Combinatoria 1 Basic [Tess]

Titolo nota 03/09/2018

i) Conteggi

ii) Double-Counting

CONTEGGI

Regola della somma

$$X = A \sqcup B$$

unione $\boxed{\text{disgiunta}}$

$$|X| = |A| + |B|$$

Regola del prodotto

se $X = A \times B$ indipendenza

$$|X| = |A| \cdot |B|$$

Esempi

1) A, B insiemi (finiti) $A = \{a_1, \dots, a_n\}$

$n = |A|$

$$|\{f : A \to B\}| = *$$

posso scegliere a_1 in $|B|$ modi diversi

indip. a_2 " "

indip. a_3 " "

$* = |B|^n = |B|^{|A|}$

2) Funzioni iniettive $= *$

similmente a prima scelgo prima a_1, poi a_2, ...

questa volta ho

$$* = |B| \cdot (|B|-1) \cdot (|B|-2) \cdot \ldots \cdot (|B|-|A|+1).$$

3) Funzioni suriettive

per la regola della somma:

$$|\{f \text{ suriettive}\}| + |\{f \text{ non suriettive}\}| = |\{f\}|$$

$F_m = \{ f :$ l'immagine manca almeno m elementi $\}$

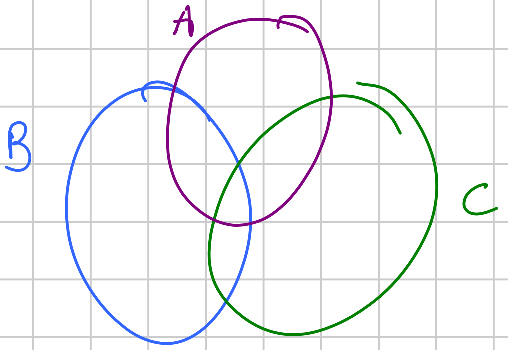
mi piacerebbe che fosse

$$|F_1| \neq \underbrace{|B|}_{\text{l'elemento da escludere}} \cdot \underbrace{(|B|-1)^{|A|}}_{\text{le funzioni senza un elem. in } B} = g_1$$

$$g_m = \binom{|B|}{m} \cdot (|B|-m)^{|A|}$$

$$|F_1| = g_1 - g_2 + g_3 - g_4 \ldots + (-1)^{|B|-1} \underbrace{g_{|B|}}_{=0}.$$

Principio di inclusione-esclusione



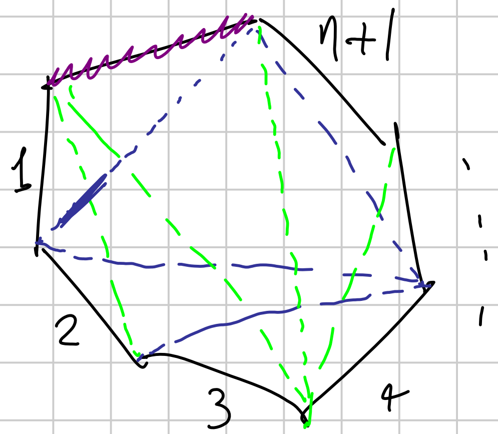
$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|$$
$$- |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A|$$
$$+ |A \cap B \cap C| .$$

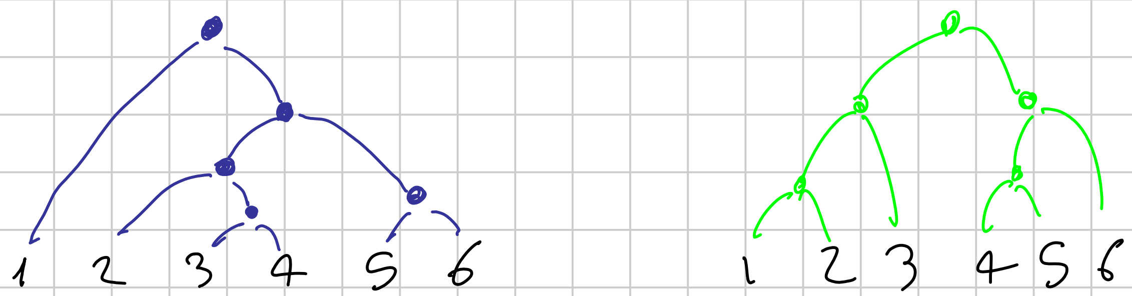
Regola della Bigezione

$f: A \longrightarrow B$ bigezione

allora $|A| = |B|$

4) poligono convesso $n+2$ lati;





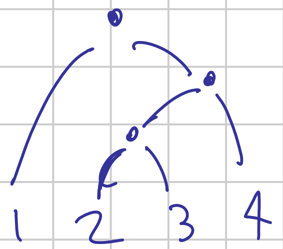
ho descritto una funzione dall'insieme delle triangolaz. all'insieme degli alberi con radice gerarchici e $n+1$ foglie e binari (ogni nodo $\neq$ foglia ha 2 figli).

per casa: costruire l'inversa

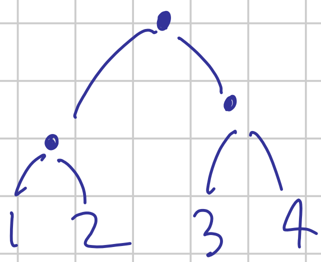
5) calcolare il numero di questi alberi

voglio associare n coppie di parentesi a ciascun albero

mappa



l'inversa



(il fratello) i parenti

(( ) ( ))

1 2 2 4 1

( ) (( ))

1 1 12 34 34 12

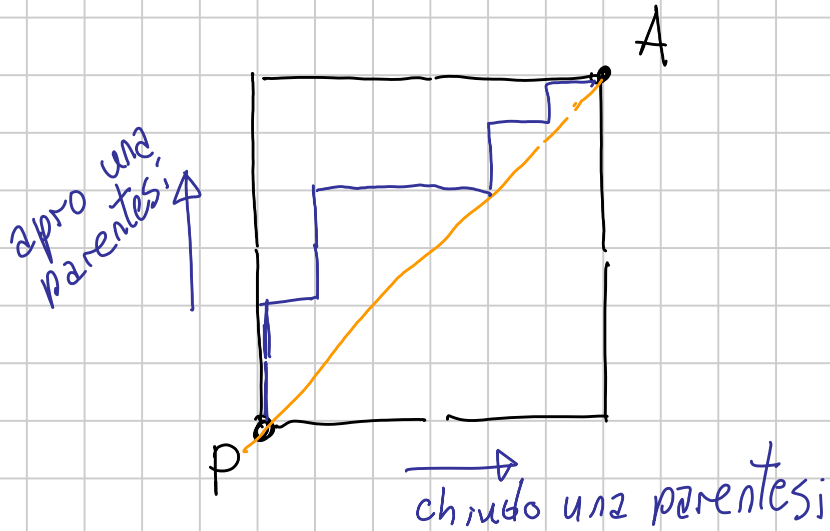
per casa: definire per bene le 2 mappe

6) Calcolare il numero di scritture di n coppie parentesi

(( ) (( ))) ( ) ( )

0 1 2 1 2 3 2 1 0 1 0 1 0

Q = numero di aperte − numero di chiuse ≥ 0



percorsi monotoni su griglia $n \times n$ lati che siano sopra la diagonale

Ricorsione

7) Calcolare il numero di partizioni di un insieme con n elem. su k sottoinsiemi

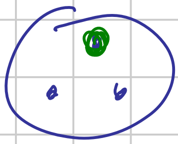
$\left\{ n \atop k \right\}$ "

Oss. $k = 1 \qquad \left\{ n \atop 1 \right\} = 1$

$k = n \qquad \left\{ n \atop n \right\} = 1$

$$\left\{ 3 \atop 2 \right\} = \left\{ 2 \atop 1 \right\} + 2 \left\{ 2 \atop 2 \right\}$$

se sta da solo — se lo aggiungo ad un altro sottoinsieme



$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\}$$

D - C

Il principio è il seguente:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix}$$

Voglio sommare gli a_{ij}

$$\sum_i \left(\sum_j a_{ij} \right) = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \right)$$

Gauss a 9 anni ...

$$1 + 2 + \ldots + 100$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots & 100 \\ 100 & 99 & 98 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$2\left(\sum_{i=1}^{100} i \right) = 100 \cdot (101)$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$$

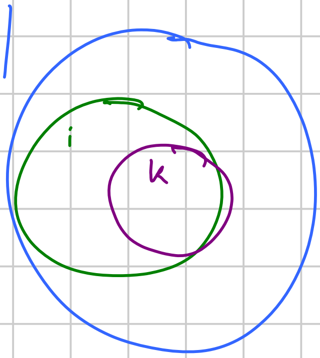
$Q = \{$ il numero di sottoinsiemi di uno con n elem. $\}$

$Q = 2^n$ per bigezione + funzioni

$Q = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ calcolo il numero di sottoinsiemi sommando prima quelli della stessa cardinalità

$$\sum_{i=k}^{n} \boxed{\binom{n}{i}} \boxed{\binom{i}{k}} = \binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

$n = |U|$



Scelgo prima k elementi, poi i sottoinsiemi dei riman.

$$\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$$

APMO 18 . 1

Una config. di quadrati nel piano è bella quando

- tutti i quadrati sono congruenti
- 2 quadrati si possono toccare solo ai vertici
- ogni quadrato tocca 3 quadrati

Dire per quali $2018 \leq n \leq 3018$, $\exists$ una conf. bella con n quadrati.

Sol.

La risposta è: solo per n pari

Usiamo un D-C per mostrare che n dispari non si fa.

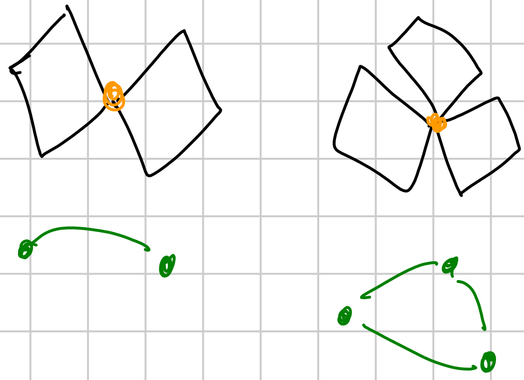
Contiamo

$$Q = \{ (\square, v) : v \in \square \text{ e } v \text{ è in comune con almeno un altro } \square \}$$

$\square$ = quadrato, v = vertice

Contiamo raggruppando prima i $\square$:

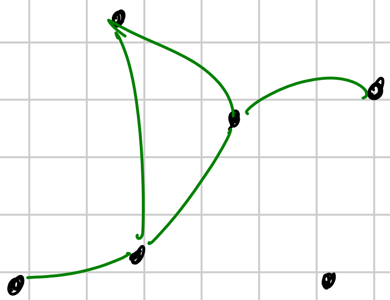
$$Q = 3 \cdot \text{numero di } \square = 3n$$



Pausa grafi

(V, E)

V vertici



$E \subseteq V^2$

$\deg(v) = |\{\text{archi uscenti da } v\}|$

Esempio classico di D-C :

$$Q = |\{(v, \text{arco uscente})\}|$$

$$\sum_{v} \deg(v) = Q = 2 \cdot |E|$$

Fine pausa astratta

Costruiamo un grafo dove i nodi sono i $\square$ e gli archi sono le adiacenze di $\square$

qui ottiamo la tesi applicando il D-C classico

Alternativamente, si poteva scegliere

$Q' = \{ (\square, \square) : \text{sono adiacenti} \}$.

C1.10

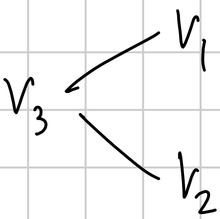
Ad un party prendono parte ...

C'è un grafo su $12k$ vertici

$$\deg(v) = 3k+6$$

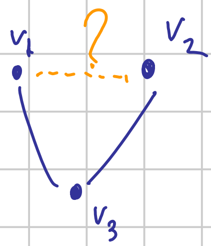
$\forall$ v_1, v_2 vertici, $\exists$ esattamente N

v_3 t.c.



Tesi: trovare i k che funzionano ...

Sol: facciamo la parte negativa

$Q = \Big| \{ (\{v_1, v_2\}, v_3) :$  $\} \Big|$

$$\binom{12k}{2} \cdot N = Q = 12k \cdot \binom{3k+6}{2}$$

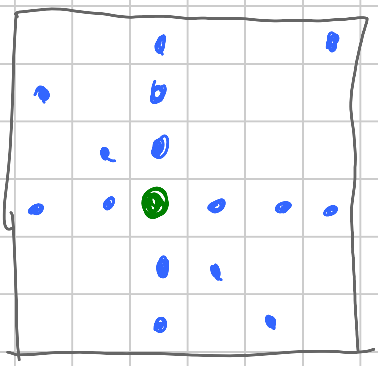
$$N = \binom{3k+6}{2} \cdot \frac{2}{(12k-1)}$$

Deve essere N intero, quindi:

$$\frac{(3k+6)(3k+5)}{12k-1} \in \mathbb{Z}$$

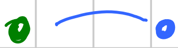
.... .. k può essere soltanto 3.

Un esempio che funziona è il seguente



sono i vertici

e le adiacenze sono queste:



Esercizi conteggi

104 – 107, 111 p. 20

Es: costruire una mappa

$$\{\text{funzioni suriettive da } n \text{ a } k\} \longrightarrow \{\text{partizioni di } n \text{ in } k\}$$

e dedurre una formula per calcolare $\left\{ {n \atop k} \right\}$

Es: EGMO18.3) N nani in fila, $N_1, N_2, \dots, N_N$ sono inizialmente disposti in un qualche ordine. Ad ogni mossa, un nano N_j può superare j nani davanti a lui. Calcolare il massimo numero di mosse.

Fare solo la seguente: contare il massimo numero di salti di $N_N, N_{N-1}, N_{N-2}, \dots$

Esercizi D-C · 119 – 121, 124 p. 21

EGMO18.4) Si mettono dei domino ▭▭ in una griglia $n \times n$ $(n \geq 3)$ tali che $\exists\, k \in \mathbb{N}$ t.c. ogni riga e ogni colonna prende k domini. Determinare il minimo numero di domini in tale configurazione.

Fare solo la parte negativa: dimostrare che $|\text{domini}| \geq \frac{2}{3}n$ o $|\text{domini}| \geq 2n$

a seconda $3 \mid n$ $\quad 3 \nmid n$

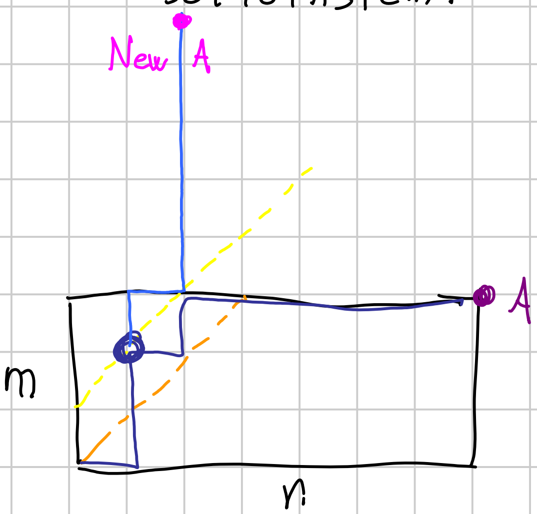
Correzione

111) $n = a_1 + \dots + a_k$

n palline $\quad k-1$ stanghette le dividono in k

sottoinsiemi: $\binom{n+k-1}{k-1}$

107)



i percorsi che non superano =

tutti i percorsi − quelli che la superano

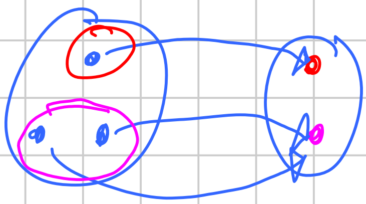
$$\binom{m+n}{n} \qquad\qquad = \binom{m+n}{m-1}$$

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

per casa

La mappa $\{\text{surrettive}\} \longrightarrow \{\text{partizioni}\}$

$$f : \underset{n}{A} \longrightarrow \underset{k}{B}$$



ci sono $k!$ funzioni (una per ogni ordinamento degli elem. di B) che forniscono la stessa partizione

$$|\{f \text{ surrettive}\}| = k! \left\{ {n \atop k} \right\}$$

EGMO 18.3

Sia S_j il numero di salti di N_{N-j}.

Calcolare i massimi S_j possibili.

$S_0 = 0$

$S_1 \leq 1$

Oss: il nano N_j salta almeno un tizio N_i con $i \geq j$.

$$S_k \leq 1 + S_{k-1} + S_{k-2} + \dots + S_1$$

$$j \quad i \longrightarrow i \quad j$$

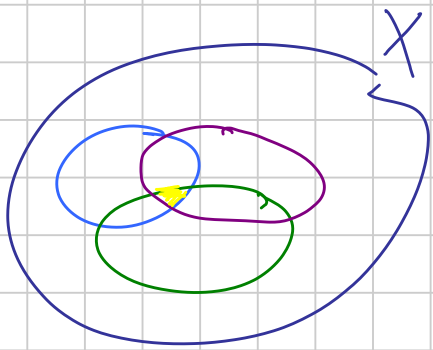
prima che capiti nuovamente questa situazione anche i deve saltare

$$\Rightarrow S_k \leq 2^k - 1$$

Es 119

$$\sum_{(A,B,C) \in Y^3} |A \cap B \cap C|$$

$Y = P(X)$



$\parallel$ D-C ⊛

$$\sum_{x \in X} \underbrace{\text{numero di volte che compare } x \text{ in } A \cap B \cap C}_{=}$$

tolto x, mi rimane $A \setminus \{x\}$, $B \setminus \{x\}$, $C \setminus \{x\}$

ho $\left(2^{n-1}\right)^3$ $\qquad n = |X|$

$$= n \cdot 8^{n-1}$$

(*) $Q = \left| \{ ((A,B,C), x) : x \in A \cap B \cap C \} \right|$

121) $\displaystyle\sum_{k \text{ pari}} \binom{n}{k} = \sum_{k \text{ dispari}} \binom{n}{k} \qquad n \geq 1$

sott. card pari $\longleftrightarrow$ sott. card. dispari

Scelgo $x_0 \in X \quad |X| = n$

faccio prima questa bigezione:

$$\{ A \subseteq X : x_0 \in A \} \longleftrightarrow \{ B \subseteq X : x_0 \notin B \}$$

$$B \cup \{x_0\} \longleftarrow B$$

124) 72 stagisti risolvono ciascuno almeno uno dei problemi di una gara.

Tesi: dim. che $\exists$ almeno un sottoinsieme $\neq \emptyset$ di problemi per i quali il numero di stagisti che li hanno risolti tutti è pari.

$Q = \left| \{ (A, s) : \right.$ s è uno stagista che ha risolto tutti i problemi in $A \subseteq \{$problemi della gara$\}$ $\left. \} \right|$

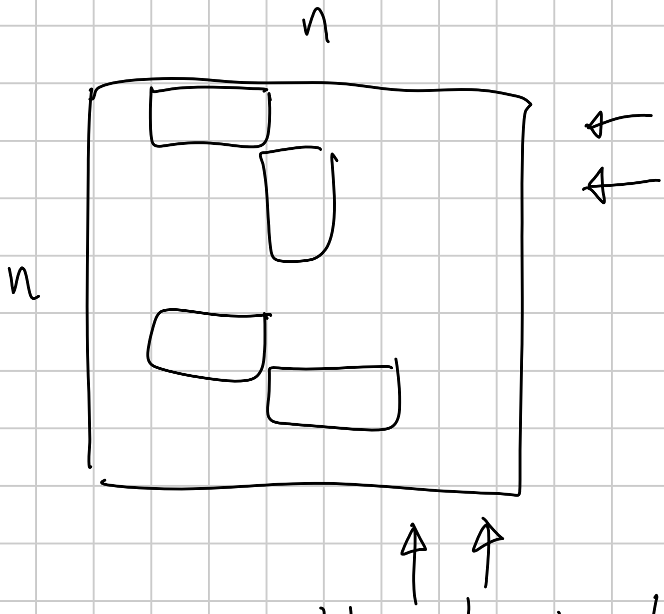
Contiamo raccogliendo A

$$\sum_{A \subseteq P} \text{numero di stagisti che risolvono } A = Q = \sum_{s} \left(2^{|\{\text{problemi risolti da } s\}|} - 1 \right)$$

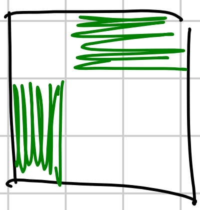
$2^{|P|} - 1$

vorrei $Q \equiv 0 \ (2)$

EGMO 18.4



esattamente k domini per riga e per colonna



$$Q = \left| \left\{ \left(r/c, \square \right) \text{ t.c. } r \cap \square \neq \emptyset \right\} \right|$$

$$2nk = \sum_{r} k + \sum_{c} k = Q$$

$$Q = \sum_{\text{domini}} 3 = 3 \, |\text{domini}|$$

$$|\text{domini}| = \frac{2}{3} n k$$

se $3 \mid n$ $\quad |\text{domini}| = 2 \cdot \frac{n}{3} \cdot k \geq 2 \cdot \frac{n}{3}$

se $3 \nmid n \Rightarrow 3 \mid k \Rightarrow k \geq 3$

$$|\text{domini}| \geq 2 \cdot n \,.$$