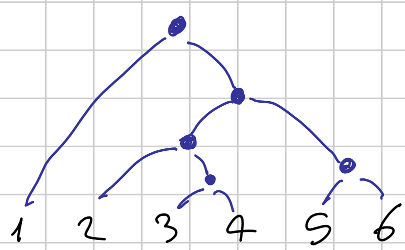
Regola della Bigezione

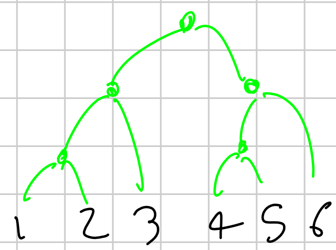
$f: A \longrightarrow B$ bigezione

allora $|A| = |B|$

4) 

poligono convesso $n+2$ lati



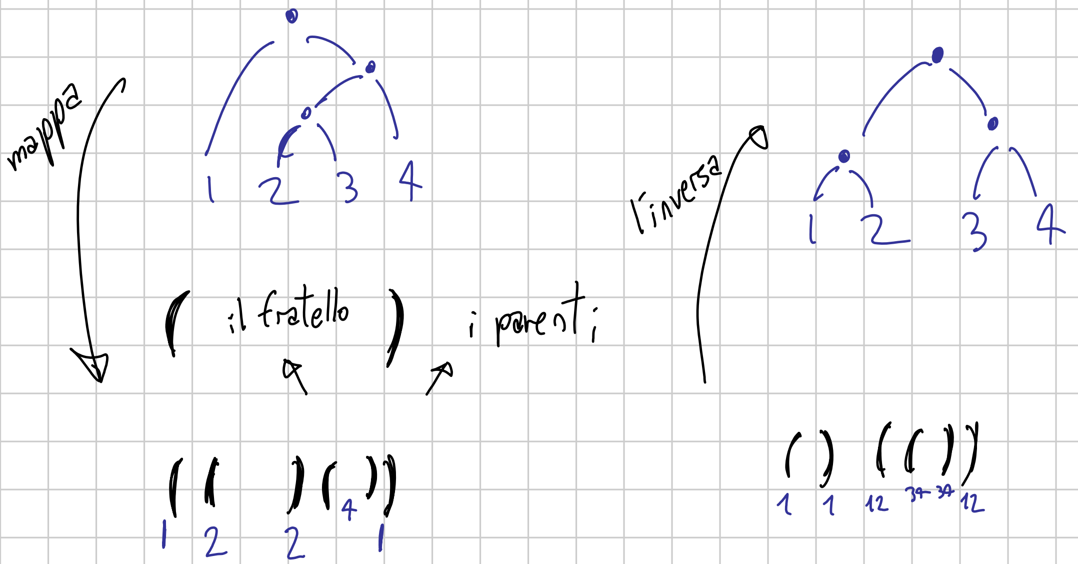


ho descritto una funzione dall'insieme delle triangolaz.
all'insieme degli alberi con radice gerarchici
e $n+1$ foglie
e binari (ogni nodo $\neq$ foglia ha 2 figli).

per casa: costruire l'inversa

5) calcolare il numero di questi alberi

voglio associare n coppie di parentesi a ciascun albero



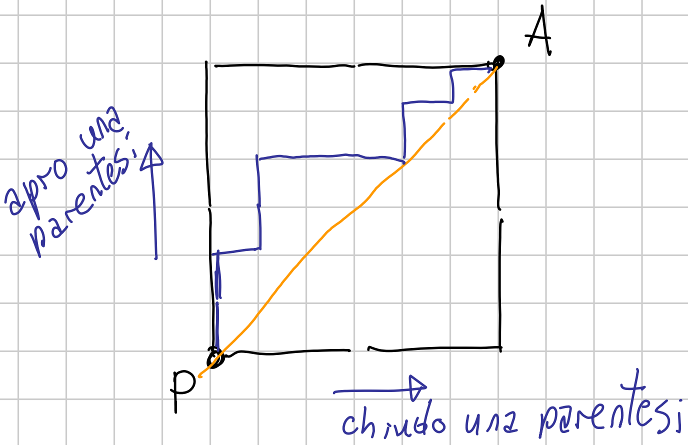
per casa: definire per bene le 2 mappe

6) Calcolare il numero di scritture di n coppie parentesi

(( ) (( ))) ( ) ( )

0 1 2 1 2 3 2 1 0 1 0 1 0

$\textcircled{}$ = numero di aperte − numero di chiuse ≥ 0



percorsi monotoni su griglia $n \times n$ lati che siano sopra la diagonale

Ricorsione

7) Calcolare il numero di partizioni di un insieme con n elem. su k sottoinsiemi

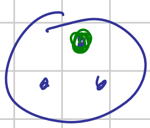
$\left\{ {n \atop k} \right\}$ "

Oss. $k=1$ $\quad \left\{ {n \atop 1} \right\} = 1$

$k=n$ $\quad \left\{ {n \atop n} \right\} = 1$

$$\left\{ {3 \atop 2} \right\} = \left\{ {2 \atop 1} \right\} + 2 \left\{ {2 \atop 2} \right\}$$

se sta da solo $\qquad$ se lo aggiungo ad un altro sottoinsieme



$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

D - C

Il principio è il seguente:

$$\begin{array}{|cccc|}
a_{11} & a_{12} & \dots & \\
a_{21} & a_{22} & \dots & \\
\dots & \dots & \dots & \\
\dots & \dots & \dots &
\end{array}$$

Voglio sommare gli a_{ij}

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right)$$

Gauss a 9 anni ...

$$1 + 2 + \dots + 100$$

$$\begin{array}{|ccccccc|}
1 & 2 & 3 & 4 & \dots & \dots & 100 \\
100 & 99 & 98 & & \dots & \dots & 1
\end{array}$$

$$2 \left(\sum_{i=1}^{100} i \right) = 100 \cdot (101)$$

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i} = 2^{n}$$

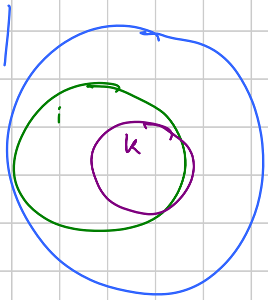
$Q = \{$ il numero di sottoinsiemi di uno con n elem. $\}$

$Q = 2^{n}$ per bigezione + funzioni

$Q = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}$ calcolo il numero di sottoinsiemi sommando prima quelli della stessa cardinalità

$$\sum_{i=k}^{n}\boxed{\binom{n}{i}}\boxed{\binom{i}{k}} = \binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$$

$n=|U|$



Scelgo prima k elementi, poi i sottoinsiemi dei riman.

$$\binom{n}{k}\cdot 2^{n-k}$$

APMO 18 . 1

Una config. di quadrati nel piano è bella quando

- tutti i quadrati sono congruenti
- 2 quadrati si possono toccare solo ai vertici
- ogni quadrato tocca 3 quadrati

Dire per quali $2018 \leq n \leq 3018$, $\exists$ una conf. bella con n quadrati.

Sol.

La risposta è: solo per n pari

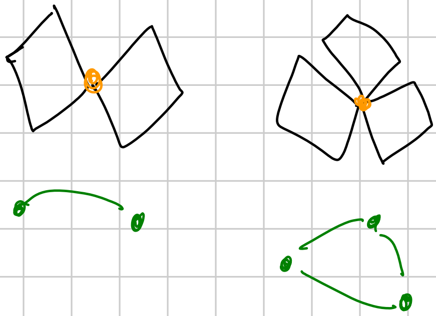
Usiamo un D-C per mostrare che n dispari non si fa.

Contiamo

$$Q = \Big\{ (\underset{\text{quadrato}}{\square}, \underset{\text{vertice}}{v}) : v \in \square \text{ e } v \text{ è in comune con almeno un altro } \square \Big\}$$

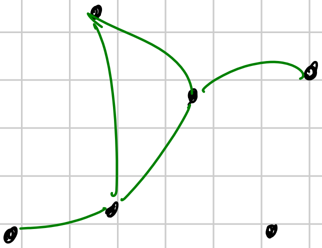
Contiamo raggruppando prima i $\square$:

$$Q = 3 \cdot \text{numero di } \square = 3n$$



Pausa grafi

(V, E)



V vertici

$E \subseteq V^2$

$\deg(v) = |\{\text{archi uscenti da } v\}|$

Esempio classico di D-C :

$Q = |\{(v, \text{arco uscente})\}|$

$$\sum_v \deg(v) = Q = 2 \cdot |E|$$

Fine pausa astratta

Costruiamo un grafo dove i nodi sono i $\square$

e gli archi sono le adiacenze di $\square$

qui ottiamo la tesi applicando il D-C classico

Alternativamente, si poteva scegliere

$Q' = \{ (\square, \square) : \text{sono adiacenti} \}.$

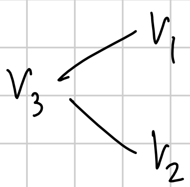
C1.10

Ad un party prendono parte ...

C'è un grafo su $12k$ vertici:

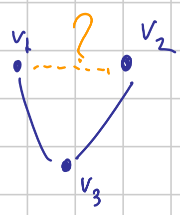
$$\deg(v) = 3k+6$$

$\forall\ v_1, v_2$ vertici, $\exists$ esattamente N v_3 t.c.



Tesi: trovare i k che funzionano ...

Sol: facciamo la parte negativa

$Q = \Big| \{ (\{v_1, v_2\}, v_3) :$  $\} \Big|$

$$\binom{12k}{2} \cdot N = Q = 12k \cdot \binom{3k+6}{2}$$

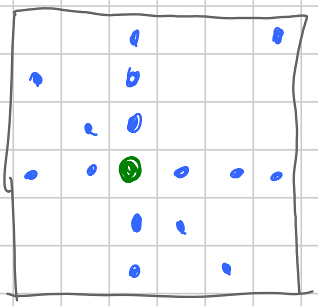
$$N = \binom{3k+6}{2} \cdot \frac{2}{(12k-1)}$$

Deve essere N intero, quindi:

$$\frac{(3k+6)(3k+5)}{12k-1} \in \mathbb{Z}$$

..... k può essere soltanto 3.

Un esempio che funziona è il seguente



sono i vertici

e le adiacenze sono queste:

Esercizi conteggi

104 – 107, 111 p. 20

Es: costruire una mappa

$$\{\text{funzioni suriettive da } n \text{ a } k\} \longrightarrow \{\text{partizioni di } n \text{ in } k\}$$

e dedurre una formula per calcolare $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Es: EGMO18.3) N nani in fila, $N_1, N_2, \dots, N_N$ sono inizialmente disposti in un qualche ordine. Ad ogni mossa, un nano N_j può superare j nani davanti a lui. Calcolare il massimo numero di mosse.

Fare solo la seguente: contare il massimo numero di salti di $N_N, N_{N-1}, N_{N-2}, \dots$

Esercizi D-C.

119 – 121, 124 p. 21

EGMO18.4) Si mettono dei domino $\boxed{|}$ in una griglia $n \times n$ $(n \geq 3)$ tali che $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. ogni riga e ogni colonna prende k domini. Determinare il minimo numero di domini in tale configurazione.

Fare solo la parte negativa: dimostrare che $|\text{domini}| \geq \frac{2}{3} n$ o $|\text{domini}| \geq 2n$ a seconda $3 \mid n$ $3 \nmid n$

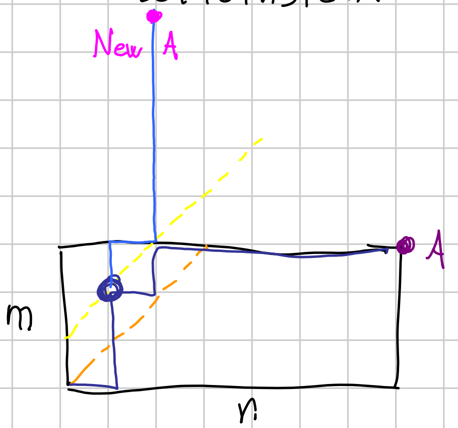
Correzione

111) $n = a_1 + \dots + a_k$

n palline $k-1$ stanghette le dividono in k

sottoinsiemi: $\binom{n+k-1}{k-1}$

107)



i percorsi che non superano =

tutti i percorsi − quelli che la superano

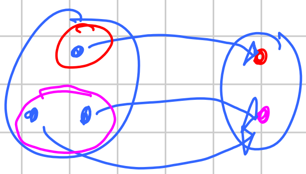
$$\binom{m+n}{n} \qquad = \binom{m+n}{m-1}$$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

~~pe~~ casa

La mappa $\{\text{surrettive}\} \longrightarrow \{\text{partizioni}\}$

$$f: \underset{n}{A} \longrightarrow \underset{k}{B}$$



ci sono $k!$ funzioni (una per ogni ordinamento degli elem. di B) che forniscono la stessa partizione

$$|\{f \text{ surrettive}\}| = k! \left\{ n \atop k \right\}$$

EGMO 18.3

Sia S_j il numero di salti di N_{N-j}.

Calcolare i massimi S_j possibili.

$S_0 = 0$

$S_1 \le 1$

Oss: il nano N_j salta almeno un tizio N_i con $i \geq j$.

$$S_k \le 1 + S_{k-1} + S_{k-2} + \dots + S_1$$

$j \quad i \longrightarrow i \quad j$

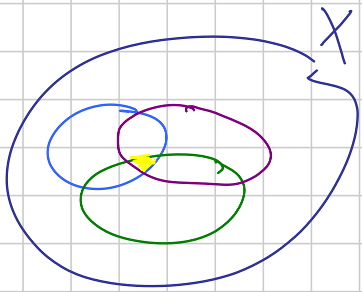
prima che capiti nuovamente questa situazione anche i deve saltare

$$\Rightarrow S_k \le 2^k - 1$$

Es 119

$$\sum_{(A,B,C) \in Y^3} |A \cap B \cap C|$$

$Y = P(X)$



$\|$ D-C ⊛

$$\sum_{x \in X} \underbrace{\text{numero di volte che compare } x \text{ in } A \cap B \cap C}$$

=

tolto x, mi rimane $A \setminus \{x\}$, $B \setminus \{x\}$, $C \setminus \{x\}$

ho $\left(2^{n-1}\right)^3$ $\quad n = |X|$

$$= n \cdot 8^{n-1}$$

$$\circledast \quad Q = \left| \left\{ \left((A,B,C), x \right) : x \in A \cap B \cap C \right\} \right|$$

121) $$\sum_{k \text{ pari}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ dispari}} \binom{n}{k} \qquad n \geq 1$$

sott. card pari $\longleftrightarrow$ sott. card. dispari

Scelgo $x_0 \in X \quad |X| = n$

faccio prima questa bigezione:

$$\{A \subseteq X : x_0 \in A\} \longleftrightarrow \{B \subseteq X : x_0 \notin B\}$$

$$B \cup \{x_0\} \longmapsfrom B$$

124) 72 stagisti: risolvono ciascuno almeno uno dei problemi di una gara.

Tesi: dim. che $\exists$ almeno un sottoinsieme $\neq \emptyset$ di problemi per i quali il numero di stagisti che li hanno risolti tutti è pari.

$$Q = \left| \left\{ (A, s) : \begin{array}{l} s \text{ è uno stagista che ha risolto tutti i problemi} \\ \text{in } A \subseteq \{\text{problemi della gara}\} \end{array} \right\} \right|$$

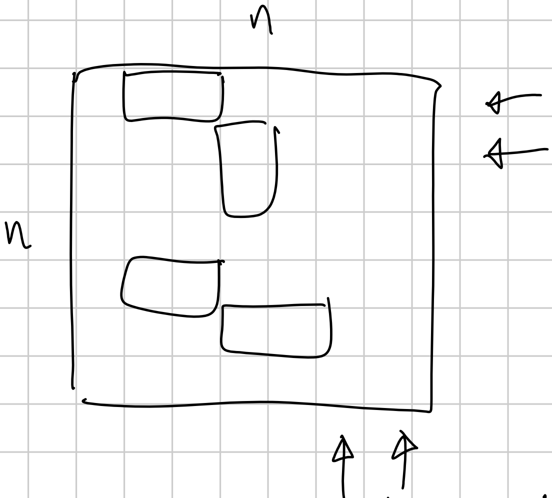
Contiamo raccogliendo A

$$\sum_{A \subseteq P} \text{numero di stagisti che risolvono } A = Q = \sum_{s} \left(2^{|\{\text{problemi risolti da } s\}|} - 1 \right)$$

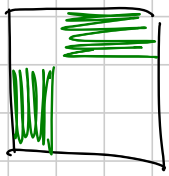
$2^{|P|} - 1$

vorrei $Q \equiv 0 \ (2)$

EGMO18.4



esattamente k domini per riga e per colonna



$$Q = \left| \left\{ (r/c, \square) \text{ t.c. } r \cap \square \neq \emptyset \right\} \right|$$

$$2nk = \sum_{r} k + \sum_{c} k = Q$$

$$Q = \sum_{\text{domini}} 3 = 3\,|\text{domini}|$$

$|\text{domini}| = \frac{2}{3} n k$

se $3 \mid n$ $\quad |\text{domini}| = 2 \cdot \frac{n}{3} \cdot k \geq 2 \cdot \frac{n}{3}$

se $3 \nmid n \Rightarrow 3 \mid k \Rightarrow k \geq 3$

$|\text{domini}| \geq 2 \cdot n$.

Combinatoria 2 Basic [Tess]

Titolo nota 07/09/2018

Non Esistenza	Esistenza Non costruttiva	Esistenza Costruttiva
D-C	Pigeonhole	Contruzioni induttive
Invarianti	Principio dell'estremale	Dare l'esempio
Colorazioni		Algoritmi costruttivi

Invarianti

Es 1) Sulla lavagna sono scritti i numeri $1, \dots, n$ → il sistema che varia

mossa: cancello a e b, al loro posto scrivo $|a-b|$

~~Dimostrare che~~ determinare per quali n, se non posso più muovere, sulla lavagna c'è un singolo numero dispari. Condizione finale

Oss: , la tecnica generale: se c'è un sistema che varia, cerco invarianti I

L'applicazione è: controllo I allo stato iniziale e allo stato finale. Se i due valori ottenuti sono diversi allora non posso arrivare allo stato finale.

Sol: $I := \sum$ numeri scritti $\pmod 2$

verifico l'invarianza:

ci sono $a_1, \dots, a_k$, poi faccio la mossa su wlog a_1, a_2, allora ottengo $|a_1 - a_2|, a_3, \dots, a_k$

prima ho $\sum_{i=1}^{k} a_i \pmod 2$ dopo ho $\sum_{i=3}^{k} a_i + |a_1 - a_2|$

quindi la differenza è $a_1 + a_2 - |a_1 - a_2| \pmod 2$

$$\equiv 0 \pmod 2$$

All'inizio $I = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

alla fine $I = a_{finale}$

La risposta è: sicuramente deve essere $\frac{n(n+1)}{2}$ dispari

per il viceversa è ovvio che riesco ad ottenere un singolo numero e la parità finale è determinata.

Regola generale: se ci sono "mosse" che modificano uno stato, cerco quantità invarianti.

Es 2) Un cavallo degli scacchi si muove su una scacchiera 47×47. È possibile visitare tutte le caselle 1 sola volta tornando al punto di partenza?

Sol: lo stato è la casella dove c'è il cavallo

ogni volta che faccio 2 mosse, il colore della casella non cambia
(se faccio una sola mossa, il colore cambia)

Quindi la successione delle caselle visitate

visito un numero pari di caselle. ($47 \times 47 \neq 0\ (2)$).

Es 3) Sulla lavagna ci sono 8, 10, 15

posso toglierne 2 e scrivere $\frac{3a-4b}{5}$, $\frac{4a+3b}{5}$.

Posso avere alla fine 12, 13, 14?

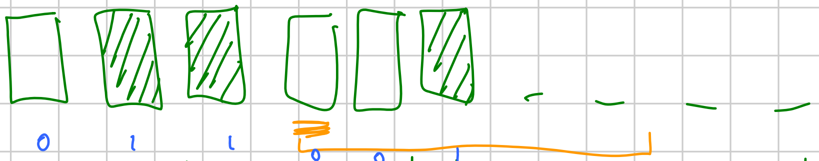
Posso ottenere numeri x, y, z t.c. $|x-12|$, $|y-13|$, $|z-14|$ < 1 ?

Sol: l'invariante è $a^2+b^2+c^2$.

(in particolare le risposte sono no)

Es 4) Ci sono 2018 carte disposte sul tavolo

ciascuna ha 2 facce, quella bianca e quella nera



posso scegliere una carta bianca e capovolgere le 50 carte da questa scelta verso destra (se ce ne sono 50).

Dimostrare che sono possibili solo finite mosse.

Regola generale: se trovo una quantità M che può solo crescere, ma ho finiti stati, allora posso fare solo finite mosse.

M := il numero binario che ha nella cifra i-esima
$\begin{cases} 1 & \text{se la carta } i\text{-esima è nera} \\ 0 & \text{" " bianca} \end{cases}$

È chiaro che M è crescente:

perché M(stato dopo la mossa) − M(stato prima della mossa)

$$= \begin{array}{l} 1 * * * \ldots * 0000 \\ 0 \underbrace{* * * \ldots *}_{\text{cifre che non so}} 0000 \end{array} - \quad > 0$$

↑ i-esima cifra

EGMO 18.3 (a) − domanda intermedia −
dimostrare che i salti effettuabili sono finiti.

Sol: il nano j-esimo salta un nano i-esimo con $i > j$

M = un numero in base $n+1$
alla cifra i-esima scrivo la posizione del nano i-esimo

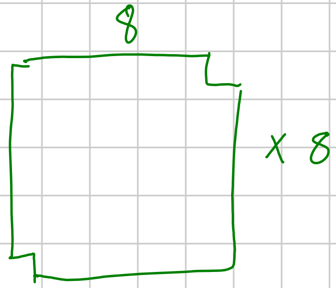
3
2
1 ← l'ultimo

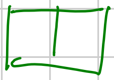
$\underbrace{1}\underbrace{2}\underbrace{3}$

↑ posizione di 1

Colorazioni

Es 5) Voglio tassellare



con 

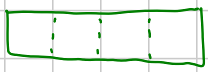
E' possibile?

Sol: la risposta è no

posso colorare a scacchiera

- ogni domino copre una bianca e una nera
- la scacchiera conta 32 bianche e 30 nere.

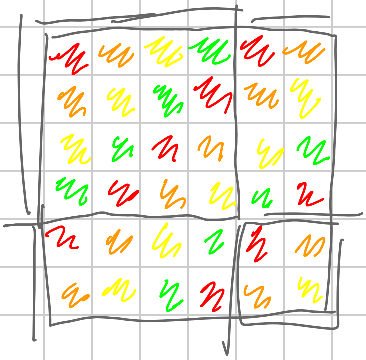
Es 6) Quali sono i rettangoli $n \times m$ che posso tassellare

con  (4×1) ?

Sol: $4 \mid n$ o $4 \mid m$ si riesce a fare (una striscia alla volta)

Contando i □ ottengo $4 \mid n \cdot m$

Devo ancora escludere $2 \| n$, $2 \| m$

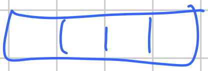


$= \frac{n \cdot m}{4}$

$= \frac{n \cdot m}{4} + 1$

$= \frac{n \cdot m}{4}$

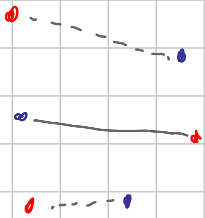
$= \frac{n \cdot m}{4} - 1$

Ogni  prende un colore per tipo

Principio dell'estremale.

Tecnica generale: il problema vi chiede un oggetto con la proprietà P. Allora mi invento una quantità Q e scelgo l'oggetto m t.c. m è massimale rispetto Q. Dimostro che m ha la proprietà P: per assurdo se non ce l'ha riesco a costruire m' cambiando un po' m, tale che $Q(m') > Q(m)$

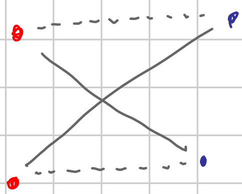
Es 7)



Voglio match tra • e • t.c. non ci sono intersezioni tra i segmenti. Dimostrare che è sempre possibile. (a 3 a 3 non allineati)

Sol: fra tutti i match, considero (uno di) quelli con somma delle lunghezze minimale.

Per assurdo



costruisco un nuovo matching tutto uguale tranne
questi 2 collegamenti, metto, invece, quelli ------
La lunghezza totale è scesa!

Giochi

Tecnica generale: ci sono Alberto e Barbara. Uno dei 2 vince..

Dato un gioco finito (ogni successione di mosse termina)
in cui ad ogni stato finale è associato un vincitore

È vero per induzione: costruisco l'albero di tutte le configuraz.
ad ogni nodo associamo il giocatore che partendo da quella "
ha una strategia vincente. L'induzione è sulla distanza dai vertici finali.
P.B. Coloro gli stati finali
P.I. dato un nodo n, guardo tutte le conf. raggiung. con 1 mossa
per ipotesi induttiva, per ciascuna so dire quale giocatore vince
Se ne esiste una in cui il giocatore di turno perde, allora scelgo quella mossa e n è un nodo per cui il gioc. di turno vince.
Altrimenti, sono spacciato e n è un nodo perdente.

Riassunto: Se riesco a dividere l'insieme delle config.

in 2: quelle vincenti per il giocatore di turno W

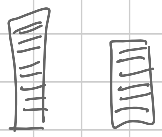
e quelle perdenti " " L

tali che $\forall\, n \in W$ $\exists$ mossa che manda n in L

$\forall\, n \in L$ $\forall$ mossa, n viene mandato in W

Ho risolto il gioco e so dire chi vince con la conf. iniziale a seconda che questa sia in W o in L.

BMO18. 3 A e B giocano al seguente:

2 pile  , ad ogni mossa, il giocatore di turno sceglie una pila con numero pari, la divide a metà e pone una delle metà sopra l'altra pila.

Perde chi non può più muovere. Determinare le conf. iniz. tali che B ha una strategia vincente.

Oss: il gioco non è finito:  sono possibili un numero arbitrario di mosse.

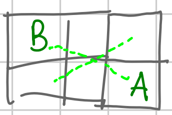
IMO 18 . 4 A e B pongono pedine su una scacchiera 1000×1000. A può mettere solo dei cavalli (in modo che non si mangino a vicenda), B può mettere solo delle pedine. (al + un pezzo per casella)

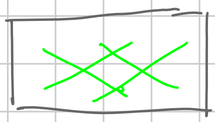
Quanti cavalli è sicuro di mettere A al massimo?

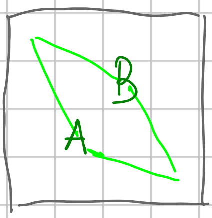
Sol

Oss: i cavalli sulle caselle nere non si attaccano, non ho vincoli; A è sicuro di riuscire a mettere $\frac{1000\times1000}{4}$ cavalli.

Euristica: lavoro su scacchiere piccole

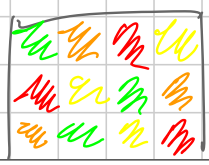


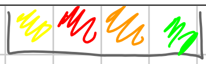




B gioca in contrapposizione ad A e quindi A non può mettere + di un cavallo su queste 4 caselle.

Continuo la soluzione: spezzetto la scacchiera in 4×4 e in ciascun 4×4 lo divido in 4 cicli:

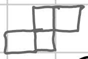
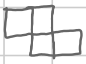




A non è sicuro di mettere più di un cavallo su ciascun cicletto.

Esercizi

Invarianti 131, 133, 134, 135 p.22

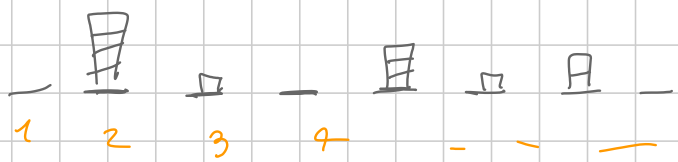
Colorazioni Quanti  o  posso mettere in 8×9 senza sovrapposizioni?
15 p. 34

Estremale 5, 16 p. 33-34

Giochi BMO18.3

Correzione

131



Consideriamo il sistema con le pile in fila

$$I = \sum_{\square} n^\circ \text{ di pila della moneta } \square$$

$$= \sum i \cdot n^\circ \text{ di monete sopra } i$$

Quando faccio una mossa

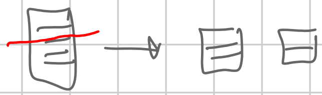
sopra i tolgo
sopra $i-1$ aggiungo

sopra j tolgo
$j+1$ aggiungo

$$I_{dopo} - I_{prima} = (i-1+j+1) - (i+j) = 0$$

Nel problema 131, I è invariante modulo n.

133 2 mosse

- tolgo una moneta 
- divido una pila 

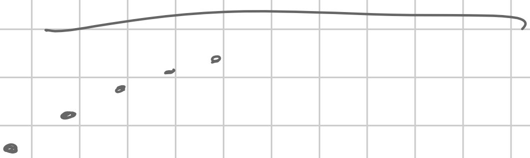
Sol: Cerco M che cala o cresce $\boxed{\text{strettamente}}$ * ad ogni mossa

$$M := \#\text{monete} - \#\text{pile}$$

o

$$M := \sum_{p \in \text{pile}} m_p^2$$

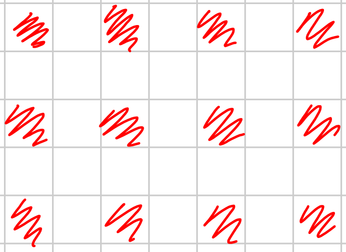
* M deve essere discreta (o cambiare almeno di ε fissato a priori)



134 I = parità delle bianche

135 I = parità delle lampadine accese e sul pentagono interno

Tassellazione con 



Tutte prendono esattamente un

Per determinare il massimo, per ora abbiamo $\max \leq 16$

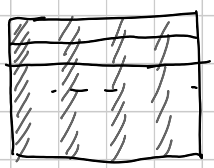
Per mostrare $\max \geq 16$, fate un esempio (per casa).

15 

Oss: Serve che l'area $m \times n$ è mul di 4.

Oss:  si fa 2×4 $\Rightarrow$ si fa $2h \times 4k$

Se $mn \equiv 4\ (8)$ non si riesce per la seguente



ogni L prende 3 ▨ e 1 □

oppure 3 □ e 1 ▨

Ora ▨ − □ $= 0$, però ogni L aggiunge o toglie 2

a

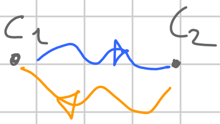
Se # di L fosse dispari $\blacksquare - \square \equiv 2\ (4)$

Ora sappiamo che $8 \mid mn$

riusciamo a fare $4 \mid m,\ 2 \mid n$

Oss: $1 \times n$ non si fanno

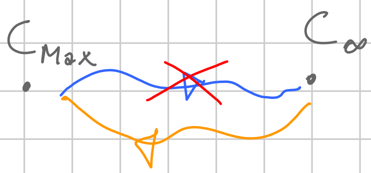
Oss: 3×8 si fa!

5 Per ogni coppia di città 

$\exists$ una tra

Sol: scelgo la città dalla quale raggiungo il maggior numero di città

Per assurdo non esiste la strada



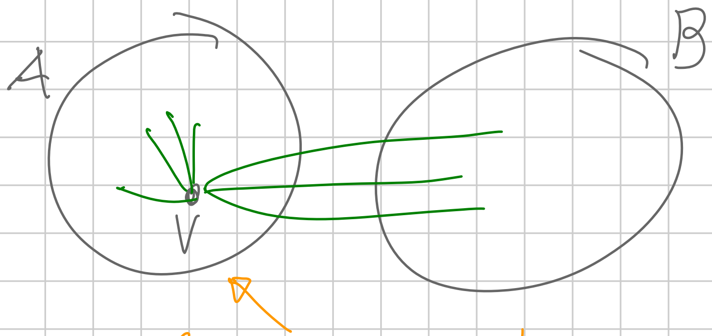
allora da C_∞ riesco a raggiungere C_∞ e tutte quelle di C_{Max}, assurdo per massimalità.

16 Un grafo G ha almeno un arco. Dimostrare che si riesce a dividere in 2 parti $A \cup B$ in modo che gli archi fra A e B siano di più di

quelli dentro A e dentro B.

Sol: considero la suddivisione che ha il maggior numero di archi fra A e B

Allora vale la seguente: $\forall$ v, i vicini sull'altro sottoinsieme sono almeno tanti quanti quelli del sottoinsieme dove sta v.



se fosse così, sposto V e violo la massimalità

Per ogni $v \in A$ abbiamo $\deg_A v \le \deg_B v$

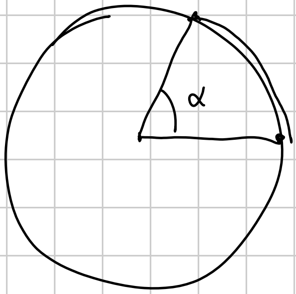
e similmente per $v \in B$

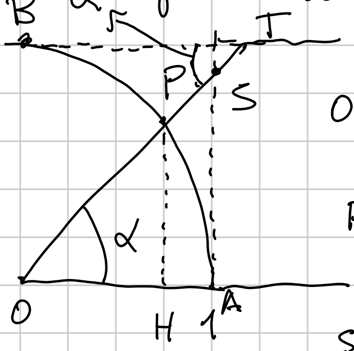
allora sommo tutte queste disug.

Provate a capire se la disug. globale può essere stretta.

G1 - Basic (Trigonometria)

Titolo nota 03/09/2018





gradi : 180 = radianti : π

OH = coseno di α

$\cos\alpha$

PH = seno di α

$\operatorname{sen}\alpha$

SA = tangente di α

$\operatorname{tg}\alpha$ $\tan\alpha$

BT = cotangente di α

$\operatorname{cotg}\alpha$ $\cot\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ $\operatorname{cotg} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$

Tutte queste sono periodiche di periodo 2π (tg e cotg π)

Angoli complementari $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta$ $\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta$ $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{cotg}\beta$

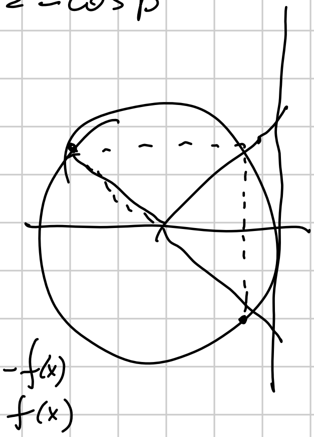
supplementari $\alpha+\beta=\pi$ $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\beta$ $\cos\alpha = -\cos\beta$ $\operatorname{tg}\alpha = -\operatorname{tg}\beta$

esplementari $\alpha+\beta = 2\pi$

(opposti) $\alpha = -\beta$

$\operatorname{sen}\alpha = -\operatorname{sen}\beta$

$\cos\alpha = \cos\beta$



$\operatorname{sen}\alpha$ è una funzione dispari $f(-x) = -f(x)$

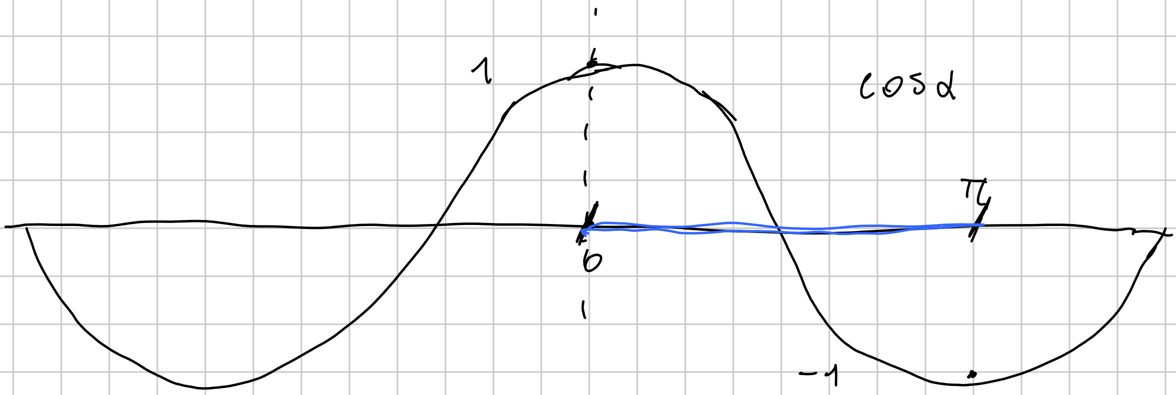
$\cos\alpha$ " pari $f(-x) = f(x)$

$\operatorname{tg}\alpha$ dispari

$\operatorname{cotg}\alpha$ "

$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$ $\text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

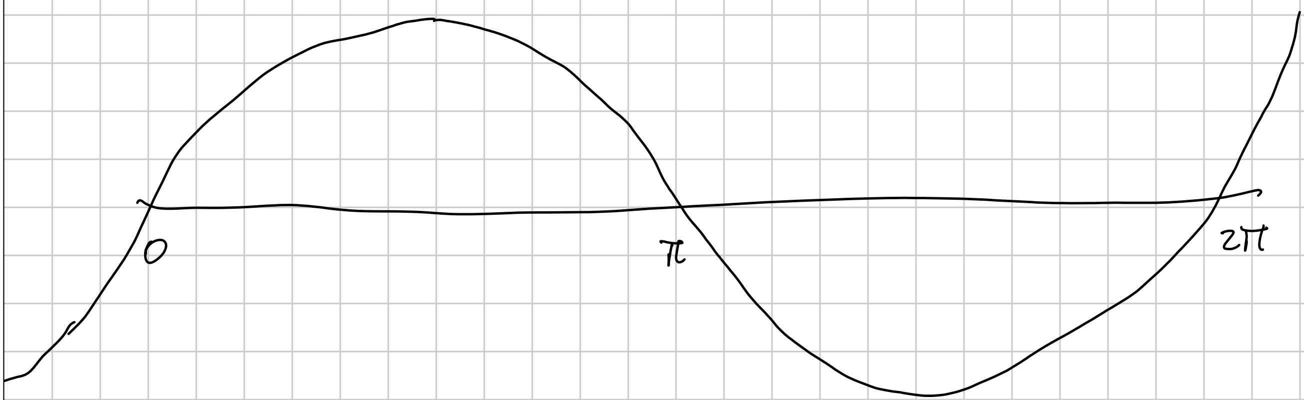


decrescente tra 0 e π ⇒

biettiva tra $[0, \pi]$ e $[-1, 1]$

arccos x = angolo tra 0 e π che ha x come coseno

$x \in [-1, 1]$

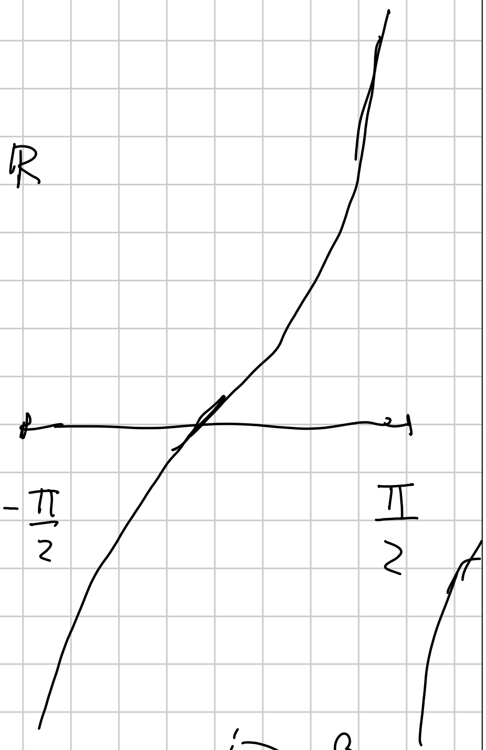


$\text{sen}\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \alpha$

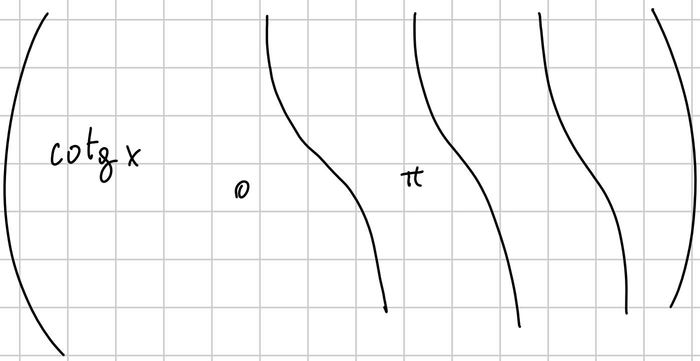
sen α è biettivo tra $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $[-1, 1]$

$\text{arcsen } x : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\operatorname{tg} \alpha$ è biettiva da $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ a $\mathbb{R}$

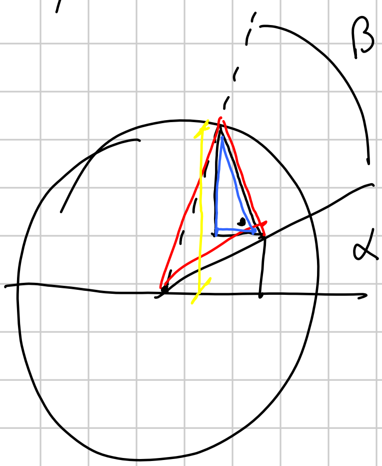


$\Rightarrow \operatorname{arctg} x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



Formule

Addizione $\quad \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$?



ha angoli $90°, \beta, 90°-\beta$

ha angoli $90°, \alpha, 90°-\alpha$

$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \ + \ = \ \cos\alpha + \ \operatorname{sen}\alpha =$

$= 1 \cdot \operatorname{sen}\beta \cdot \cos\alpha + 1 \cdot \cos\beta \cdot \operatorname{sen}\alpha =$

$= \operatorname{sen}\alpha \cos\beta + \cos\alpha \operatorname{sen}\beta$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta$

$\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha(-\operatorname{sen}\beta)$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

Derivo le formule per sen 2β $\quad \alpha=\beta$

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \operatorname{sen}^2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = 1-2\operatorname{sen}^2\beta$$

$2\beta=\alpha$

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1 \qquad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$t = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{2t}{1-t^2} \qquad \cos\alpha = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{2t}{1+t^2}$$

Triplicazione? n-plicazione?

$\mathbb{C}$ numeri complessi $\quad \{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R} \quad i^2=-1\}$

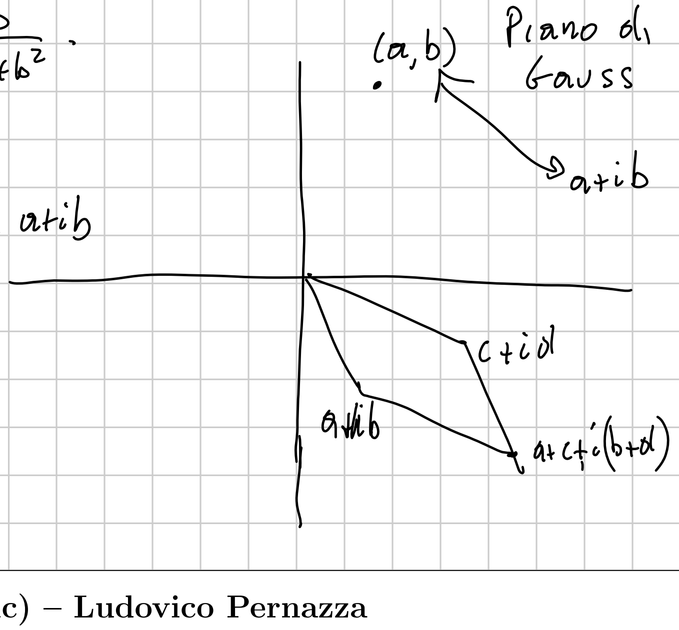
$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2) = a_1+a_2+i(b_1+b_2)$$

$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = a_1a_2 + i(b_1a_2+a_1b_2) + i^2 b_1b_2 =$$

$$= a_1a_2 - b_1b_2 + i(b_1a_2+a_1b_2)$$

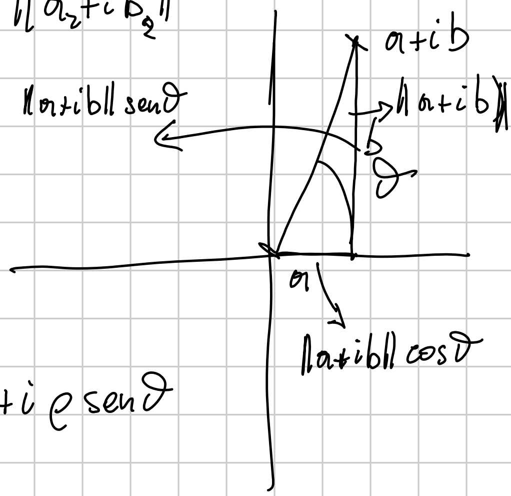
$$\frac{1}{i} = -i \qquad \frac{1}{a+ib} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2-(-b^2)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} =$$

$$= \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$



$\|a+ib\| = \sqrt{a^2+b^2}$ norma di $a+ib$

$$\|(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)\| = \|a_1+ib_1\|\,\|a_2+ib_2\|$$



ϑ? $\quad tg\,\vartheta = \dfrac{b}{a}$

$$\vartheta = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

$\rho = \|a+ib\| \qquad a+ib = \rho\cos\vartheta + i\rho\,\mathrm{sen}\,\vartheta$

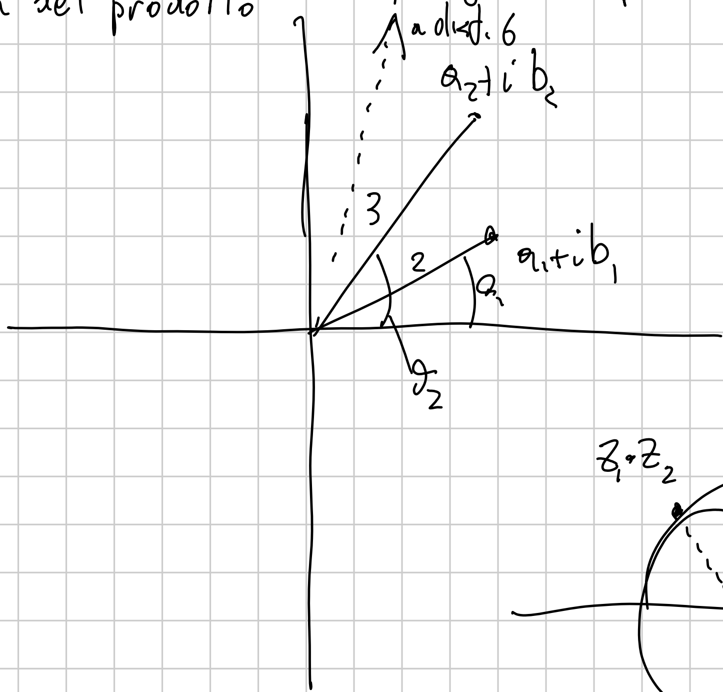
$$(a_1+ib_1)(a_2+ib_2) = \rho_1(\cos\vartheta_1 + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1)\,\rho_2(\cos\vartheta_2 + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2) =$$

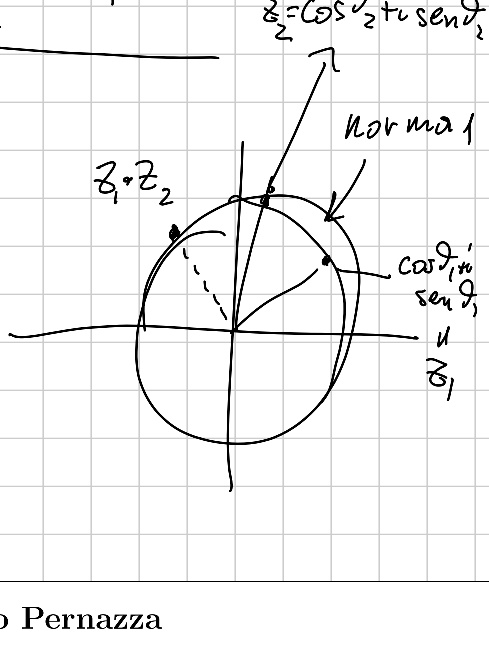
$$= \rho_1\rho_2\,(\underbrace{\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2 - \mathrm{sen}\,\vartheta_1\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2} + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta_1\cos\vartheta_2 + i\cos\vartheta_1\,\mathrm{sen}\,\vartheta_2)$$

$$= \rho_1\rho_2\,(\cos(\vartheta_1+\vartheta_2) + i\,\mathrm{sen}(\vartheta_1+\vartheta_2))$$

norma del prodotto

angolo del prodotto è $\vartheta_1+\vartheta_2$

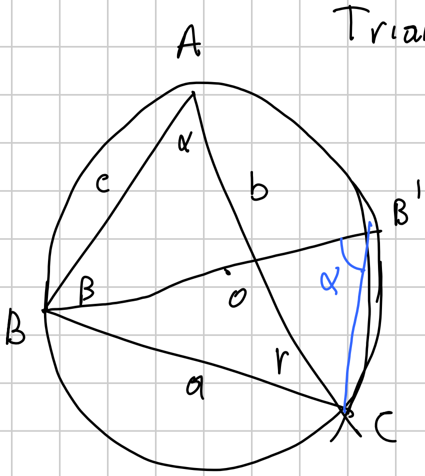




$$(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)^n = \cos n\vartheta + i \operatorname{sen} n\vartheta$$

ha come angolo $n\vartheta \pmod{2\pi}$

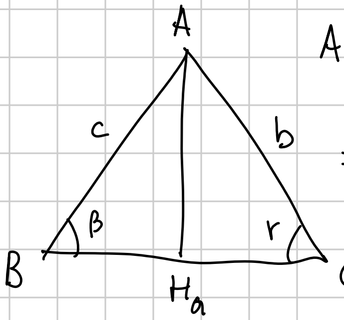
Triangoli



$$2R = BB' = \frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

$\widehat{BCB'} = 90^\circ$

Teorema dei seni

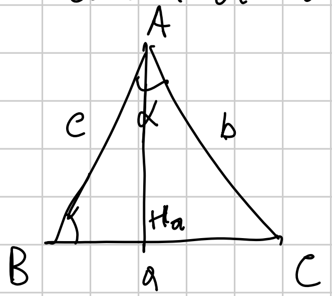


$$\text{Area} = \frac{BC \cdot AH_a}{2} = \frac{ac\sin\beta}{2} = \frac{ab\sin\gamma}{2} = \frac{bc\sin\alpha}{2}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{2R}$$

$$\text{Area} = \frac{bc\operatorname{sen}\alpha}{2} = \frac{abc}{4R}$$

Teorema di Carnot (Pitagora per triangoli non rettangoli)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$a = BH_a + H_aC$$

$$b^2 = AH_a^2 + H_aC^2 \qquad c^2 = AH_a^2 + H_aB^2$$

Svolgo i conti $\quad a^2 = BH_a^2 + H_aC^2 + 2\, BH_a \cdot H_aC$

$$AH_a = c\operatorname{sen}\beta = b\operatorname{sen}\gamma \qquad BH_a = c\cos\beta \quad H_aC = b\cos\gamma$$

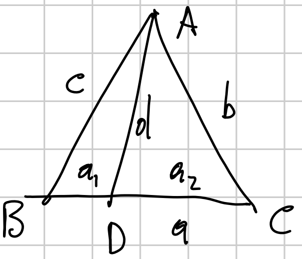
$$2\, BH_a \cdot H_aC = 2 AH_a^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$2bc\cos\beta\cos\gamma = 2 \cdot c\operatorname{sen}\beta \cdot b\operatorname{sen}\gamma - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma - \cos\beta\cos\gamma = -\cos(\beta+\gamma)$$

$$\| $$

$$\cos(\pi-(\beta+\gamma))$$



Stewart: $b^2 a_1 + c^2 a_2 = a \cdot a_1 \cdot a_2 + d_a^2$

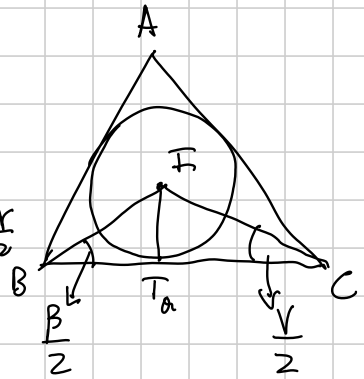
Prostaferesi: $\operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

Werner: $\operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sen}(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right]$

$$\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad t = \frac{\alpha+\beta}{2} \quad s = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right) \qquad \alpha = t+s \quad \beta = t-s$$

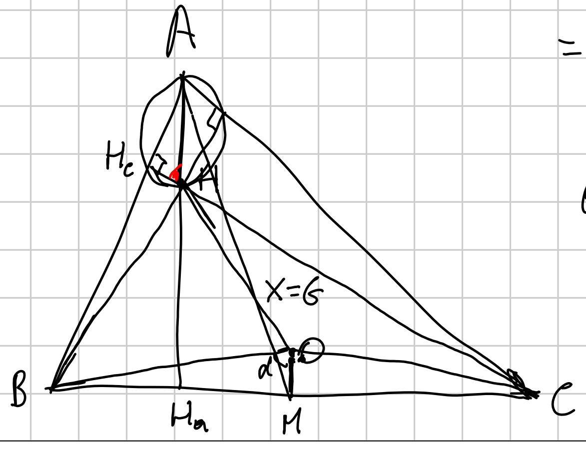
Raggio circ. inscritta:



$$IT_a = BT_a \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \qquad IT_a = CT_a \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$a = BT_a + CT_a = \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} + \frac{r}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} \rightarrow r = a\,\frac{1}{\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}} =$$

$$= a\,\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$



OM? AH?

$$B\hat{O}C = 2\alpha \qquad B\hat{O}M = \alpha$$

$$OM = R\cos\alpha$$

AH_c? è in ACH_c rettangolo $b\cos\alpha$

e $H_c\hat{H}A$? $90° - \hat{H_c A H} = \beta$ Allora $AH = \frac{b\cos\alpha}{\operatorname{sen}\beta} =$

$= 2R\cos\alpha = 2\,OM$.

AM è mediana $AH \parallel OM$ $AHX \sim OMX$

Ah! Ma allora poiché $AH = 2\cdot OM$, anche

$AX = 2\cdot XM$ ma quindi $X = G$ baricentro!

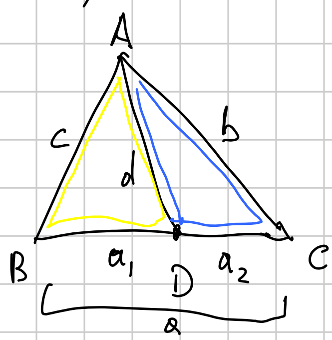
e $HG = 2GO$

1) ABC triangolo allora $a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S$ S=area

Esercizi : 2,3 pag. 3 Prostaferesi e Werner Stewart

7, 8, 9 11 (una di tante)

Es. 8, 9 pag. 36



(2, 3, 7, 8) Stewart:

$$a_2 b^2 + a_1 c^2 = a_1 a_2 a + a d^2$$

$a_2\cdot$ $c^2 = a_1^2 + d^2 - 2a_1 d\cos B\hat{D}A$

$a_1\cdot$ $b^2 = a_2^2 + d^2 - 2a_2 d\cos(\pi - B\hat{D}A) = a_2^2 + d^2 + 2a_2 d\cos B\hat{D}A$

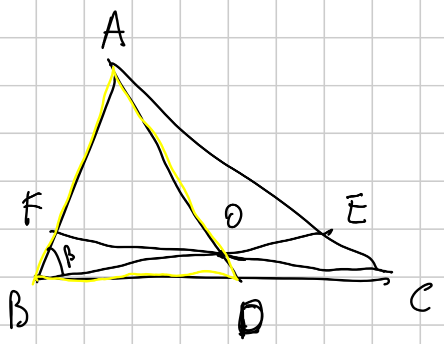
$$a_2\cdot c^2 + a_1 b^2 = a_2\cdot a_1^2 + a_1\cdot a_2^2 + a_2\cdot d^2 + a_1\cdot d^2 = a_1 a_2 \underbrace{(a_1+a_2)}_{a} + d^2\underbrace{(a_1+a_2)}_{a}$$

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma . \qquad \alpha = \pi - (\beta+\gamma)$$

$$-\operatorname{tg}(\beta+\gamma) + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}(\beta+\gamma)\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

$$-\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma} + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = -\frac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

$$\cancel{-\operatorname{tg}\beta} \cancel{-\operatorname{tg}\gamma} \cancel{+\operatorname{tg}\beta} \cancel{+\operatorname{tg}\gamma} - \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma) = -(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$



$$\frac{1}{AD} + \frac{1}{BE} + \frac{1}{CF} = \frac{2}{AO} \qquad AO = R$$

$$A\hat{O}B = 2\gamma \Rightarrow B\hat{A}O = B\hat{A}D = 90^\circ - \gamma$$

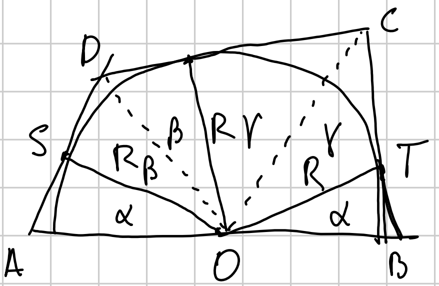
$$A\hat{D}B = 90^\circ + \gamma - \beta$$

$$AD: \quad \frac{AB}{\operatorname{sen} A\hat{D}B} = \frac{AD}{\operatorname{sen}\beta} \qquad AD = \frac{c\operatorname{sen}\beta}{\cos(\gamma-\beta)} = \frac{2R\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta}{\cos(\gamma-\beta)}$$

$$\frac{\cos(\gamma-\beta)}{2\cancel{R}\operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta} + \frac{\cos(\beta-\alpha)}{2\cancel{R}\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\alpha} + \frac{\cos(\alpha-\gamma)}{2\cancel{R}\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\gamma} = \frac{2}{\cancel{R}}$$

$$(\cos\gamma\cos\beta + \operatorname{sen}\gamma\operatorname{sen}\beta)\operatorname{sen}\alpha + (\qquad)\operatorname{sen}\gamma + (\qquad)\operatorname{sen}\beta =$$

$$= 4\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta\operatorname{sen}\gamma \rightsquigarrow \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$



$$AB^2 = 4AD\cdot BC$$

$$2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 180^\circ$$

$$AO = \frac{R}{\cos\alpha} \qquad AD = AS + SD =$$

$$= R\operatorname{tg}\alpha + R\operatorname{tg}\beta \qquad BC = BT + TC = R(\operatorname{tg}\cancel{\alpha} + \operatorname{tg}\gamma)$$

$$\frac{\cancel{4}R^2}{\cos^2\alpha} = \cancel{4}R^2(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\gamma)$$

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \cancel{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1 = \cancel{\operatorname{tg}^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

Identità nota!

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4\sqrt{3}\,S$$

$$\cancel{2}(b^2+c^2) - \cancel{2}bc\cos\alpha \geq \cancel{4}^{2}\sqrt{3}\,\frac{1}{\cancel{2}}\,bc\operatorname{sen}\alpha$$

$$b^2+c^2 \geq \quad bc\left(\sqrt{3}\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha\right) = 2bc\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha\right) =$$

$$= 2bc\left(\operatorname{sen}60^\circ \operatorname{sen}\alpha + \cos 60^\circ \cos\alpha\right) = 2bc\cos(\alpha - 60^\circ)$$

$$b^2+c^2 \geq 2bc \geq 2bc\cos(\alpha-60^\circ)$$

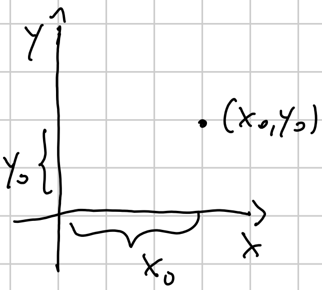
IMO 1961/2

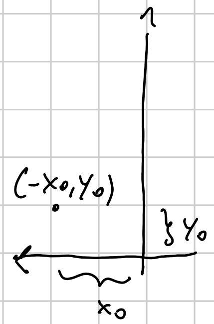
G2 Basic Luca Mac

Titolo nota 05/09/2018

- CARTESIANE
- COMPLESSI
- VETTORI

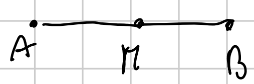
CARTESIANE

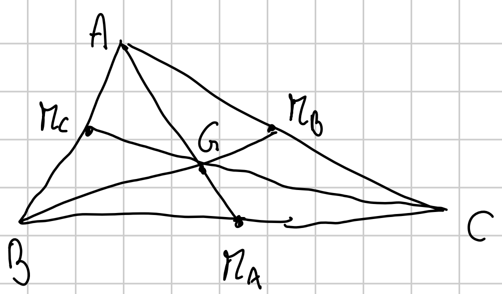




$A=(x_A, y_A)$ $B=(x_B, y_B)$ M pt medio di A e B?

$$M = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$





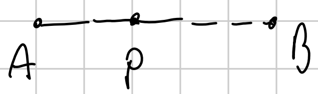
$$AG = 2GM_A$$

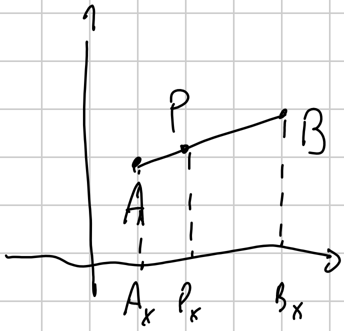
$$G = \left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

Supponiamo di avere A e B. Prendiamo $P \in \overline{AB}$ con $AP = \lambda AB$ $(\Rightarrow PB = (1-\lambda) AB)$

$$P = (\lambda x_B + (1-\lambda) x_A, \lambda y_B + (1-\lambda) y_A)$$

Controllare





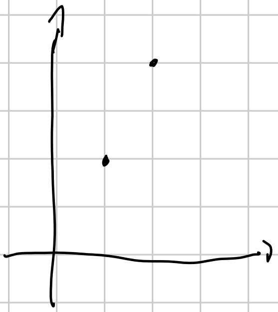
$$\underbrace{A_xP_x}_{x_P - x_A} = \lambda \underbrace{A_xB_x}_{x_B - x_A} \Rightarrow x_P = \lambda x_B + (1-\lambda)x_A$$

—o—o—

Retta per due punti.

$A, B \qquad \{ P \mid P, A, B \text{ allineati} \}$

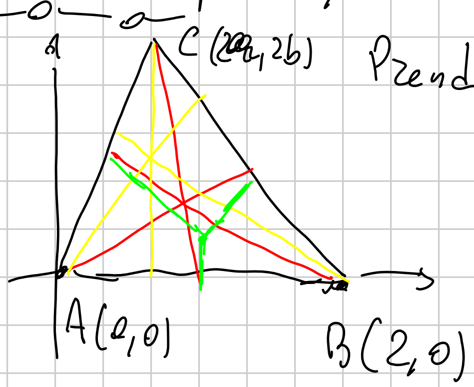
P, A, B allineati $\iff \underset{(x_P - x_A,\, y_P - y_A)}{P - A},\ O,\ \underset{(x_B - x_A,\, y_B - y_A)}{B - A}$



$$\iff \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_P - y_A}{x_P - x_A}$$

La retta per A, B è $\quad (x - x_A)(y_B - y_A) = (y - y_A)(x_B - x_A)$

—o—o—



Prendo ABC triangolo

Sappiamo già $G = \left(\frac{2}{3}(a+1), \frac{2}{3} b \right)$

$CH \perp AB$ e $AH \perp BC$

$x_H = x_C = 2a$

$$m_{BC} = \frac{b}{a-1} \left(= \frac{2b-0}{2a-2} \right)$$

$$\Rightarrow m_{AH} = -\frac{a-1}{b} \qquad AH: \; y = -\frac{a-1}{b}x$$

$$y_H = -\frac{(a-1)}{b}(2a)$$

$$H = \left(2a, \frac{2a(1-a)}{b}\right)$$

Calcoliamo O:

$M_C O \perp AB$ e $M_B O \perp AC$

$$x_O = x_{M_C} = \frac{x_A + x_B}{2} = 1$$

$$m_{AC} = \frac{2b}{2a} = \frac{b}{a} \qquad m_{M_B O} = -\frac{a}{b} \qquad M_B = (a, b)$$

$$M_B O: \; y - y_{M_B} = -\frac{a}{b}(x - x_{M_B})$$

$$M_B O: \; y - b = -\frac{a}{b}(x - a)$$

$$y_O = b - \frac{a}{b}(1-a)$$

$$O = \left(1, \; b - \frac{a}{b}(1-a)\right)$$

O, G, H ALLINEATI. Basta verificare

$$\frac{x_H - x_G}{y_H - y_G} \stackrel{?}{=} \frac{x_O - x_G}{y_O - y_G}$$

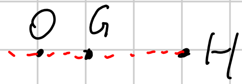
$$\frac{\cancel{2}a - \frac{\cancel{2}}{3}(a+1)}{\frac{\cancel{2}a(1-a)}{b} - \frac{\cancel{2}}{3}b} \stackrel{?}{=} \frac{1 - \frac{2}{3}(a+1)}{b - \frac{a}{b}(1-a) - \frac{2}{3}b}$$

$$\frac{\frac{2}{3}a-\frac{1}{3}}{\frac{3a(1-a)-b^2}{3b}} \stackrel{?}{=} \frac{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a}{\frac{\cancel{3}b^2-3a(1-a)-\cancel{2}b^2}{3b}}$$ quindi è vera!

Quanto vale $\frac{GH}{GO}$? Beh $\frac{GH}{GO} = \frac{x_H - x_G}{x_O - x_G}$

SAPENDO CHE SONO ALLINEATI

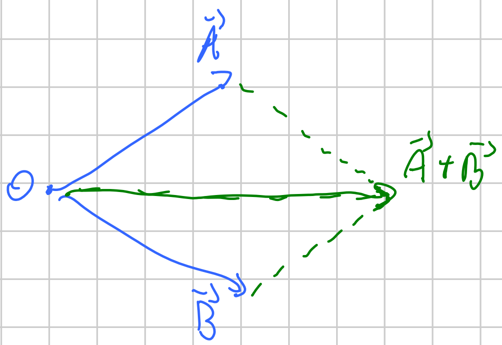
$$\frac{x_H - x_G}{x_O - x_G} = \frac{2a - \frac{2}{3}(a+1)}{1-\frac{2}{3}(a+1)} = \frac{\frac{4}{3}a-\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a} = -2 < 0$$ perché non sono nell'ordine giusto.



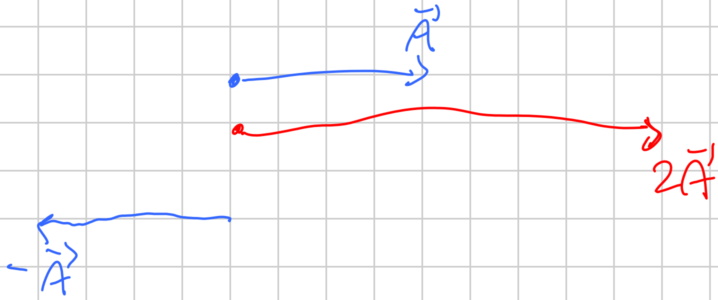
$(HG = 2GO)$

VETTORI

SOMMA DI DUE VETTORI? REGOLA DEL PARALLELOGRAMMA



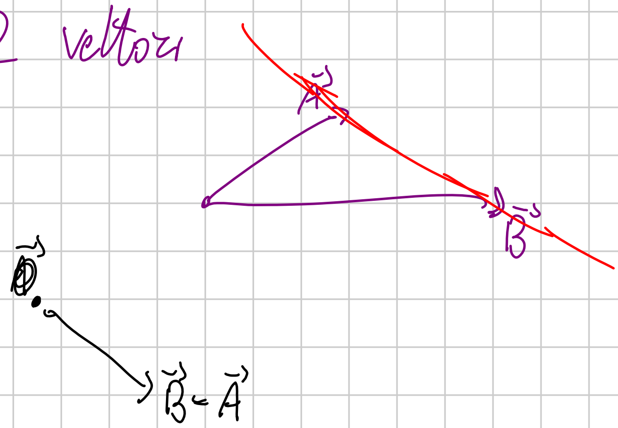
MOLTIPLICAZIONE PER UNO SCALARE



Retta di un certo vettore è l'insieme dei $\vec B$ tali che

$$\vec B = \lambda \vec A$$

Retta per 2 vettori

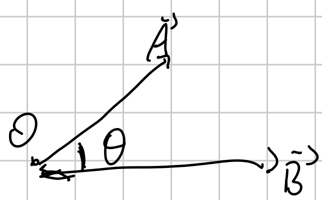


È l'insieme dei $\vec P$ tali che $\vec P - \vec A = \lambda(\vec B - \vec A)$

$\iff \vec P = \lambda \vec B + (1-\lambda)\vec A \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Stare invece sul segmento vuol dire $\lambda \in [0,1]$.

NORMA E PRODOTTO SCALARE



$$\vec A \cdot \vec B = \|\vec A\| \cdot \|\vec B\| \cos\theta$$

Osserviamo che $\vec A \cdot \vec A = \|\vec A\|^2$

$\|\vec{A}\| = 0 \iff \vec{A} = \vec{0}$ possiamo dire che $\vec{A} \perp \vec{B} \iff \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

Dim: ($\Rightarrow$) $\vec{A} \perp \vec{B} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = 0$

($\Leftarrow$) Se uno tra $\vec{A}$ e $\vec{B}$ è $\vec{0}$, allora è banale.

Supponiamo $\vec{A}, \vec{B} \neq \vec{0}$

$0 = \vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cdot \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \vec{A} \perp \vec{B}$.

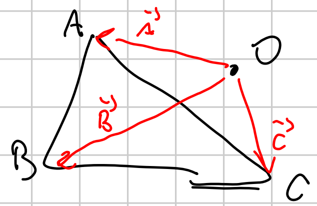
~o~o~

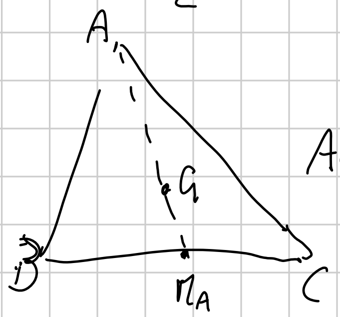
CALCOLIAMO UN PO' DI PUNTI.

$\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$. Quanto vale $\vec{M}_A$?

$\vec{M}_A = \dfrac{\vec{B} + \vec{C}}{2}$ (AUDIO) $\quad \vec{M}_B = \dfrac{\vec{A} + \vec{C}}{2} \quad \vec{M}_C = \dfrac{\vec{A} + \vec{B}}{2}$.

$\vec{G} = \dfrac{\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}}{3}$





$AG = 2GM_A$

$\vec{G} - \vec{A} = 2(\vec{M}_A - \vec{G})$

$3\vec{G} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

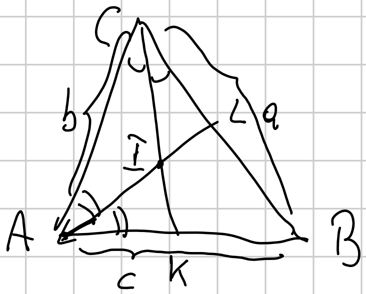
$2\vec{OG} = \vec{GH}$ $\quad 2\vec{G} - 2\vec{O} = \vec{H} - \vec{G}$

circocentro

$\vec{H} + 2\vec{O} = 3\vec{G} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

Se metto l'origine nel circocentro O, trovo $\vec{H} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$

E l'incentro I?



$$\vec{K} = \frac{b}{a+b}\vec{B} + \frac{a}{a+b}\vec{A}$$

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{AK}{AB} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow AK = \frac{bc}{a+b}$$

$$\frac{CI}{IK} = \frac{AC}{AK} = \frac{b}{\frac{bc}{a+b}} = \frac{a+b}{c} \Rightarrow \frac{CI}{CK} = \frac{a+b}{a+b+c}$$

$$\vec{I} = \frac{a+b}{a+b+c}\vec{K} + \frac{c}{a+b+c}\vec{C} = \frac{a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}}{a+b+c}$$

(È VERA anche se l'origine NON è il circocentro)

Verifichiamo che $\vec{AH} \perp \vec{BC}$

$$(\vec{H}-\vec{A})\cdot(\vec{C}-\vec{B}) \overset{!}{=} 0$$

$$(\vec{B}+\vec{C})(\vec{C}-\vec{B}) \overset{?}{=} 0$$

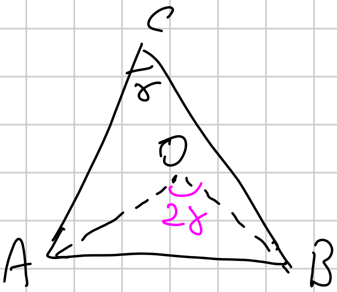
$$\vec{B}\cdot\vec{B} \overset{!}{=} \vec{C}\cdot\vec{C}$$

$$R = \|\vec{B}\| \overset{?}{=} \|\vec{C}\| = R$$

Quanto vale OH?

$$OH^2 = \|\vec{OH}\|^2 = \vec{OH}\cdot\vec{OH} = \vec{H}\cdot\vec{H} = (\vec{A}+\vec{B}+\vec{C})(\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}) = 3R^2 +$$

$$+ 2\vec{A}\cdot\vec{B} + 2\vec{A}\cdot\vec{C} + 2\vec{B}\cdot\vec{C}$$



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = R^2\cos(2\gamma) = R^2\left(1 - \frac{4\sin^2\gamma}{2}\right) = R^2 - \frac{1}{2}(2R\sin\gamma)^2 = R^2 - \frac{c^2}{2}$$

$$OH^2 = 3R^2 + 2\left(3R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{2}\right) = 9R^2 - (a^2+b^2+c^2)$$

—o—

Calcoliamo OI

$$OI^2 = \vec{OI}\cdot\vec{OI} = \vec{I}\cdot\vec{I} = \frac{1}{(a+b+c)^2}(a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C})(a\vec{A}+b\vec{B}+c\vec{C}) =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\left(R^2(a^2+b^2+c^2) + 2ab\left(R^2-\frac{c^2}{2}\right) + 2ac\left(R^2-\frac{b^2}{2}\right) + 2bc\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{(a+b+c)^2}\left(R^2(a+b+c)^2 - \overbrace{abc(a+b+c)}^{-abc^2-ab^2c-a^2bc}\right) = R^2 - \frac{abc}{a+b+c}$$

$$R = \frac{abc}{4S} \qquad r = \frac{2S}{a+b+c} \qquad 2Rr = \frac{abc}{a+b+c}$$

$$OI^2 = R^2 - 2Rr = R(R-2r)$$

Oss: Ho appena dimostrato che $R \geq 2r$

Provate a calcolare GH. $\left(GH^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2+b^2+c^2)\right)$

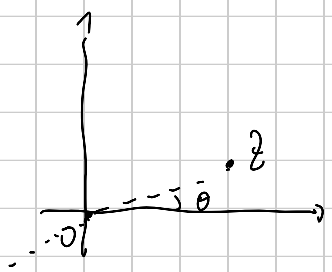
—o——o——o——o——o—

COMPLESSI

$i^2 = -1$

Iniziamo da quando 3 numeri complessi sono allineati:

Caso 1 Uno dei 3 è l'origine



$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta}$$

osserviamo che se al posto di θ ci metto $\theta+\pi$ ho $e^{2i(\theta+\pi)} = e^{2i\theta} \cdot e^{2i\pi} = e^{2i\theta}$

$e^{2i\theta} = e^{2i\varphi} \iff \theta = \varphi \vee \theta = \varphi \pm \pi$

Dunque $0, z, w$ allineati se e solo se $\frac{z}{\bar{z}} = \frac{w}{\bar{w}}$

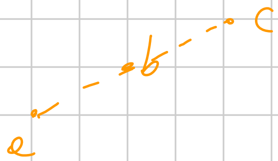
Ora x, y, z allineati $\iff 0, y-x, z-x$ allineati

$\iff \frac{y-x}{\bar{y}-\bar{x}} = \frac{z-x}{\bar{z}-\bar{x}}$

Al solito $m = \frac{a+b}{2}$

Supponiamo di avere a e b

$b = \frac{a+c}{2} \leadsto c = 2b - a$



Lemma: il simmetrico di H rispetto a M_A è il diametralmente opposto ad A sulla circoscritta. E il simmetrico di H rispetto a BC è sulla circoscritta.

Dim: Possiamo supporre che $a\bar{a}=1$ $b\bar{b}=1$ $c\bar{c}=1$

Il circocentro è l'origine. Quindi $h = a+b+c$

$m_a = \frac{b+c}{2}$.

Dunque il simmetrico di H rispetto ad M_A è

$2m_a - h = \cancel{b} + \cancel{c} - a - \cancel{b} - \cancel{c} = -a$.

La retta BC è $\frac{z-b}{\bar{z}-\bar{b}} = \frac{b-c}{\bar{b}-\bar{c}} = \frac{b-c}{\frac{1}{b}-\frac{1}{c}} = \frac{b-c}{\frac{c-b}{bc}} = -bc$

$BC: z = b+c-\bar{z}bc$

$AH: \frac{z-a}{\bar{z}-\bar{a}} = \frac{b+c}{\bar{b}+\bar{c}} = \frac{b+c}{\frac{b+c}{bc}} = bc$

$AH: z = a + bc\left(\bar{z}-\frac{1}{a}\right)$

$\{H_A\} = BC \cap AH \Rightarrow \begin{cases} h_a = b+c-\bar{h}_a bc \\ h_a = a+bc\left(\bar{h}_a - \frac{1}{a}\right) \end{cases}$

Quindi $2h_a = a+b+c-\frac{bc}{a}$

Ora il simmetrico è $2h_a - h = \left(a+b+c-\frac{bc}{a}\right) - (a+b+c) = -\frac{bc}{a}$

$\left(-\frac{bc}{a}\right)\overline{\left(-\frac{bc}{a}\right)} \stackrel{?}{=} 1$

$\left(-\frac{bc}{a}\right)\left(-\frac{\bar{b}\bar{c}}{\bar{a}}\right) \stackrel{?}{=} 1$

$\left(-\frac{bc}{a}\right)\left(-\frac{a}{bc}\right) \stackrel{?}{=} 1$

—o—o—

Es: PI 12, 22, 24

PII 6, 10, 16

PIII 2014 B1

—o—o—

Problema 6

Mettiamo l'origine nel circocentro di ABC.

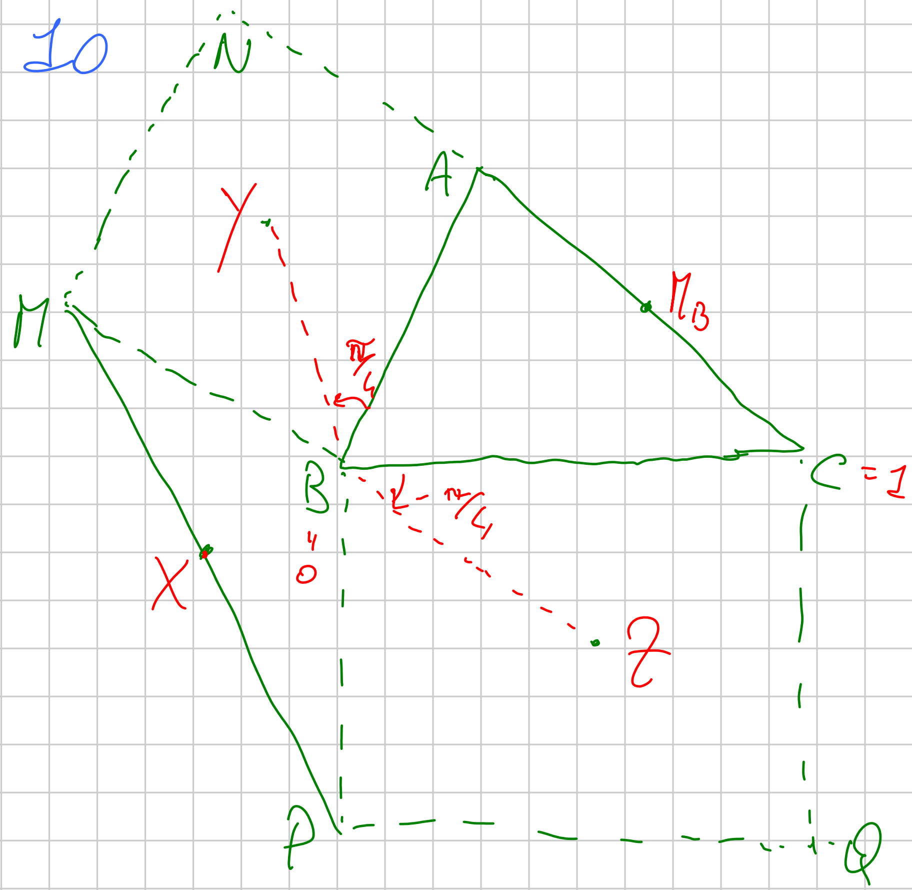
$\ell_c^2 = \|\overrightarrow{CM_c}\|^2 = (\vec{M_c}-\vec{C})\cdot(\vec{M_c}-\vec{C}) = \frac{1}{4}(\vec{A}+\vec{B}-2\vec{C})(\vec{A}+\vec{B}-2\vec{C}) =$

$$= \frac{1}{4}\left[2R^2+4R^2+2\left(R^2-\frac{c^2}{2}\right)-4\left(R^2-\frac{b^2}{2}\right)-4\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{4}\left(-c^2+2b^2+2a^2\right)=\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}$$

$$l_a^2+l_b^2+l_c^2=\frac{1}{4}\left(3a^2+3b^2+3c^2\right)=\frac{3}{4}\left(a^2+b^2+c^2\right).$$

Problema 10

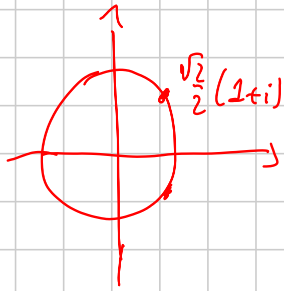


Complessi: Mettiamo $b=0$ wlog
e anche $q=1-i$ wlog
(cioè $c=1$)

$z=\boxed{\frac{1-i}{2}}$

$m_B=\boxed{\frac{a+1}{2}}$

$p=-i$



$$y = a \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left(\text{perché } BY = \frac{AB}{\sqrt{2}}\right)$$

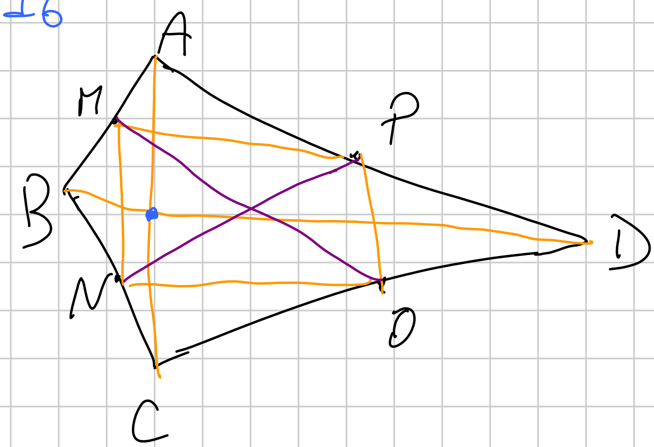
$$y = \boxed{\frac{a(1+i)}{2}}$$

$$m = ai$$

$$x = \frac{p+m}{2} = \boxed{i\,\frac{a-1}{2}}$$

e qui diventa una verifica.

Problema 16



$$\vec{C} = -\alpha \vec{A}$$
$$\vec{D} = -\beta \vec{B} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$
$$\vec{M} = \frac{\vec{A}+\vec{B}}{2} \qquad \vec{N} = \frac{\vec{B}+\vec{C}}{2} = \frac{\vec{B}-\alpha\vec{A}}{2} \qquad \vec{O} = \frac{\vec{C}+\vec{D}}{2} = \frac{-\alpha\vec{A}-\beta\vec{B}}{2}$$
$$\vec{P} = \frac{\vec{A}+\vec{D}}{2} = \frac{\vec{A}-\beta\vec{B}}{2}.$$

$$\vec{AC} \perp \vec{BD} \iff (\vec{C}-\vec{A})\cdot(\vec{D}-\vec{B}) = 0 \iff (\alpha+1)(\beta+1)\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$
$$\iff \vec{A}\cdot\vec{B} = 0$$

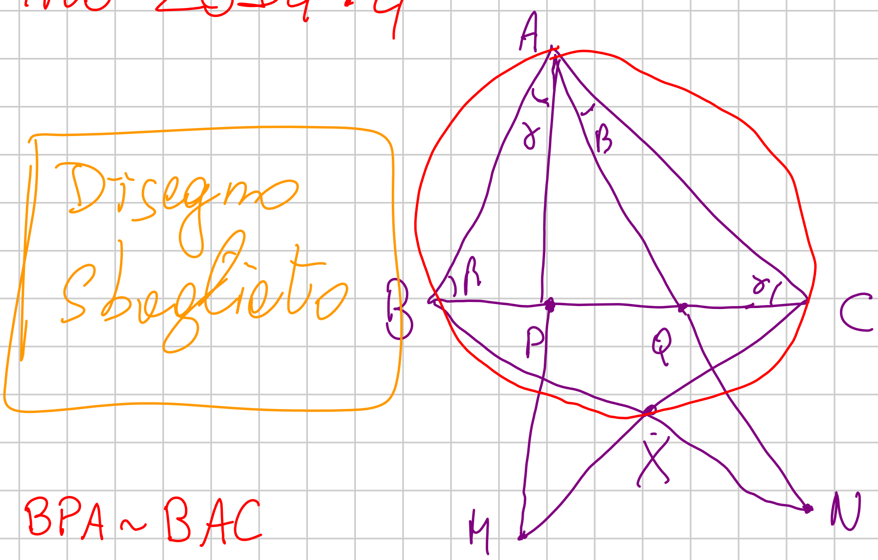
$$MO = NP \iff MO^2 = NP^2 \iff \left(\frac{\vec{A}(\alpha+1)+\vec{B}(\beta+1)}{2}\right)\left(\;\ldots\;\right) =$$
$$= \left(\frac{\vec{A}(\alpha+1)-\vec{B}(\beta+1)}{2}\right)\left(\;\ldots\;\right)$$

$\iff \frac{4}{4}(\alpha+1)(\beta+1)\vec{A}\cdot\vec{B}=0 \iff \vec{A}\cdot\vec{B}=0$

Quindi $AC \perp BD \iff \vec{A}\cdot\vec{B}=0 \iff M\Theta \neq NP$.

— o — o —

IMO 2014.4



$BPA \sim BAC$
$CQA \sim CAB$

$$\frac{BP}{AB}=\frac{AB}{BC} \rightsquigarrow BP=\frac{c^2}{a}$$

$$\frac{BP}{BC}=\frac{c^2}{a^2} \qquad \vec{P}=\frac{c^2}{a^2}\vec{C}+\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)\vec{B}$$

$$\vec{Q}=\frac{b^2}{a^2}\vec{B}+\left(1-\frac{b^2}{a^2}\right)\vec{C}$$

$$\vec{M}=2\vec{P}-\vec{A}=2\frac{c^2}{a^2}\vec{C}+\frac{2(a^2-c^2)}{a^2}\vec{B}-\vec{A}$$

$$\vec{N}=2\vec{Q}-\vec{A}=\frac{2b^2}{a^2}\vec{B}+\frac{2(a^2-b^2)}{a^2}\vec{C}-\vec{A}$$

$$BM: \lambda\vec{M}+(1-\lambda)\vec{B}=\vec{B}+\lambda\left[2\frac{c^2}{a^2}\vec{C}+\frac{a^2-2c^2}{a^2}\vec{B}-\vec{A}\right] \quad \lambda\in\mathbb{R}$$

CN: $\mu\vec{N}+(1-\mu)\vec{C}=\vec{C}+\mu\left[2\frac{b^2}{a^2}\vec{B}+\frac{a^2-2b^2}{a^2}\vec{C}-\vec{A}\right]\quad \mu\in\mathbb{R}$

$\vec{A}$ $\lambda=\mu$

$\vec{B}$ $1+\lambda\frac{a^2-2c^2}{a^2}=\lambda 2\frac{b^2}{a^2}\rightsquigarrow\lambda=\frac{a^2}{2b^2+2c^2-a^2}$

$\vec{C}$ è uguale!

$$\vec{X}=\vec{B}+\frac{1}{2b^2+2c^2-a^2}\left(2c^2\vec{C}+(a^2-2c^2)\vec{B}-a^2\vec{A}\right)$$

$$\vec{X}=\frac{1}{2b^2+2c^2-a^2}\left(2c^2\vec{C}+2b^2\vec{B}-a^2\vec{A}\right)$$

$\vec{X}\cdot\vec{X}\overset{?}{=}R^2 \iff$ Tesi

$$\frac{1}{(2b^2+2c^2-a^2)^2}\left(2c^2\vec{C}+2b^2\vec{B}-a^2\vec{A}\right)\left(\_\ \_\ \_\right)\overset{?}{=}R^2$$

$$\left(2c^2\vec{C}+2b^2\vec{B}-a^2\vec{A}\right)\left(\_\ \_\ \_\right)\overset{?}{=}R^2(2b^2+2c^2-a^2)^2$$

$$4c^4R^2+4b^4R^2+a^4R^2+8b^2c^2\left(R^2-\frac{a^2}{2}\right)-4a^2b^2\left(R^2-\frac{c^2}{2}\right)$$
$$-4a^2c^2\left(R^2-\frac{b^2}{2}\right)\overset{?}{=}R^2(2b^2+2c^2-a^2)^2$$

$$R^2(2b^2+2c^2-a^2)^2-\cancel{4a^2b^2c^2}+\cancel{2a^2b^2c^2}+\cancel{2a^2b^2c^2}\overset{?}{=}R^2(2b^2+2c^2-a^2)^2$$

Quindi è vera.

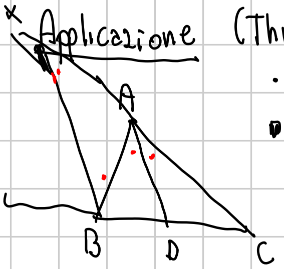
G3 basic – GioacchinoA

Titolo nota 06/09/2018

Thm (Talete)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Applicazione (Thm bisettrice)

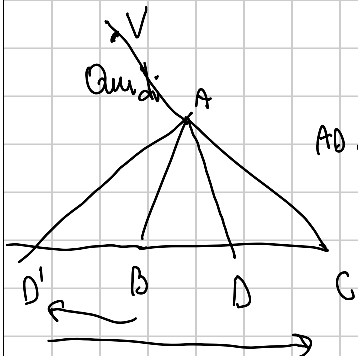


- AD bisettrice $\Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{BD}$
- Dim: Traccio da B la parallela ad AD che lo incontra in X. Allora $X\hat{A}B$ è isoscele perché per parallelismo $\begin{cases} B\hat{A}D = A\hat{B}X \\ D\hat{A}C = B\hat{X}A \end{cases}$ e $B\hat{A}D = D\hat{A}C$ per hp. Quindi $AX = AB$.

per Talete $\frac{AX}{AC} = \frac{BD}{DC}$ ∎, con $\frac{AX}{AC} = \frac{AB}{AC}$

Segmenti con segno: A B r, verso; AB positivo, BA negativo

Quindi



AD bis. $\Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ (I)

AD' bis. esterna $\Rightarrow \frac{BD'}{D'C} = -\frac{AB}{AC}$ (II) (Esercizio 1)

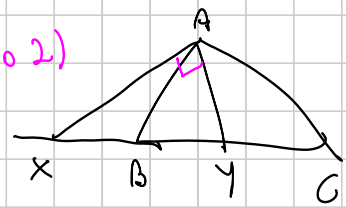
Quindi (I)+(II) $\Rightarrow \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CD'}{D'B} = -1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; \| \;\; (B, C; D, D')$

Def. X, Y, Z, W allineati $(X, Y; Z, W) = \frac{XZ}{ZY} \cdot \frac{YW}{WX}$

Oss. $D'\hat{A}D = \frac{\pi}{2}$. Infatti: $D'\hat{A}D = D'\hat{A}B + B\hat{A}D = \frac{V\hat{A}B}{2} + \frac{B\hat{A}C}{2} = \frac{V\hat{A}B + B\hat{A}C}{2} = \frac{\pi}{2}$ ∎

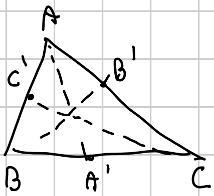
Prop. (Esercizio 2)



- ABC triangolo
- $X\hat{A}Y = 90°$
- $(B, C; Y, X) = -1$

Allora AY, AX bis. int/est.

Thm Ceva

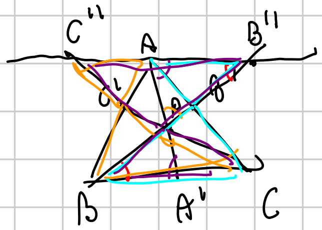


AA', BB', CC' concorrono

$$\Updownarrow$$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

Dim $\Rightarrow$) la faremo $\Leftarrow$) Esercizio 3 (per assurdo)



Tracciamo da A la parallela a BC che incontra CC' in C'', BB' in B''.

$B\hat{A'}P \sim B''\hat{A}P \Rightarrow \frac{BA'}{AB''} = \frac{PA'}{PA} = \frac{CA'}{AC''} \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{B''A}{AC''}$ (I)

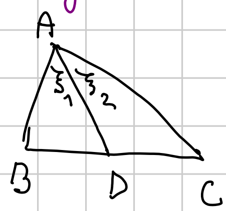
$C\hat{A'}P \sim C''\hat{A}P$

$B\hat{C'}C \sim A\hat{C'}C'' \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{AC''}{BC}$ (II)

$C\hat{B'}B \sim A\hat{B'}B'' \Rightarrow \frac{CB'}{B'A} = \frac{BC}{B''A}$ (III)

$$(I)\cdot(II)\cdot(III) = \frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{CB'}{B'A} = \frac{\cancel{B''A}}{\cancel{AC''}}\cdot\frac{\cancel{AC''}}{\cancel{BC}}\cdot\frac{\cancel{BC}}{\cancel{B''A}} = 1.$$

Lemma (gen. thm bis) $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\xi_1}{\sin\xi_2}\cdot\frac{AB}{AC}$ (*)



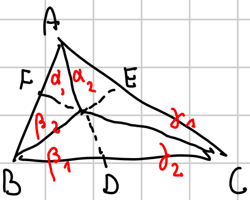
Dim. Th. dei seni su $A\hat{B}D \Rightarrow \frac{BD}{\sin\xi_1} = \frac{AB}{\sin A\hat{D}B}$ (I)

" $A\hat{C}D \Rightarrow \frac{DC}{\sin\xi_2} = \frac{AC}{\sin A\hat{D}C}$ (II)

Ma $\sin A\hat{D}B = \sin A\hat{D}C$ poiché $A\hat{D}B + A\hat{D}C = \pi$.

Quindi $\frac{(I)}{(II)} = \frac{BD/\sin\xi_1}{DC/\sin\xi_2} = \frac{AB/\cancel{\sin A\hat{D}B}}{AC/\cancel{\sin A\hat{D}C}} \Rightarrow$ (*) ∎

Thm (Ceva trig.)



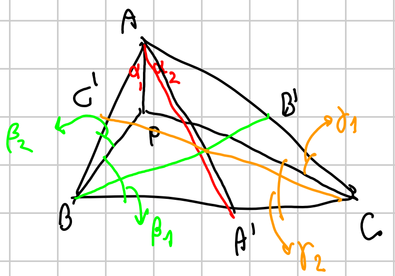
AD, BE, CF concorrono
$\Updownarrow$
$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1.$

Dim:
$$\left.\begin{aligned} \frac{BD}{DC} &\overset{\text{Lemma}}{=} \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{AB}{AC} \\ \frac{CE}{EA} &= \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{BC}{AB} \\ \frac{AF}{FB} &= \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{AC}{BC} \end{aligned}\right\} (*)$$

(Thm) Ceva dice che AD, BE, CF concorrono sse $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = 1$

dunque in virtù di (*), sse $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AC}}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\frac{\cancel{BC}}{\cancel{AB}}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\frac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}} = 1$ ∎

Applicazione (Esistenza del coniugato isogonale)

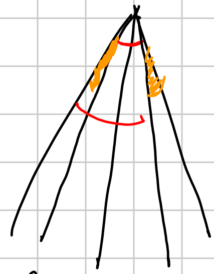


- ABC triangolo; $AP \cap BP \cap CP \neq \emptyset$
- AA' simmetrico di AP wrt bisettrice di $B\hat{A}C$

Dunque se $B\hat{A}P := \alpha_1$, $P\hat{A}C := \alpha_2$

Allora $B\hat{A}A' = \alpha_2$ e $A'\hat{A}C = \alpha_1$

Prendo BB' e CC' analogamente



Th. AA', BB', CC' concorrono e il punto P' in cui concorrono è detto coniugato isogonale di P.

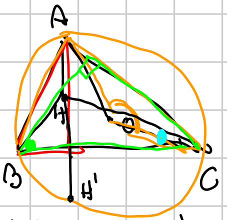
Dim: Per Th ceva trig AA', BB', CC' conc. sse $\dfrac{\sin B\hat{A}A'}{\sin A'\hat{A}C} \cdot \dfrac{\sin A\hat{C}C'}{\sin C'\hat{C}B} \cdot \dfrac{\sin C\hat{B}B'}{\sin B'\hat{B}A} = 1$

Ma $LHS = \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \cdot \dfrac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} \cdot \dfrac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} = \underbrace{\dfrac{1}{\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}}}_{LHS} = 1$ ⊠

$\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} \to 1$ perché AP, BP, CP conc. e posso usare Ceva trig.

Oss O e H sono coniugati isogonali

Dim



$$\left.\begin{aligned} B\hat{A}H &= 90 - A\hat{B}C \\ O\hat{A}C &= 90 - \frac{A\hat{O}C}{2} = 90 - A\hat{B}C. \end{aligned}\right\} \Rightarrow B\hat{A}H = O\hat{A}C.$$

(Lemma del simmetrico)

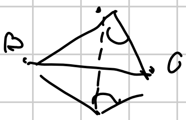
Oss. Q. Dove sta il simmetrico di H rispetto a BC?

R. Sulla circoscritta.

Dim. Per simmetria $B\hat{H'}C \underset{\text{simmetria}}{=} B\hat{H}C \overset{\text{nel triangolo } BHC \text{ la somma è 180}}{=} 180 - H\hat{B}C - H\hat{C}B =$

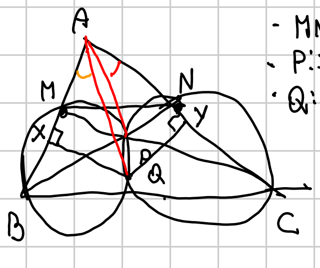
$= 180 - (90 - A\hat{C}B) - (90 - A\hat{B}C)$

$= A\hat{C}B + A\hat{B}C$



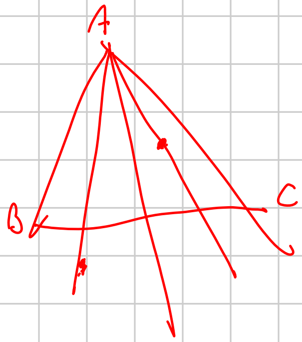
Dunque $B\hat{H'}C + B\hat{A}C = A\hat{C}B + A\hat{B}C + B\hat{A}C = 180$ (la somma degli angoli di ABC) $\Rightarrow ABCH'$ ciclico $\Rightarrow H'$ sta sulla cfr circ.

Es. G3-12



- $MN \parallel BC$
- $P := BN \cap CM$
- $Q := \odot MBP \cap \odot NCP$

Th: $B\hat{A}Q = P\hat{A}C$



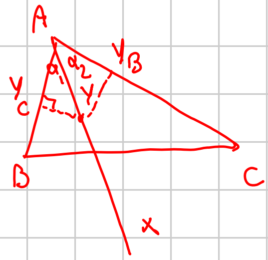
Dim: ① AP è mediana

→ Sia $K := AP \cap BC$. Per ceva $\frac{BK}{KC} \cdot \frac{CN}{NA} \cdot \frac{AM}{MB} = 1$ (*). Però $\frac{CN}{NA} = \frac{BM}{MA}$ per Talete.

Quindi (*) diventa $\frac{BK}{KC} = 1$ ovvero $BK = KC$ ∎

Strategia ② La tesi equivale a chiedere di dim. che AQ è la simmediana (simmetrica della mediana wrt bisettrice)

Oss.



$$\frac{YY_C}{YY_B} = \frac{AY \cdot \sin\alpha_1}{AY \cdot \sin\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \quad (\sim)$$

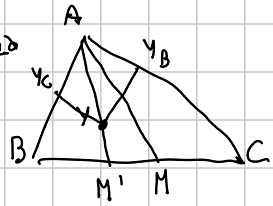
k_{AX}

Dunque fissata la ceviana AX, $\frac{YY_C}{YY_B}$ è indip. da Y "e caratterizza la ceviana"

cioè se $\tilde{Y}$ è un altro punto t.c. $\frac{\tilde{Y}\tilde{Y}_C}{\tilde{Y}\tilde{Y}_B} = k_{AX} \Rightarrow \tilde{Y} \in AX$.

(Esercizio 4)
(**)

③ Lemma



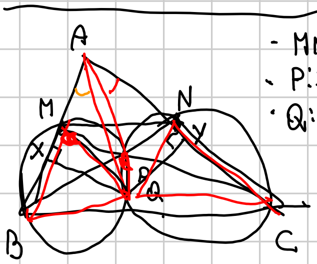
· AM mediana, AM' simm.

Th $\frac{YY_C}{YY_B} = \frac{AB}{AC}$

Dim. $\frac{YY_C}{YY_B} \overset{(\sim)}{=} \frac{\sin B\hat{A}M'}{\sin M'\hat{A}C} \overset{AM, AM' \text{ simm. wrt bis.}}{=} \frac{\sin M\hat{A}C}{\sin M\hat{A}B} \underset{MB = MC}{=} \frac{\frac{\sin M\hat{A}C}{MC}}{\frac{\sin M\hat{A}B}{MB}} \overset{\text{th seni su } AMC}{=} \frac{\frac{\sin A\hat{C}B}{AM}}{\frac{\sin A\hat{B}C}{AM}} = \frac{\sin A\hat{C}B}{\sin A\hat{B}C} \overset{\text{th seni } ABC}{=} \frac{AB}{AC}$

th seni su AMB

④ Per concludere l'esercizio mi basta, in virtù dell'oss (**), mostrare che $\frac{QX}{QY} = \frac{AB}{AC}$. Considero i triangoli $M\hat{B}Q$ e $N\hat{Q}C$.



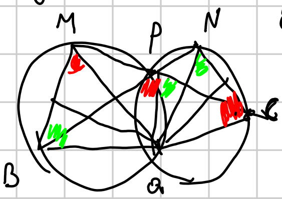
- $MN \parallel BC$
- $P := BN \cap CM$
- $Q := \bigcirc MBP \cap \bigcirc NCP$

Th: $B\hat{A}Q = P\hat{A}C$

$B\hat{M}Q = B\hat{P}Q = Q\hat{C}N \rightsquigarrow B\hat{M}Q = N\hat{C}Q$.

MPBQ ciclico, PQNC ciclico

Analogamente $Q\hat{B}M = Q\hat{N}C$.



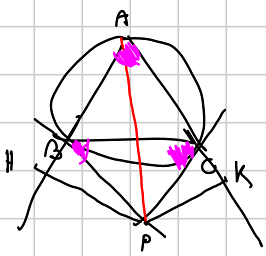
Quindi $M\hat{B}Q \sim C\hat{N}Q$

$\Downarrow$

$\frac{QX}{QY} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$ ∎

MN parallela BC

Lemma (della simmediana)



· BP, CP tg in B e C alla circoscritta.

Th. AP è simmediana

Dim. Conduco le perp. PH e PK a AB e AC.

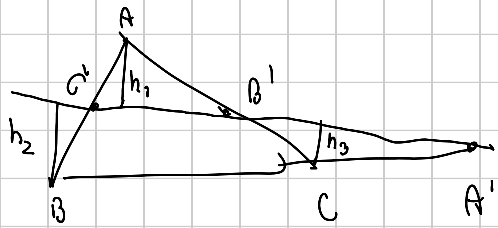
$$\frac{PH}{PK} = \frac{PB \cdot \sin P\hat{B}H}{PC \cdot \sin P\hat{C}K} = \frac{\sin A\hat{C}B}{\sin A\hat{B}C} \overset{\text{th seni in } ABC}{=} \frac{AB}{AC}$$ ∎

$P\hat{B}H = \pi - P\hat{B}C - A\hat{B}C = \pi - B\hat{A}C - A\hat{B}C = A\hat{C}B$

$P\hat{C}K = \pi - B\hat{C}P - A\hat{C}B = \pi - B\hat{A}C - A\hat{C}B = A\hat{B}C$

$PB \leq PC$

Thm (Menelao) (Esercizio 5)



A', B', C' allineati sse

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = -1.$$

Dim. (traccia) $\Rightarrow$)

Traccio da A, B, C le altezze alla retta $A'B'C'$

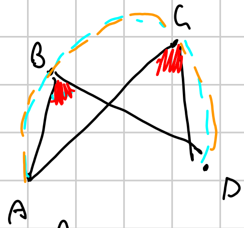
h_1, h_2, h_3 ...

[Esercizio 6: 6-3/5]

facile

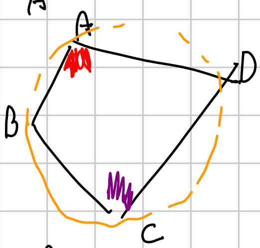
Caratterizzazioni della ciclicità: cioè $\boxed{\text{valgono} \leftrightarrow ABCD \text{ ciclico}}$

1.



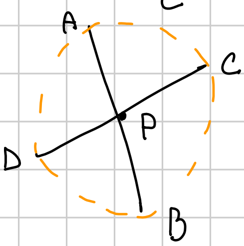
$\widehat{ABD} = \widehat{ACD}$

2.



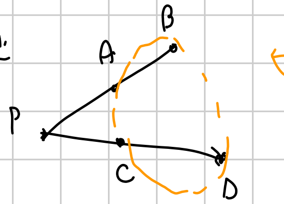
$\widehat{BAD} + \widehat{BCD} = \pi$

3.



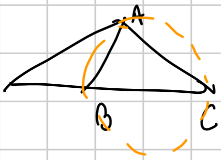
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ [Th. della corda]

4.



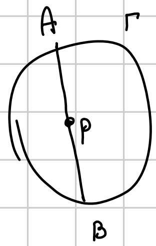
$PA \cdot PB = PC \cdot PD$ [Th della secante]

4bis



$PA^2 = PB \cdot PC$ [Th della tangente]

Def.

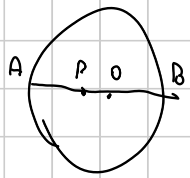


In figura P è interno.

$\mathrm{Pow}_\Gamma P := PA \cdot PB$ dove AB è una qualsiasi corda che contiene P.

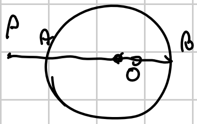
È una "buona" definizione per 3 di cui sopra.

Siccome posso scegliere qualsiasi corda per il calcolo, prendo quelle che passa per il centro



$PA \cdot PB = (OA - OP)(OB + OP) =$
$\overset{\shortparallel}{Pow_{\Gamma} P} = (r - OP) \cdot (r + OP) = r^2 - OP^2$

Oss. Se P è esterno

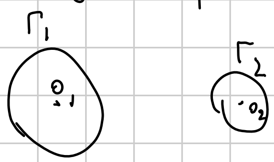


$Pow_{\Gamma} P = PA \cdot PB =$
$= (PO - OA) \cdot (PO + OB) =$
$= (PO - r)(PO + r) = OP^2 - r^2.$

Dunque in generale $\boxed{Pow_{\Gamma} P = | OP^2 - r^2 |}$

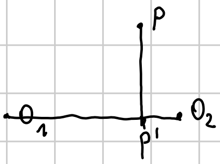
Q. Luogo dei punti per cui $Pow_{\Gamma_1} P = Pow_{\Gamma_2} P$

R. Asse radicale.



Traccia di dim. $Pow_{\Gamma_1} P = Pow_{\Gamma_2} P \iff$
$\iff O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2$
$\iff O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2$

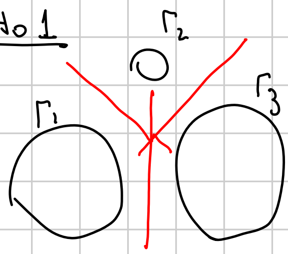
Modello



Il luogo dei P t.c. $O_1P^2 - O_2P^2 = \underset{}{k}$ $\quad \forall k = r_1^2 - r_2^2$

Questo luogo è una retta $\perp O_1O_2$. [Esercizio 7]

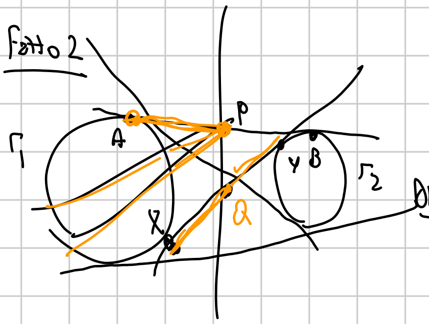
Fatto 1



- r_{12}, r_{23}, r_{13} assi rad. concorrono
- Infatti: Sia $P := r_{12} \cap r_{23}$ allora

$$\begin{cases} Pow_{\Gamma_1} P = Pow_{\Gamma_2} P & \leftarrow P \in r_{12} \\ Pow_{\Gamma_2} P = Pow_{\Gamma_3} P & \leftarrow P \in r_{23} \end{cases}$$
$\rightarrow Pow_{\Gamma_1} P = Pow_{\Gamma_3} P \rightarrow P \in r_{13}$.

Fatto 2

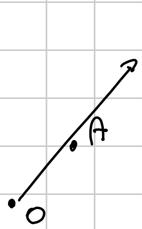


- AB tg. esterna
- $P := AB \cap r_{12}$
- $AP = PB$ [e analogamente sulle altre]

Dim. Infatti $P \in r_{12} \Rightarrow Pow_{\Gamma_1} P = Pow_{\Gamma_2} P \Rightarrow PA^2 = PB^2 \Rightarrow PA = PB$

[Esercizio 8: IMO 1/2017]

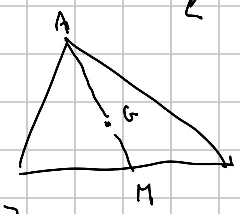
OMOTETIA centro (O) rapporto $(k) \in \mathbb{R}$



A' = il punto allineato con O, A t.c.

$\frac{OA'}{OA} = k$ [segmenti con segno]

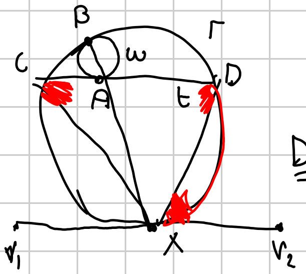
Es.



Omotetia di centro G e ragione $-\frac{1}{2}$ manda A in M

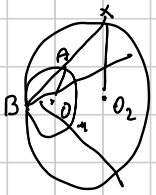
Oss. Conserva i rapporti fra lunghezze, angoli (parallelismi, perpendicolarità), NON conserva le distanze, retta → retta parallela.

Fatto [G3\7]



- ω tange CD e Γ in A e B.
- Sia $X := BA \cap \Gamma$
- X è il p.to medio dell'arco $\overset{\frown}{CD}$

Dim: ∃ un'omotetia di centro B che manda ω in Γ



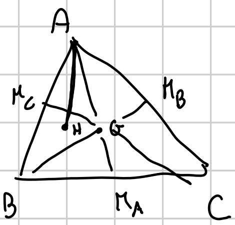
Sotto questa omotetia

A → X

CD → retta per X, parallela a CD, tg in X a Γ

Allora $V_2 X D$ = $C\hat{D}X$ (parall.) = $X\hat{C}D$ (tangenza) ⇒ $C\hat{D}X = X\hat{C}D$ ⇒ X è p.to medio dell'arco CD

Fatto 2 [retta di Eulero + cfr. Feuerbach]



Omotetia di centro G e fattore $-1/2$.

$A \to M_A$

$B \to M_B$

$C \to M_C$

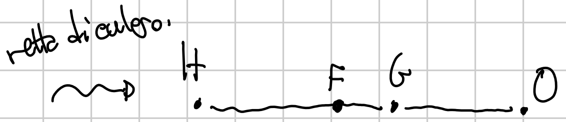
Voglio capire dove va H ortocentro di ABC. H sta sulle altezze AH, BH, CH.

AH va in una retta passante per M_A e ∥ AH, ovvero in una retta passante per A ⊥ BC ovvero l'asse di BC.

AH → asse di BC

Analogamente BH → asse di AC, CH → asse di AB

Ciò significa che H → O



Quindi H, G, O allineati in quest'ordine e HG = 2 GO.

⊙ABC → ⊙$M_A M_B M_C$ [cfr. di Feuerbach]

Il centro F di ⊙$M_A M_B M_C$ è il trasformato di O secondo questa omotetia ovvero il punto F t.c. F, G, O allineati in quest'ordine e $OG = 2GF$.

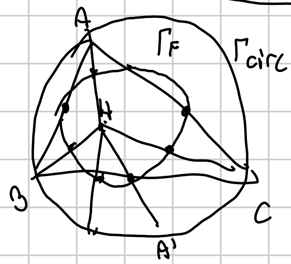
Se chiamo $HG = 4x$, $GO = 2x$, $FG = x$

Quindi $HF = 3x$, $FO = 3x$ $\rightarrow$ F è p.to medio di OH.

[Esercizio 9] Le omotetie mandano "cerchi in cerchi"

Q. $\boxed{r_F} = \frac{r_{circoscritto}}{2}$?

Oss. L'omotetia di centro H e ragione 2 manda $\odot M_A M_B M_C$ in $\odot ABC$ [Argomentate bene]

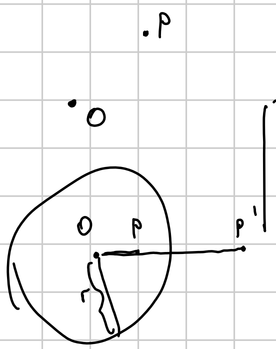


Oss. So per il (Lemma del simmetrico) che il sim. di H wrt BC sta su Γ_{circ}.
In più, grazie a ciò che ho detto prima, ottengo che $H_A \in \odot M_A M_B M_C$ e anche, ovviamente H_B, H_C.
Inoltre ci sono su anche i punti medi di AH, BH, CH

Fatto: So che $M_A \in \odot M_A M_B M_C$, so che l'omotetia di centro H e ragione 2 manda $\odot M_A M_B M_C$ in $\odot ABC$ $\rightarrow$ il simmetrico di H rispetto a M_A (che chiamo A') sta su $\odot ABC$

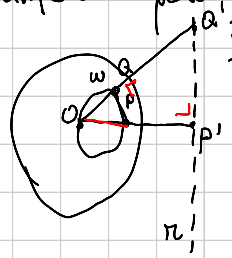
[Esercizio 10] Il punto del fatto precedente, ovvero A', è il p.to diametralmente opposto ad A in $\odot ABC$

INVERSIONE CIRCOLARE centro (O) raggio (r)



$P' :=$ punto tale che O, P, P' allineati in quest'ordine e $OP \cdot OP' = r^2$

- rette passanti per O $\rightsquigarrow$ loro stesse
- circonferenze passanti per O $\leftrightsquigarrow$ rette non passanti per O



Dim: Prendo ω cfr per O, sia P' il trasf. di un punto P su ω. (che è il diam. opposto di O in ω)

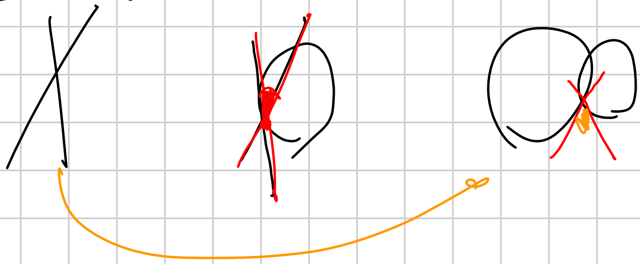
CLAIM: $\omega \leftrightarrow$ retta r perpendicolare a OP' passante per P'

Infatti, se prendo Q su ω, $Q' := OQ \cap r$. Allora $QPP'Q'$ è ciclico poiché OP diam $\rightsquigarrow O\hat{Q}P = \pi/2$ e $O\hat{P'}Q' = \pi/2$.

Dunque $\underset{r^2}{\underset{\parallel}{OP \cdot OP'}} \overset{\text{th. della secante}}{=} OQ \cdot OQ'$ $\rightsquigarrow$ Q' è il trasf. di Q.

- cfr non passanti per O ⇝ cfr non passanti per O [Esercizio 11]

COSA CONSERVA? Angoli fra rette e cfr. [Esercizio 12]

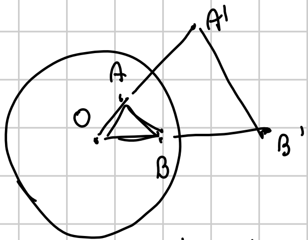


Non conserva paral., conserva tangenze, non conserva dist., conserva birapporti

Oss. Γ, Γ' due cfr di centri X e X'

Dim: O (centro di inv.), X, X' allineati ma non è detto che X' è il trasformato di X [Es. 13]

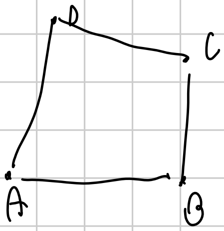
Oss.



$$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}$$ [Es. 14]

Es. 15

Usando l'es. 14 e un'inversione dimostrare il seguente [THM TOLOMEO]



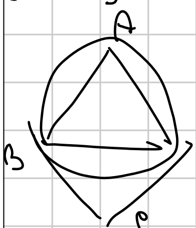
"$ABCD$ quad. convesso,

$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$

e = vale sse A, B, C, D ciclico"

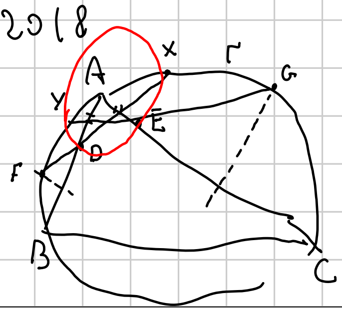
Dim. [Es. 14] + Inversione in A di raggio a caso [+ dis. triangolare]

[Es. 16] Dimostrare il lemma della simmediana con



"inversione in A di raggio $r = \sqrt{AB \cdot AC}$ + simmetria rispetto alla bisettrice in A"

IMO 1/2018



- ABC triangolo
- $AD = AE$
- $F := \Gamma_{circ} \cap \text{asse}_{BD}$
- $G := \Gamma_{circ} \cap \text{asse}_{EC}$
- **Th:** $ED \parallel FG$.

Sol [Pitrone] Siano $X := FD \cap \Gamma$
$Y := GE \cap \Gamma$

CLAIM X, Y, D, E sono su un'unica cfr di centro A.

Dim. CLAIM $A\hat{X}D = A\hat{X}F = A\hat{B}F = F\hat{D}B = A\hat{D}X \Rightarrow A\hat{X}D$ isoscele $\Rightarrow AX = AD$

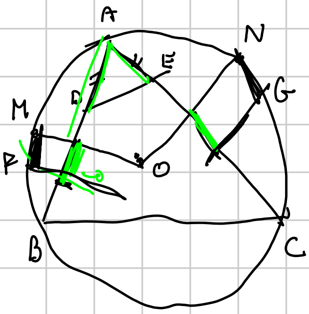
ciclicità; $FD = FB$ perché FG asse BD; opp. al v.

Analog. $AE = AY$
Dunque il claim segue.

Conclusione $Y\hat{E}D = Y\hat{X}D = Y\hat{X}F = Y\hat{G}F \Rightarrow ED \parallel GF$

$XYDE$ ciclico per le CLAIM; ciclicità Γ

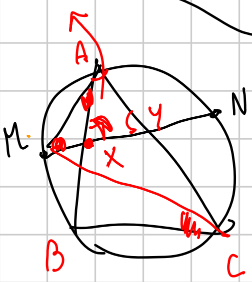
Sol.(2)



CLAIM $MN \parallel DE$ [Da fare]

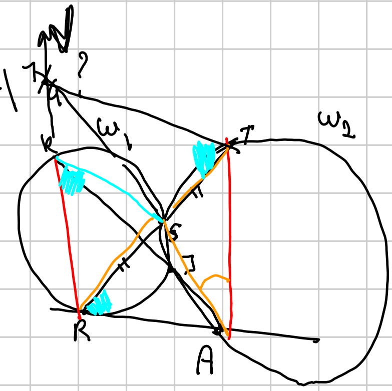
p.ti medi archi

In più gli assi coincidono da OM e $ON \Rightarrow GF \parallel MN \Rightarrow GF \parallel DE$.



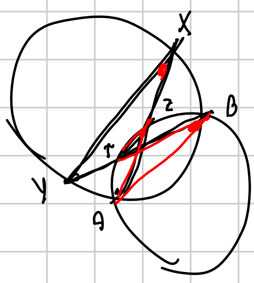
Dim [CLAIM]
$M\hat{A}B = \frac{\gamma}{2}$
$A\hat{M}N = \frac{\beta}{2}$
$\Rightarrow A\hat{X}N = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AXY$ isoscele

IMO 2017/4



- $RS = ST$
- AR tange ω_1
- A, J, K allineati, R, S, T allineati

Lemma: $ZT \parallel XY$
Dim: Disegno.



Sol. Dal lemma $KR \parallel AT$.
Vogliamo $K\hat{T}S = S\hat{A}T$
Sia $V := AS \cap RK$, siccome $AT \parallel KR$
e $RS = ST$, allora $ATRV$ parallelogramma.
Voglio mostrare $KSTV$ ciclico. Infatti: $S\hat{K}R = S\hat{R}A = S\hat{T}V \Rightarrow KSTV$ ciclico.
In più dalla ciclicità ho

AR tg. a ω_1; $RV \parallel AT$

$K\hat{T}S = K\hat{V}S = S\hat{A}T$, cioè ciò che volevo.

$KSTV$ ciclico; $RV \parallel AT$

Addendum

⇝ KT tange la cfr circoscritta ad ATS

Teoria Dei Numeri 1 - BASIC

Titolo nota 04/09/2018

erFuricksen

$x^2 = 7 + y^2 \qquad x, y \in \mathbb{Z}$

$(x-y)(x+y) = 7$

$3a + 2b = 5$

$a^n + b^n = c^n$

$n^2 - 6n = m^2 + m - 12$

$n^2 - 6n + 9 = m^2 + m - 3$

$(n-3)^2 = \underbrace{m^2 + m - 3} > m^2$

$m^2 + m - 3 \overset{?}{<} (m+1)^2 \qquad m - 3 < 2m + 1 \qquad m > -4$

$(m+1)^2 > (n-3)^2 > m^2 \qquad (n-3)^2 = 9$

$x, y \in \mathbb{N} \qquad x^5 - xy^2 + y^2 - 1 = 0$

$x^5 - 1 = y^2(x-1) \qquad x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2$

$(x^2 + ax + b)^2 \qquad \left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{1}{4}x^2 < LHS$

$\left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)^2 = x^4 + x^3 + 2x^2 + \frac{1}{4}x^2 + x + 1 > LHS$

$\left(x^2 + \frac{1}{2}x\right)^2 < y^2 < \left(x^2 + \frac{1}{2}x + 1\right)^2$

$\cancel{x^4} + \cancel{x^3} + \cancel{x^2} + x + 1 = y^2 = \left(x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\right)^2 = \cancel{x^4} + \cancel{x^3} + \frac{1}{4}x^2 + \cancel{x^2} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = 0 \qquad x^2 - 2x - 3 = 0 \qquad (x-3)(x+1) = 0$

Congruenze

$a | b$ se $\exists k \in \mathbb{Z}$ t.c. $b = ak$ $\quad a, b \in \mathbb{Z}$ $a \neq 0$

$b \equiv c \,(a) \iff a | b - c \iff$ resto di $\frac{b}{a}$ è $=$ a resto $\frac{c}{a}$

$\{0, 1, 2, \dots, a-1\}$ $\quad \left\{\frac{-a+1}{2}, \frac{-a+3}{2}, \dots, \frac{a-1}{2}\right\}$

$a = 5$ $\quad \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ $\quad \{0, 1, 2, 3, 4\}$

$[a]$ = classe di resto di a mod b

$[a + c] = [a] + [c]$ $\qquad [a \cdot c] = [a] \cdot [c]$ $\leftarrow$

$\cancel{\frac{[a]}{[c]} = \left[\frac{a}{c}\right]}$ No!

MCD: $a, b \in \mathbb{Z}$ $\quad d = (a, b) = \mathrm{MCD}(a, b)$ è t.c.

$d | a$, $d | b$ e $\forall c \in \mathbb{Z}, c \neq 0$ t.c. $c | a$ e $c | b \Rightarrow$

$\Rightarrow c | d$.

$(a, b) = (a, a + b) = (a + b, b)$

dati $x, y \in \mathbb{Z}$ NON vale che $(a, b) = (a, xa + yb)$

è vero però che $(a, b) = (a, b + xa)$ $\uparrow$

$(2, 3) \neq (2, 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3)$

dati $a, b, c \in \mathbb{Z}$ voglio determinare $x, y \in \mathbb{Z}$ t.c.

$ax + by = c$.

$d = (a, b)$ e $d \nmid c \Rightarrow$ no soluzioni

$(a,b)=1 \qquad ax+by=c \qquad ax'+by'=1 \qquad x=cx'$, $y=cy'$

$ax+by=1 \qquad (a,b)=1$.

$77x+127y=1$

$$\begin{aligned}
127 &= 1\cdot 77 + 50\\
77 &= 1\cdot 50 + 27\\
50 &= 1\cdot 27 + 23\\
27 &= 1\cdot 23 + 4\\
23 &= 5\cdot 4 + 3\\
4 &= 1\cdot 3 + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
1 &= 4 - 1\cdot 3 = 4 - 1\cdot(23-5\cdot 4) =\\
&= 6\cdot 4 - 1\cdot 23 = 6\cdot(27-23) - 1\cdot 23\\
&= 6\cdot 27 - 7\cdot 23 = 6\cdot 27 - 7\cdot(50-27) =\\
&= -7\cdot 50 + 13\cdot 27 =\\
&= -7\cdot 50 + 13(77-50) = -20\cdot 50 + 13\cdot 77\\
&= \boxed{-20}\,127 \boxed{+33}\,77
\end{aligned}$$

$(-20)\cdot 127 + (33)\cdot 77 = 1 \qquad (x,y) = (-20, 33)$

$(-20+77k,\ 33-127k) \quad k\in\mathbb{Z}$

$(a,b)=d\neq 1$ e $d\mid c \qquad a'=\frac{a}{d} \quad b'=\frac{b}{d} \quad c'=\frac{c}{d}$

$(a',b')=1$ siamo nel caso di prima

IDENTITÀ DI BEZOUT: se $(a,b)=d$, $\exists\, x,y\in\mathbb{Z}$ t.c. $ax+by=d$

Torniamo alle congruenze ...

Se io ho $(a,b)=1$ e un certo $c \in \mathbb{Z}$,

$c\ (b)$ $\quad \frac{c}{a}\ (b)$ $\quad c \cdot \frac{1}{a}$ cercare a' t.c. $a' \cdot a \equiv 1 (b)$

$\Rightarrow \frac{c}{a} := c \cdot a'\ (b)$

$\exists\, x,y$ t.c. $ax+by=1 \Rightarrow ax \equiv 1\ (b)$ $\quad a' := x$.

questo è detto inverso moltiplicativo

mod 7 $\quad 2\ (\text{mod } 7)$ $\quad 4$ funziona perché $4 \cdot 2 \equiv 1 (7)$

$2\ (\text{mod } 10)$ non ha inverso!

Se cerco a t.c. $2a \equiv 3\ (10)$ $\quad 2a = 3 + 10k$

$2a - 10k = 3$

pari $\quad$ dispari

$2a \equiv 3 (7)$ $\quad 4 \cdot 2 \cdot a \equiv 4 \cdot 3\ (7)$

$a \equiv 5 (7)$ $\quad a \equiv \frac{3}{2} (7) = 3 \cdot \frac{1}{2}\ (7)$

$2a \equiv 4 (10)$ $\quad \cancel{a \equiv 2 (10)}$ NO!

$\Rightarrow$ può $\quad a \equiv 2 (5)$ $\quad 2a = 4 + 10b$ $\quad a = 2 + 5b$

$2, 7$.

p si dice primo se dati $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $p \mid ab \Rightarrow$

$\Rightarrow p \mid a \vee p \mid b$.

TEOREMA DI WILSON

Se p è un primo allora $(p-1)! \equiv -1\ (p)$

DIM: $\{1, \dots, p-1\}$

$ax+by=1$ date (x_0, y_0) sol. (x_0+bk, y_0-ak)

$\Rightarrow a(x_0+bk) \equiv ax_0 \ (b)$

$\{1, \dots, p-1\}$ $\quad x^2 \equiv 1 \ (p) \quad (x-1)(x+1) \equiv 0 \ (p)$

$\underbrace{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-2)}^{\text{si accoppiano}} \cdot (p-1) \equiv -1 \ (p)$

$p=7 \qquad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 1 \cdot (2 \cdot 4) \cdot (3 \cdot 5) \cdot 6 \equiv 6 \equiv -1 \ (7)$

RESIDUI QUADRATICI

a si dice residuo quadratico mod n se $\exists\, b$ t.c.
$b^2 \equiv a \ (n)$

Per $n=3$ $\quad$ 0 è R.Q. $0^2 \equiv 0$, 1 è R.Q. $1^2 = 1$

$2^2 \equiv 1 \ (3) \Rightarrow$ 2 non è R.Q.

$n=4 \qquad 0, 2 \to 0 \qquad 0^2 \equiv 0 \quad 2^2 \equiv 0$

$\qquad\quad 1, 3 \to 1 \qquad 1^2 \equiv 1 \quad 3^2 \equiv 1$

$n=5 \qquad 0 \to 0 \qquad 1, -1 \to 1 \qquad 2, -2 \to -1$

Determinare al variare di $n \in \mathbb{N}$ il max di
$(100+n^2, 100+(n+1)^2)$

$(100+n^2, 100+n^2+2n+1) = (100+n^2, 100+n^2+2n+1-100-n^2) =$

$$= (100+n^2, 2n+1) \overset{\text{perché } 2n+1 \text{ è dispari}}{=} (200+2n^2, 2n+1) = (200+2n^2-2n^2-n, 2n+1) =$$

$$= (200-n, 2n+1) = (400-2n, 2n+1) = (401, 2n+1)$$

per $n = 200$ $\quad (100+200^2, 100+(201)^2) =$

$$= (100(1+400), 100\cdot 401 + 401) = 401 .$$

Sia p primo, determinare per quali p $\quad x^2+px-444p$ ha soluzioni intere

$$x = \frac{-p \pm \sqrt{\Delta}}{2} \qquad \text{deve valere } \Delta = \square$$

$$\Delta = p^2 + 4\cdot 444\, p = p(\underline{p+4\cdot 444})$$

$$\Longrightarrow \quad p \mid p+4\cdot 444 \qquad p \mid 4\cdot 444$$

IMO 2016 # 4

Un insieme A si dice profumato se $A \subseteq \mathbb{N}$ e $\forall x \in A$ $\exists y \in A$ t.c. $(x,y) \neq 1$. $P(x) = x^2+x+1$, vogliamo determinare (se esiste) il più piccolo $b \in \mathbb{N}^+$ t.c. $\exists a \in \mathbb{N}$

$$\{P(a+1), \dots, P(a+b)\} \text{ è profumato.}$$

$$P(n+1) - P(n) = n^2+2n+1+n+2-n^2-n-1 = 2n+2$$

Se $d \mid \underset{\substack{\uparrow \\ \text{sempre dispari}}}{n^2+n+1}$ e $d \mid 2n+2 \implies d \mid n+1$

$d \mid n^2+n+1 - n(n+1) = 1 \implies d = 1$

Vogliamo vedere più in generale vogliamo vedere quanto può valere $(P(n), P(n+k)) = d$

$P(n+k) - P(n) = \cancel{n^2} + 2nk + k^2 + \cancel{n} + k + \cancel{1} - \cancel{n^2} - \cancel{n} - \cancel{1} =$

$= k(2n+k+1)$

Abbiamo detto che se $k=1 \implies d=1$

Se $k=2$ $\quad d \mid 2\cdot(2n+3)$ $\quad d \mid n^2+n+1$ come prima

$d \mid 2n+3$ ← anche lui è dispari

$(P(n), P(n+2)) = (P(n), 2(2n+3)) = (P(n), 2n+3) = (2P(n), 2n+3) =$

$= (2n^2+2n+2, 2n+3) = (2n^2+2n+2-2n^2-3n, 2n+3) =$

$= (-n+2, 2n+3) = (-n+2, 7) \implies d \mid 7$

perché $d=7$ deve valere che $7 \mid -n+2 \implies n \equiv 2 \ (7)$

Quindi in sostanza $(P(n), P(n+2)) \neq 1 \iff n \equiv 2 \ (7)$

$b \neq 1$. $b \neq 2$ (caso $k=1$). $b \neq 3$ (per caso $k=1$).

$b \neq 4$ perché avremmo $\{P(a+1), P(a+2), P(a+3), P(a+4)\}$

assurdo perché dovremmo avere $a+1 \equiv a+2 \equiv 2 \ (7)$.

Se $k=3$ $\quad k(2n+k+1) = 3(2n+4)$

$(P(n), P(n+3)) = (P(n), 3(2n+4)) = (P(n), 3(n+2))$

se $3 \nmid d$ allora $(P(n), P(n+3)) = (P(n), n+2) =$

$= (n^2+n+1, n+2) = (n^2+n+1-n^2-2n, n+2) = (-n+1, n+2) =$

$= (-n+1, 3) \Rightarrow d \mid 3 \Rightarrow d = 1$.

Se $3 \mid d \Rightarrow 3 \mid n^2+n+1$ $\quad n(n+1) \equiv -1\,(3) \Rightarrow n \equiv 1\,(3)$.

$\Rightarrow n = 3m+1$. $\quad (P(n), P(n+3)) = (P(n), 3n+6) = d$

$d \mid (3P(n), 3n+6) = (3n^2+3n+3, 3n+6) = (-3n+3, 3n+6) =$

$= (-3n+3, 9) \Rightarrow d \mid 9$. Tuttavia $n = 3m+1 \Rightarrow$

$P(n) = 9m^2+6m+1+3m+1+1 = 9m^2+9m+3 \equiv 3\,(9)$

$\Rightarrow d = 3$. Inoltre $d = 3 \Leftrightarrow n \equiv 1\,(3)$

Se $k = 4$ $\quad k(2n+k+1) = 4\cdot(2n+5)$

$(P(n), P(n+4)) = (P(n), 2n+5) = (2P(n), 2n+5) =$

$= (2n^2+2n+2-2n^2-5n, 2n+5) = (-3n+2, 2n+5) =$

$= (-n+7, 2n+5) = (-2n+14, 2n+5) = (19, 2n+5)$

$\Rightarrow d \mid 19$ $\quad$ affinché $d \mid 19$ deve valere $2n \equiv -5\,(19)$

$n \equiv -50\,(19)$ $\quad n \equiv 7\,(19)$. (è un se e solo se).

Se $b = 5$ $\quad a+1 \quad a+2 \quad a+3 \quad a+4 \quad a+5$

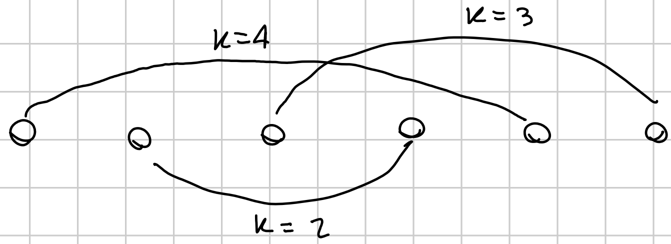
per $3, 7, 19$ c'è al più una coppia con $MCD \neq 1$.

$\Rightarrow$ un tizio rimane da solo

infatti $k=4$ serve solo per $(a+1)\sim(a+5)$, $k=3$ esclude $a+3$ $\Rightarrow$ $k=2$ deve essere usato per $a+3$.

Ma allora $k=3$ deve scegliere se lasciare da solo $a+2$ o $a+4$. $\Rightarrow$ $b \neq 5$

$b=6$?



Ci riusciamo se $a+1 \equiv 7\ (19)$, $a+2 \equiv 2\ (7)$, $a+3 \equiv 1\ (3)$

$$\begin{cases} a \equiv 6\ (19) \\ a \equiv 0\ (7) \\ a \equiv 1\ (3) \end{cases}$$

ESERCIZI:

PAG 10: 40 – (41) – (42) – 43 – (49) – 50 – 54 – 55 – (56)

PAG: 42: 3 – 5

BONUS:
- Siano p, q primi tali che $\exists\, n \in \mathbb{N}$ per cui $\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$; trovare tutti i possibili valori di $p-q$
- Mostrare che la successione $5, 12, 19, 26, 33 \ldots$ non ha elementi nella forma $2^n - 1$ per un certo n.

- $mn + 2m - n - 8 = 0$

$m(n+2) - (n+2) - 6 = 0 \qquad (n+2)(m-1) = 6$

- p primo $\qquad 5p + 49 = a^2 \qquad 5p = (a-7)(a+7)$

- $n^2 + 5n + 16 = 169y \qquad n^2 + 5n + 16 \equiv 0 \ (13)$

$n^2 - 8n + 16 \equiv 0 \ (13) \qquad (n-4)^2 \equiv 0 \ (13) \implies$

$\implies 13 \mid (n-4)^2 \implies 13 \mid n-4 \implies n \equiv 4 \ (13)$

$\implies 13^2 \mid n^2 - 8n + 16$

$n^2 + 5n + 16 = n^2 - 8n + 16 + 13n = \underline{169 \cdot m^2} + 13(4 + 13m) \not\equiv 0 \ (169)$

$n = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25 - 64}}{2} \leftarrow \sqrt{-39} \equiv 0$

$n^2 + 5n + 16 \equiv \underbrace{n^2 + 5n + 3}_{(n-4)^2} \underbrace{-3+16}_{+13} \equiv (n-4)^2$

$\sqrt{-1} = x \qquad x^2 \equiv -1 \ (13)$

$x \equiv 5 \ (13)$

- $x^2 + 3y = 2 \qquad x^2 \equiv 2 \ (3) \quad$ NO!

- $3^y - x^2 = 41$

$3^y \equiv 1 + x^2 \equiv 1 \ (4) \implies y$ pari $\qquad y = 2k$

$(3^k - x)(3^k + x) = 41 \qquad 3^k - x = 1 \qquad 3^k + x = 41$

$2 \cdot 3^k = 42 \qquad 3^k = 21$ no!

- $abc \mid (a+b+c)^n \quad \forall a,b,c$ t.c. $a \mid b^3, \; b \mid c^3, \; c \mid a^3$.

$a \mid b^3 \mid c^9 \qquad (c^9, c^3, c) = (a, b, c)$

$c^{13} \mid (a+b+c)^n = c^n(\dots)^n \qquad n = 13$.

$(a+b+c)^{13} = \sum a^i b^j c^k \qquad i+j+k = 13$

$abc \mid a^i b^j c^k \qquad c \mid a^{i-1} b^{j-1} \qquad i+j = 13$

se $i \geq 4 \quad c \mid a^3 \mid a^{i-1}$, altrimenti $j > 9 \Rightarrow c \mid b^9 \mid b^{j-1}$.

$abc \mid a^{13} \qquad bc \mid a^{12} = a^3 \cdot a^9 \quad \Rightarrow \quad n = 13$ funziona.

$a = 2^9 \quad b = 2^3 \quad c = 2 \qquad 2^{13} \overset{?}{\mid} (2^9 + 2^3 + 2)^n$ per $n < 13$

$(2^9 + 2^3 + 2)^n = 2^n (2^8 + 2^2 + 1)^n$.

- EGMO 2012 # 5

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}$$

$$\frac{p}{p+1} - 1 + \frac{q+1}{q} - 1 = \frac{2n}{n+2} - 2$$

$$-\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q} = \frac{-4}{n+2} \qquad \frac{p+1-q}{(p+1)q} = \frac{-4}{n+2}$$

$$(q-p-1)(n+2) = 4q(p+1) \qquad q > p+1$$

$q \mid q-p-1 \qquad q \mid p+1$, impossibile $\Rightarrow q \mid n+2$.

$(q-p-1, p+1) = (q, p+1) = 1 \Rightarrow p+1 \mid n+2$.

$q-p-1 \mid 4$

- IMO LONGLIST 1992

presa $5+7k$, mostrare che non ci sono 2^n-1 .

$5+7k = 2^n - 1 \qquad 6+7k = 2^n$ a meno di cambiare k scrivo $7k = 2^n+1 \qquad 7 \mid 2^n+1$

$1 \to 1 \quad 2 \to 4 \quad 3 \to 2 \quad -3 \to 2 \quad -2 \to 4 \quad -1 \to 1$

$1, 2, 4$ sono gli unici R.Q. mod 7 .

Se n è pari $2^n+1 \equiv 2, 3, 5 \ (7) \Rightarrow 7 \nmid 2^n+1$

Se n è dispari $n = 1+2m \qquad 7 \mid 2 \cdot 2^{2m}+1 \qquad 2 \cdot 2^{2m}+1 \equiv 0 \ (7)$

$2^{2m} \equiv -\frac{1}{2} \ (7) \equiv 3 \ (7)$ che non è R.Q.

Teoria Dei Numeri 2 - BASIC

Titolo nota 06/09/2018

erFuricksen

TEOREMA CINESE DEL RESTO

$$\begin{cases} x \equiv a_1 \ (n_1) \\ x \equiv a_2 \ (n_2) \end{cases}$$

Se $(n_1, n_2) = 1$.

Cerco x_1 t.c. $\begin{cases} x_1 \equiv 0 \ (n_1) \\ x_1 \equiv a_2 \ (n_2) \end{cases}$, cerco x_2 t.c. $\begin{cases} x_2 \equiv a_1 \ (n_1) \\ x_2 \equiv 0 \ (n_2) \end{cases}$

$x_1 + x_2 = x \implies$ è soluzione!

Se non troviamo subito x_1, x_2, posso cercare y_1, y_2 t.c.

$\begin{cases} y_1 \equiv 0 \ (n_1) \\ y_1 \equiv 1 \ (n_2) \end{cases}$ $\begin{cases} y_2 \equiv 1 \ (n_1) \\ y_2 \equiv 0 \ (n_2) \end{cases}$ e poi prendo $x_1 = a_1 y_1$ $x_2 = a_2 y_2$.

$x + k \cdot n_1 n_2$ $k \in \mathbb{Z}$

Se avessi più equazioni

$\begin{cases} x \equiv a_1 (n_1) \\ x \equiv a_2 (n_2) \\ x \equiv a_3 (n_3) \end{cases}$ con n_1, n_2, n_3 coprimi a 2 a 2

dobbiamo trovare una sol. nella forma $x_1 + x_2 + x_3 + k n_1 n_2 n_3$

(pongo $x_1 \equiv \begin{cases} a_1 (n_1) \\ 0 \ (n_2) \\ 0 \ (n_3) \end{cases}$ ....)

$$\begin{cases} x \equiv 1 \ (3) \\ x \equiv 2 \ (5) \\ x \equiv 5 \ (7) \end{cases} \qquad x_1 = 70 \qquad x_2 = 42 \qquad x_3 = 75$$

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + k \cdot 105 =$$
$$= 187 + 105k \equiv 82 \ (105)$$

Se n_1, n_2 non sono coprimi?

$$\begin{cases} x \equiv 7 \ (10) \\ x \equiv 8 \ (15) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \ (2) \\ x \equiv 2 \ (5) \\ x \equiv 3 \ (5) \\ x \equiv 2 \ (3) \end{cases} \implies \text{non ha sol!}$$

Se avessi avuto

$$\begin{cases} x \equiv 7 \ (10) \\ x \equiv 7 \ (15) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \ (2) \\ x \equiv 2 \ (5) \\ x \equiv 1 \ (3) \\ x \equiv 2 \ (5) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 1 \ (2) \\ x \equiv 1 \ (3) \\ x \equiv 2 \ (5) \end{cases}$$

.. Per quali $n \in \mathbb{N}$ $\quad 1 + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3!} + \frac{n^4}{4!} + \frac{n^5}{5!} + \frac{n^6}{6!} \in \mathbb{Z}$

è equivalente a $\quad 6! \ \Big| \ \underbrace{6! + 6!\,n + \frac{6!}{2} n^2 + 5!\,n^3 + 30 n^4 + 6n^5 + n^6}_{= p(n)}$

$$p(n) \equiv 6n^5 + n^6 \ (5) \equiv n^5 + n^6 \ (5) \equiv n^5(n+1) \ (5)$$

$\implies p(n) \equiv 0 \implies 5 \mid n^5(n+1) \implies 5 \mid n \ \vee \ 5 \mid n+1$

mod 3 $\quad n^6 \equiv 0 \ (3) \implies 3 \mid n \implies 9 \mid p(n) \implies n \equiv 0 \ (3)$.

mod 2 (uguale) $\quad n \equiv 0 \ (2) \quad$ (se controllo ogni volta che in un coefficiente ho meno di 2^4 riacquisto fattori 2 da n^k).

$\implies n \equiv 0 \ (2)$ è sufficiente

$$\begin{cases} n \equiv 0\ (2) \\ n \equiv 0\ (3) \\ n \equiv 0\ (5) \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} n \equiv 0\ (2) \\ n \equiv 0\ (3) \\ n \equiv -1\ (5) \end{cases}$$

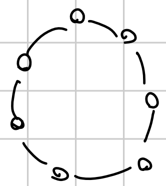
$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$n \equiv 0\ (30) \qquad\qquad n \equiv -6\ (30).$$

... Torniamo un attimo a N1 ...

$$\begin{cases} a \equiv 1\ (3) \\ a \equiv 0\ (7) \\ a \equiv 6\ (19) \end{cases} \Longrightarrow \text{per teorema cinese c'è soluzione!}$$

TEOREMA DI FERMAT



p perline, a possibili colori

Quante sono le collane a meno di rotazione?

Ci sono a collane tutte dello stesso colore.

Se le perline non sono tutte dello stesso colore, ruotando ottengo p diverse collane (perché p primo).

$$\Longrightarrow \quad \frac{a^p - a}{p} \text{ collane!}$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{a^p - a}{p} \text{ deve essere intero!} \quad \Longrightarrow \quad a^p \equiv a\ (p)$$

TEOREMA DI FERMAT: Dati p primo, $a \in \mathbb{N}$, $p \nmid a$

$$\Longrightarrow \quad a^p \equiv a\ (p).$$

DIM: per induzione su a: per $a=0$ è vero.

per $a+1$ $\quad (a+1)^p = \sum_{k=0}^{p} a^k \cdot \binom{p}{k}$, ma $p \mid \binom{p}{k}$ $\forall k \neq 0,p$

perché se $k \neq 0, p$ $\quad \binom{p}{k} = \frac{p!}{k!(p-k)!} \Rightarrow k, p-k < p \Rightarrow$

$\Rightarrow p \nmid k!$ e $p \nmid (p-k)!$, ma $p \mid p! \Rightarrow p \mid \binom{p}{k}$

$\Rightarrow \quad (a+1)^p \equiv a^p + 1 \underset{\text{ip. induttiva}}{\equiv} a+1 \ (p)$. $\square$

ES: Quanto vale $2^{2018} \pmod 7$?

$2^{2018} = 2^{2016+2} = 2^{6 \cdot \frac{2016}{6} + 2} \equiv (2^6)^{2016/6} \cdot 4 \equiv 1^{\frac{2016}{6}} \cdot 4 \equiv 4 \ (7)$

φ di EULERO

$\varphi : \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N} \qquad \varphi(n) = |\{1 \leq x \leq n,\ (x,n)=1\}|$

ES: $\varphi(1)=1 \qquad \varphi(6)=2 \qquad \varphi(10)=4 \qquad \varphi(7)=6$.

OSS: Se p è primo $\quad \varphi(p) = p-1$

Se p è primo $\quad \varphi(p^k) = p^k - \frac{p^k}{p} = p^{k-1}(p-1)$

DEF: φ è moltiplicativa se $\forall (a,b)=1 \quad \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$

Se $(a,b)=1 \qquad \varphi(ab) = |\{\text{elementi coprimi con } ab\}| =$

$= |\{\text{el. cop. con } a \text{ e con } b\}|$ quindi cerco delle coppie di resti mod a e mod b (x,y) t.c. $(x,a)=1$ $(y,b)=1$. Fissata una coppia (x,y) per il teorema cinese $\exists!\, w \bmod ab$ t.c. $\begin{cases} w \equiv x\,(a) \\ w \equiv y\,(b) \end{cases}$ e viceversa, da w $\exists!\,(x,y)$.

$\Rightarrow$ c'è una biiezione fra le classi di resto coprime con ab e le coppie di resti coprimi con a e b.

Quante sono? $\varphi(a)\varphi(b)$, ma anche $\varphi(ab)$

$\Rightarrow$ $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$.

Ma allora dato n generico, $n=p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}$

$$\Rightarrow \varphi(n)=\varphi(p_1^{\alpha_1})\cdot\ldots\cdot\varphi(p_k^{\alpha_k})=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i-1}(p_i-1)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}\cdot\frac{p_i-1}{p_i}=$$

$$=n\cdot\frac{(p_1-1)}{p_1}\cdot\ldots\cdot\frac{(p_k-1)}{p_k}=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{p_k}\right)$$

TEOREMA DI EULERO-FERMAT

Dati $a,n\in\mathbb{N}$ $(a,n)=1$ $\Rightarrow$ $a^{\varphi(n)}\equiv 1\,(n)$.

DIM: $A=\{[b_1],[b_2],\ldots,[b_{\varphi(n)}]\}$ = insieme classi di resto coprime mod n

Vale che $[a]\in A$, considero $A'=\{[ab_1],[ab_2],\ldots,[ab_{\varphi(n)}]\}$

Sicuramente $(ab_i,n)=1$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $A'\subseteq A$.

Se per assurdo $ab_i\equiv ab_j$ per $i\neq j$, esiste a^{-1} inverso molt. di a $\Rightarrow$ $a^{-1}a b_i \equiv a^{-1} \cdot a b_j$ $\Rightarrow$ $b_i \equiv b_j$ assurdo.

$\Rightarrow$ $ab_i \not\equiv ab_j$ $\forall i \neq j$ $\Rightarrow$ A' ha $\varphi(n)$ elementi $\Rightarrow$ $A' = A$.

Allora $\prod_{x \in A} x = \prod_{x \in A'} x$ $\Rightarrow$ $b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{\varphi(n)} \equiv ab_1 \cdot ab_2 \cdot \ldots \cdot ab_{\varphi(n)}$

$\prod b_i \equiv a^{\varphi(n)} \cdot \prod b_i$, ma $(\prod b_i, n) = 1$ $\Rightarrow$ posso dividere

$\Rightarrow$ $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (n)$. $\square$

- Sia n un numero che in base 10 è del tipo $30x070y03$ con x, y cifre. Sappiamo che $37 \mid n$, determinare $\max(x+y)$

$n = 300070003 + 100(10^4 \cdot x + y) = 3 \cdot 10^8 + 7 \cdot 10^4 + 3 + 10^2(10^4 x + y)$

$1000 = 1 + 999 = 1 + 27 \cdot 37 \equiv 1 \ (37)$

$\Rightarrow$ $n \equiv 300 + 70 + 3 + 100(10x + y) \ (37) \equiv$

$\equiv 3 + 1000x + 100y \equiv 3 + x + 100y \ (37) \equiv$

$\equiv 3 + x - 11y \ (37)$ $\qquad$ $100y + x \equiv -3 \ (37)$

$\Downarrow$

$y0x$

Def: Si chiama ordine moltiplicativo di a mod n $\text{ord}_n(a)$ il più piccolo intero positivo t.c. $a^{\text{ord}_n(a)} \equiv 1(n)$.

oss: $a^{\varphi(n)} \equiv 1(n)$ non è detto che $\varphi(n)$ sia l'ordine!

Es: $2^6 \equiv 1\ (7)$ $\quad \text{ord}_7(2) = 3$ $\quad (2^3 \equiv 1\ (7))$.

oss: $\text{ord}_n(a) \mid \varphi(n)$, infatti se così non fosse

$k = \text{ord}_n(a)$ $\quad \varphi(n) = k \cdot \alpha + r$ $\quad 0 < r < k$

$1 \equiv a^{\varphi(n)} \equiv a^{k\alpha + r} \equiv a^r$ assurdo! perché $r < k$.

In generale, $\exists a$ t.c. $\text{ord}_n(a) = \varphi(n)$? dipende da n.

Se n è primo sì! $\Rightarrow \forall p$ primo $\exists a$ t.c. $\text{ord}_p(a) = p-1$.

Def: Un tale a è detto generatore mod n.

BMO 2018 # 4

Determinare tutte le coppie (p, q) con p, q primi, per cui

$$3p^{q-1} + 1 \mid 11^p + 17^p$$

Sia r un primo t.c. $r \mid 3p^{q-1} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow r \mid 11^p + 17^p$, o $p \mid r-1$ oppure $p \nmid r-1$

Se $p \nmid r-1$ $\quad (p, r-1) = 1 \Rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z}$ t.c. $1 = ap + b(r-1)$

$\Rightarrow 11^p \equiv -17^p\ (r)$ $\quad -\left(\frac{17}{11}\right)^p \equiv 1\ (r)$ $\quad \left(\frac{17}{11}\right)^p \equiv -1\ (r)$

$11^{ap} \equiv (-17^p)^a$ $\quad 11^{ap} \equiv 11^{ap + b(r-1)} \equiv 11\ (r)$

$(-17^p)^a \equiv (-17)^{pa} \equiv (-17)^{pa + b(r-1)} \equiv -17\ (r)$

$11^{ap+b(r-1)} = 11^{ap} \cdot 11^{b(r-1)}$

$11 \equiv -17\ (r)$ $\quad 28 \equiv 0\ (r)$

$\Longrightarrow \quad r = 2 \quad \vee \quad r = 7$.

Se $p = 2$ $\quad 11^2 + 17^2 = 410 = 2 \cdot 5 \cdot 41$ ... ecc... numero finito di casi

$\Longrightarrow$ ... non ci sono soluzioni ...

Se $p \neq 2$ $\quad 11^p + 17^p \equiv 11 + 17 \ (8) \equiv$ $\quad \left((2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = = 4n(n+1) + 1 \equiv 1 \ (8) \right)$

$\equiv 4 \ (8)$

$\boxed{\text{CASO 1}}$ $\boxed{q \neq 2}$ $\quad 3p^{q-1} + 1 \equiv 3 + 1 \equiv 4 \ (8)$.

Se $r = 7$ $\quad 7 \mid 3p^{q-1} + 1 \Longrightarrow p \neq 7 \qquad 7 \mid 11^p + 17^p$

$11^p + 17^p = 28 \left(11^{p-1} - 11^{p-2} \cdot 17 + \ldots - 11 \cdot 17^{p-2} + 17^{p-1} \right)$

ci piacerebbe che lui $\not\equiv 0 \ (7)$.

$17 \equiv -11 \ (7) \Longrightarrow 11^{p-1} - 11^{p-2} \cdot 17 + \ldots + 17^{p-1} \equiv$

$\equiv 11^{p-1} + 11^{p-1} + \ldots + 11^{p-1} \equiv p \cdot 11^{p-1} \not\equiv 0 \ (7)$

$\Longrightarrow$ c'è un solo 7 in $11^p + 17^p \Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ c'è al più un 7 in $3p^{q-1} + 1$.

$3p^{q-1} + 1 = 4 \cdot 7^\alpha \cdot \underbrace{(\ldots)}_{1 \bmod p} \equiv 4 \cdot 7^\alpha \ (p) \qquad \alpha \in \{0, 1\}$

Tuttavia $\quad 3p^{q-1} + 1 \equiv 1 \ (p) \Longrightarrow$

$\Longrightarrow \quad 4 \equiv 1 (p) \quad \vee \quad 4 \cdot 7 \equiv 1 (p) \quad (27 \equiv 0 (p))$

$\Longrightarrow \quad p = 3$!!! $\qquad 11^3 + 17^3 = 28 (121 + 289 - 11 \cdot 17)$

... si fa ... $\quad$ unica sol. $(3, 3)$.

$\boxed{\text{CASO 2} \mid q=2}$ $\qquad 3p+1 \mid 11^p + 17^p \equiv 4\,(8)$

$$p \not\equiv -\frac{1}{3}\,(8).$$

$$3p+1 = 2^{\alpha}\cdot 7^{\beta}\cdot \underbrace{(\ldots)}_{\equiv 1(p)} \implies 2^{\alpha}\cdot 7^{\beta} \equiv 1\,(p) \qquad \begin{matrix}\alpha\in\{1,2\}\\ \beta\in\{0,1\}\end{matrix}$$

il caso $\alpha = 2$ già fatto prima.

$$\alpha = 1 \implies 2\equiv 1\,(p) \ \vee\ 14 \equiv 1\,(p) \implies p = 13$$

$$\implies 40 \mid 11^{13} + 17^{13} \qquad 8 \mid 40 \text{ ma } 8 \nmid 11^{13}+17^{13}. \text{ No sol.}$$

- $D = \{n\in\mathbb{N} : n \mid 2^n + 1\}$

(a) Determinare tutti i primi $p \in D$.

$$p \mid 2^p + 1 \qquad 2^p + 1 \equiv 2 + 1 = 3 \equiv 0\,(p) \implies p = 3.$$

(b) Determinare tutti i $p^k \in D$

$$p^k \mid 2^{p^k} + 1 \implies p \mid 2^{p^k} + 1$$

INDUZIONE

$$2^{p^k} = \left(2^{p^{k-1}}\right)^p \equiv 2^{p^{k-1}}\,(p) \quad \ldots\ldots \quad 2^{p^k} \equiv 2\,(p)$$

$$\implies 0 \equiv 2^{p^k} + 1 \equiv 2+1 \equiv 3\,(p) \implies p = 3.$$

Cerco k t.c. $3^k \mid 2^{3^k} + 1$ $\quad$ per $k=0$ $\quad 3^0 = 1 \mid 2^{3^0}+1$.

Per $k+1$ $\qquad 2^{3^{k+1}} + 1 = \underbrace{\left(2^{3^k}+1\right)}_{\text{divisibile per } 3^k}\left(2^{2\cdot 3^k} - 2^{3^k} + 1\right)$

Ci basta $\underbrace{2^{2\cdot 3^k}}_{\equiv 1} - \underbrace{2^{3^k}}_{\equiv 2} + \underbrace{1}_{\equiv 1} \equiv 0\,(3)$ $\quad$ che è sempre vero $\quad 1 - 2 + 1 \equiv 0$

$$\implies 3^k \in D \quad \forall k.$$

ESERCIZI : · FINIRE QUELLO DI PRIMA (PAG 43 ES 10)

· PAG 12 ES 61 · PAG 42 ES 10

· PAG 43 ES 7 - 9

BONUS 1 : Trovare tutti gli $a, b \in \mathbb{Z}^+$ t.c. , dato il polinomio

$$P(n) = \frac{n^5 + a}{b}, \quad \exists n \in \mathbb{Z} \text{ per cui } P(n), P(n+1), P(n+2) \in \mathbb{Z}$$

BONUS 2 : Trovare tutti gli x, y primi t.c.

$$x^y - y^x = xy^2 - 19$$

BONUS 3 : Mostrare che esistono infiniti $n \in \mathbb{N}$ composti

tali che $n \mid 3^{n-1} - 2^{n-1}$

$3 + 100y + x \equiv 0 \ (37)$ $\quad$ $30 + y + 10x \equiv 0 \ (37)$

$y + 10x \equiv 7 \ (37)$ $\quad$ $y + 10x \to 7, 44, 81$

· $pq \mid 2^{pq} + 1 \rightarrow 2^{pq} + 1 \equiv 0 \ (p) \quad 2^q + 1 \equiv 0 \ (p)$

Se $p \neq 3$ allora $q \mid \text{ord}_p(2) \mid p - 1$, allo stesso modo

se $q \neq 3$ $p \mid q - 1$. $\Rightarrow q < p$ e $p < q$ assurdo

WLOG $p = 3$ $\quad q \mid 2^3 + 1 = 9 \quad q = 3$.

$2^q + 1 \equiv 0 \ (p) \quad 2^q \equiv -1 \ (p) \quad 2^{2q} \equiv 1 \ (p) \Rightarrow \text{ord}_p(2) \mid 2q$

se $q \nmid \text{ord} \Rightarrow \text{ord} \mid 2 \Rightarrow \text{ord} = 1 \lor \text{ord} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \equiv 1 \ (p) \lor 4 \equiv 1 \ (p) \Rightarrow p = 3$.

$\Rightarrow$ se $p \neq 3$ $\quad q \mid \mathrm{ord}$ ... BLA BLA ...

- $n \mid 2^n + 1$ $\quad$ sia p un primo t.c. $p \mid n \Rightarrow$

$\Rightarrow 2^n + 1 \equiv 0 \,(p) \qquad 2^{p \cdot \frac{n}{p}} + 1 \equiv 0 \qquad 2^{\frac{n}{p}} + 1 \equiv 0 \;(p)$

se $p^k \parallel n$ $\quad (p^k \mid n,\ p^{k+1} \nmid n) \qquad 2^{\frac{n}{p^k}} + 1 \equiv 0 \;(p)$

$2^n \equiv 2^{\frac{n}{p}\cdot p} \equiv 2^{\frac{n}{p}} \equiv 2^{p \cdot \frac{n}{p^2}} \equiv 2^{\frac{n}{p^2}} \ldots \uparrow$

$2^{2 \cdot \frac{n}{p^k}} \equiv 1 \,(p) \qquad \mathrm{ord}_p(2) \mid p-1 \qquad \mathrm{ord}_p(2) \mid 2 \cdot \frac{n}{p^k}$

IDEA: scelgo p il più piccolo primo t.c. $p \mid n$, $\quad p \neq 2$ perché sì, $\quad p \geq 3$, siccome è il più piccolo $\forall q$ primo, $q \mid \frac{n}{p^k}$, $\quad q > p$, quindi $q \nmid \mathrm{ord}_p(2)$, perché se valesse $q \mid \mathrm{ord}_p(2) \Rightarrow q \mid p-1 \Rightarrow p > q$ assurdo

$\Rightarrow \left(\frac{n}{p^k}, \mathrm{ord}_p(2)\right) = 1 \Rightarrow \mathrm{ord}_p(2) \mid 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2 \equiv 1 \,(p) \ \vee\ 4 \equiv 1 \,(p) \Rightarrow p = 3.$

- $p^2 q \mid 2^{p^2 q} + 1 \qquad p \neq q$

1) $\quad 2^{9q} + 1 \equiv 0 \,(9q) \qquad 2^9 + 1 \equiv 0 \,(q) \qquad 513 \equiv 0 \,(q)$

$513 = 171 \cdot 3 = 57 \cdot 9 = 27 \cdot 19 \Rightarrow q = 19$

$9q \equiv 3 \,(6) \qquad 6 = \varphi(9) \Rightarrow 2^{9q} \equiv 2^3 \,(9) \equiv -1 \,(9)$

$\Rightarrow (p, q) = (3, 19)$ è sol.

2) $\quad 2^{3p^2} + 1 \equiv 0 \,(3p^2) \qquad 2^3 + 1 \equiv 0 \,(p) \Rightarrow p = 3$ no sol.

$A = 5^n + 3^n + 1$. $\quad A \equiv 2^n + 1 \ (3)$ e vogliamo $A \not\equiv 0$

se n dispari $3 | A$ no! $\Rightarrow$ n pari $\Rightarrow$ $A \equiv 2 \ (3)$

$3^n + 1 \not\equiv 0 \ (5) \quad 3^n \not\equiv -1 \ (5) \Rightarrow n \not\equiv 2 \ (4) \Rightarrow n \equiv 0 \ (4)$

$A \not\equiv 0 \ (7) \quad 5^n + 3^n + 1 \equiv (-2)^n + 3^n + 1 \equiv 2^n + 3^n + 1 \equiv$

$\equiv 2^n + (-4)^n + 1 \equiv 4^n + 2^n + 1 \ (7)$

Se valesse $A \equiv 0 \ (7)$ allora $4^n + 2^n + 1 \equiv 0 \ (7)$

$\Rightarrow \quad 2^{2n} + 2^n + 1 \equiv 0 \qquad 2^n = \begin{cases} 2 \\ 4 \\ 1 \end{cases}$

1) $2^n = 2 \Rightarrow A \equiv 2^2 + 2 + 1 \equiv 0 \ (7)$

2) $2^n = 4 \Rightarrow A \equiv 4^2 + 4 + 1 \equiv 2 + 4 + 1 \equiv 0 \ (7)$

3) $2^n = 1 \Rightarrow A = 1 + 1 + 1 \equiv 3 \ (7)$

$\Rightarrow \operatorname{ord}_7(2) | n \Rightarrow 3 | n$.

- $p_1^n, p_2^n, \ldots, p_m^n$ cerchiamo a t.c.

  $p_1^n | a \quad a + d \equiv 0 \ (p_2^n) \quad a + 2d \equiv 0 \ (p_3^n) \ \ldots \ a + (m-1)d \equiv 0 \ (p_m^n)$

- $\forall p$ primo $\exists \infty \ n$ t.c. $p | 2^n - n$

  $2^n \equiv n \ (p) \qquad n \equiv 1 \ (p) \qquad 2^n \equiv 1 \ (p)$ mi basta

  $p - 1 | n \qquad \begin{cases} n \equiv 1 \ (p) \\ n \equiv 0 \ (p-1) \end{cases}$

  ce n'è anche infinite del tipo $\begin{cases} n \equiv 2 \ (p) \\ n \equiv 1 \ (p-1) \end{cases}$

- $\exists \infty$ n composti: $n \mid 3^{n-1} - 2^{n-1}$.

$n = 3^k - 2^k$ $\qquad 3^k - 2^k \mid 3^{3^k - 2^k - 1} - 2^{3^k - 2^k - 1}$

che è vero se $k \mid 3^k - 2^k - 1$

$k = 2^\alpha$ $\qquad 3^k - 2^k - 1 = 3^{2^\alpha} - 2^{2^\alpha} - 1$ $\qquad 2^{2^\alpha} \equiv 0 \ (2^\alpha)$

se $\alpha > 1$ $\quad 2^\alpha > \alpha \Rightarrow 2^{2^\alpha} \equiv 0 \ (2^\alpha)$, quindi vorrei

$3^{2^\alpha} - 1 \equiv 0 \ (2^\alpha)$ $\qquad 3^{2^\alpha} \overset{\text{speranze}}{\equiv} 1 \ (2^\alpha)$ $\qquad \varphi(2^\alpha) = 2^{\alpha - 1} \mid 2^\alpha$

$\Rightarrow 3^{2^\alpha} \equiv 1 \ (2^\alpha)$ è vero.

$n = 3^{2^\alpha} - 2^{2^\alpha}$ vanno bene, e sono composti perché per

$\alpha > 2$ $\qquad \underset{\underset{5}{\parallel}}{3^2 - 2^2} \mid 3^{2^\alpha} - 2^{2^\alpha}$ e $3^{2^\alpha} - 2^{2^\alpha} > 3^2 - 2^2$.

P - Induzione e Principio dei cassetti.

Titolo nota 02/09/2018

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$P(n)$ = frase che parla di $n \in \mathbb{N}$.

Se

① dimostro $P(0)$ ← passo BASE

② dimostro $P(n+1)$ assumendo $P(n)$ ← passo INDUTTIVO

allora so che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

Es 1: "la somma degli interi da 0 a n fa $\frac{n(n+1)}{2}$".

Per induzione

P.B. $n=0$ la somma degli interi da 0 a $n=0$

$$\frac{0(1)}{2} = 0 = 0 \quad \text{ok}.$$

PI: Suppongo di sapere che $0+1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

E mi accorgo che

$$\underbrace{0+1+\dots+n}_{\text{ipotesi INDUTTIVA}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Oss: Partire da 0 non è indispensabile.

Es2: $n^2 \leq 2^n$ $\cancel{\forall n \in \mathbb{N}}$ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 3$

Per induzione: PB $\boxed{n=0}$ $0 \leq 1$ ok.

(PI) Se so che $n^2 \leq 2^n$, allora

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$

$$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \qquad n^2 \geq 2n+1$$

$$(n^2 - 2n + 1) - 2 \geq 0$$

$$(n-1)^2 - 2 \geq 0$$

$$\boxed{n \geq 3}$$

IL PASSO INDUTTIVO funziona solo per $n \geq 3$

Quindi mi serve un passo BASE ≥ 3, $n=3$ non va bene $(9 \nleq 8)$
$n=4$ va bene $(16 \leq 16)$

$\Rightarrow$ La tesi è dim. per induzione per $n \geq 4$.

Es 3: (disug. di Bernoulli) Sia $x > -1$ un numero reale allora

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Definizioni ricorsive)

$$n! \qquad \begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot ((n-1)!) \end{cases}$$

FATTORIALE

$$F_n \qquad \begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

NUMERI DI FIBONACCI

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,
55, 89, 144, ...

$0 \curvearrowright 1 \curvearrowright 2 \curvearrowright 3 \; \dots \curvearrowright n \curvearrowright n+1$

Principio di induzione estesa

PB ① Se dimostro $P(0)$

PI ② Se, assumendo $P(0), P(1), \dots, P(n)$, dimostro $P(n+1)$

allora $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

Es 4: Ogni numero naturale è somma di numeri di Fibonacci non consecutivi.

Dim: $n=0$ ok

passo induttivo esteso: Se $0, 1, 2, \dots, n$ sono somme di Fibonacci non consecutivi, allora sia F il più grande Fibonacci $\leq n+1$. Per ipotesi, so scrivere $(n+1)-F$ come richiesto.

$\Rightarrow (n+1)-F = F' + F'' + \dots \qquad F' > F'' > \dots$

$(n+1) = F + F' + F'' + \dots$ Se F e F' fossero consecutivi, allora $F+F' \leq n+1$ ed è un fibonacci $\Rightarrow F+F' = F$

$\Rightarrow F' = 0 \Rightarrow n+1 = F$ e ho comunque finito. $\square$

Es 5: $F_n \geq n^2$ per quali valori di n è vero?

Facciamo prima il passo induttivo (induz. estesa)

Se $F_{n-1} \geq (n-1)^2$ e $F_{n-2} \geq (n-2)^2$ allora

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geq (n-1)^2 + (n-2)^2 \overset{?}{\geq} n^2$$

OK se $n \geq 5$

$\Rightarrow$ il PI funziona per $n \geq 5$

$$\cancel{2}n^2 - 6n + 5 \geq \cancel{n^2}$$

$$(n-1)(n-5) \geq 0$$

$n=1$
$n=0$

$\boxed{n \geq 5}$

Il passo base mi serve da 3 in poi.

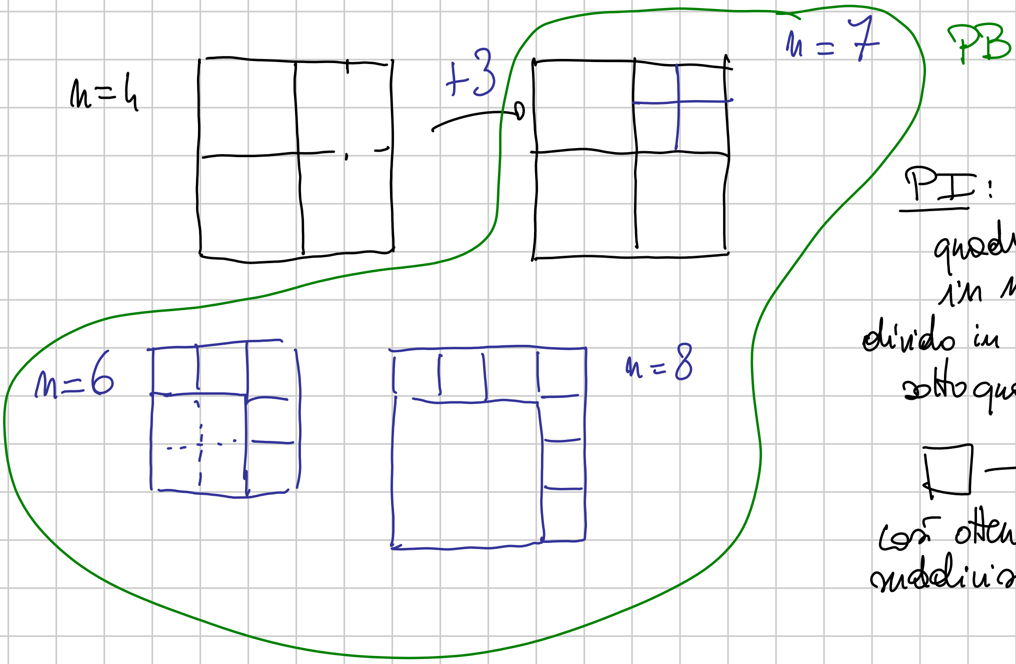
n	F_n	n^2
0	0	0
1	1	1
2	1	4
3	2	9
4	3	16
5	5	25
6	8	36
7	13	49

n	F_n	n^2
8	21	64
9	34	81
10	55	100
11	89	121
12	144	144 ✓
13	233	169 ✓

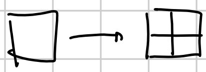
OCCHIO: Solo 12 come PB non basta!!

$\Rightarrow$ $F_n \geq n^2$ è vero per $n = 0, 1$ e per $n \geq 12$.

Es 6: Dato $n \geq 6$ è sempre possibile dividere un quadrato in n sottoquadrati.



PI: Dato un quadrato suddiviso in n sottoquadrati divido in 4 uno dei sottoquadrati



così ottengo una suddivisione in $n+3$.

Principio dei cassetti (pigeonhole)

Dati $n+1$ oggetti da sistemare in n cassetti, ne esistono almeno due che finiscono nello stesso cassetto.

Dati $kn+1$ oggetti e n cassetti, almeno $k+1$ oggetti finiscono nello stesso cassetto.

Es 7: Due di voi (77) hanno il compleanno la stessa settimana

Es 8: Date n persone ce ne sono 2 con lo stesso numero di conoscenti tra le n.

dim: I possibili numeri di conoscenti sono
$$\underbrace{0, 1, 2, \dots, n-1}_{n \text{ cassetti}}$$

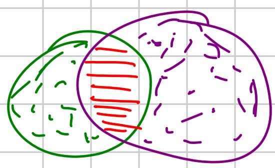
Però i casi 0 e $n-1$ non si verificano contemporaneamente

(se qualcuno non conosce nessuno, nessuno conosce tutti)

$\Rightarrow$ ho $n-1$ cassetti e n persone. Per il princ. dei cassetti, ho finito.

Es 8: Dati 10 numeri di due cifre, posso trovare due sottoinsiemi di loro disgiunti e non vuoti con la stessa somma.

dim: Posso anche eliminare l'ipotesi disgiunti

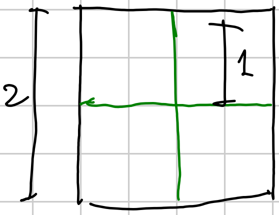


n° sottoins. non vuoti $2^{10}-1=1023$

Quanto può valere al max la somma? Al max 1000.

$\Rightarrow$ Se divido i sottoins. non vuoti in base alla somma, per i cassetti, ne ho due con la stessa somma.

<u>Es 9</u>: Dati 5 punti in un quadrato di lato 2, ce ne sono almeno 2 a dist. $\leq \sqrt{2}$.



I cassetti sono i 4 quadratini

$\Rightarrow \exists$ 1 cassetto con 2 punti all'interno

$\Rightarrow$ ho finito.

<u>Es 10</u>: (Compressione lossless)

Se un algoritmo di compressione è lossless, allora esiste almeno un file che viene ingrandito dall'algoritmo.

<u>dim</u>: Per assurdo, supponiamo che il file compresso sia sempre lungo al più quanto il file originale.

Sia F il più piccolo file che viene davvero ridotto.

e supponiamo che dopo la compressione sia lungo N bit.

Ci sono 2^N file lunghi N bit e tutti loro, dopo la compressione, sono ancora lunghi N bit.

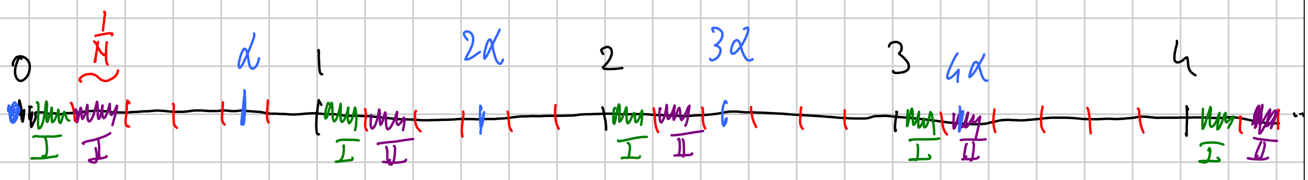
Prendo le compressioni dei file di lunghezza N e la compressione di F questi sono 2^N+1 tutti di lunghezza N, ma ci sono solo 2^N file di lunghezza N $\Rightarrow$ ne ho due uguali. Assurdo.

<u>Es 11</u>: (Teo di DIRICHLET sulle approssimazioni razionali)

Sia $\alpha > 0$ un numero <u>IRRAZIONALE</u>, sia $N>0$ un intero. Allora esistono $p, q \in \mathbb{N}$ con $0 < q \leq N$ tali che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2}$$

dim: Considero i numeri $0, \underbrace{\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, N\alpha}_{\text{irrazionali}}$



Il cassetto i-esimo è dato da tutti gli intervalli del tipo

$i = 1, \dots, N$ $\qquad\left[k+\frac{i-1}{N}, k+\frac{i}{N}\right] \quad k \in \mathbb{N}$

Ho N cassetti e N+1 multipli di α $\Rightarrow$ ce ne sono due nello stesso cassetto

Diciamo che siano $m\alpha$ e $\bar{m}\alpha$ $\quad (m > \bar{m})$

$$m\alpha = k + \frac{i-1}{N} + \varepsilon \qquad 0 \le \varepsilon < \frac{1}{N}$$

$$\bar{m}\alpha = \bar{k} + \frac{i-1}{N} + \bar{\varepsilon} \qquad 0 \le \bar{\varepsilon} < \frac{1}{N}$$

$$(m-\bar{m})\alpha = k - \bar{k} + \varepsilon - \bar{\varepsilon}$$

$m - \bar{m} = q \qquad q\alpha - p = \varepsilon - \bar{\varepsilon}$

$k - \bar{k} = p \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{q}\right| \le \frac{1}{Nq} \le \frac{1}{q^2}$