Combinatoria 2 Basic [Tess]

Titolo nota 07/09/2018

Non Esistenza	Esistenza: Non costruttiva	Esistenza: Costruttiva
D-C	Pigeonhole	Contruzioni induttive
Invarianti	Principio dell'estremale	Dare l'esempio
Colorazioni		Algoritmi costruttivi

Invarianti

Es 1) Sulla lavagna sono scritti i numeri $1, \dots, n$ il sistema che varia

mossa: cancello a e b, al loro posto scrivo $|a-b|$

~~Dimostrare~~ determinare per quali n che, se non posso più muovere, sulla lavagna c'è un singolo numero dispari. condizione finale

Oss: , la tecnica generale: se c'è un sistema che varia, cerco invarianti I

L'applicazione è: controllo I allo stato iniziale e allo stato finale. Se i due valori ottenuti sono diversi allora non posso arrivare allo stato finale.

Sol: $I := \sum$ numeri scritti $\pmod 2$

verifico l'invarianza:

ci sono $a_1, \dots, a_k$, poi faccio la mossa su wlog a_1, a_2, allora ottengo $|a_1 - a_2|, a_3, \dots, a_k$

prima ho $\sum_{i=1}^{k} a_i \pmod 2$ dopo ho $\sum_{i=3}^{k} a_i + |a_1 - a_2|$

quindi la differenza è $a_1 + a_2 - |a_1 - a_2| \pmod 2$

$\equiv 0 \pmod 2$

All'inizio $I = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

alla fine $I = a_{finale}$

La risposta è: sicuramente deve essere $\frac{n(n+1)}{2}$ dispari

per il viceversa è ovvio che riesco ad ottenere un singolo numero e la parità finale è determinata.

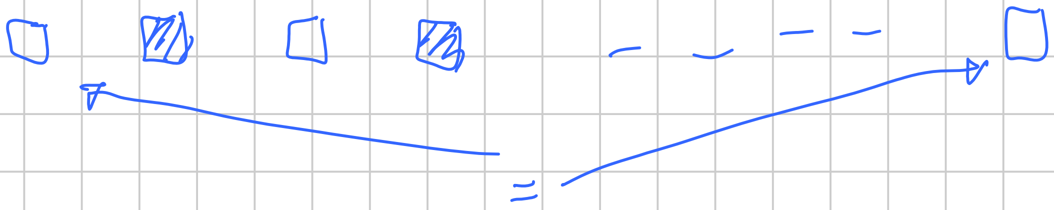
Regola generale: se ci sono "mosse" che modificano uno stato, cerco quantità invarianti.

Es 2) Un cavallo degli scacchi si muove su una scacchiera 47×47. È possibile visitare tutte le caselle 1 sola volta tornando al punto di partenza?

Sol: lo stato è la casella dove c'è il cavallo

ogni volta che faccio 2 mosse, il colore della casella non cambia
(se faccio una sola mossa, il colore cambia)

Quindi la successione delle caselle visitate



visito un numero pari di caselle. $(47 \times 47 \not\equiv 0 \ (2))$.

Es 3) Sulla lavagna ci sono $8, 10, 15$

posso toglierne 2 e scrivere $\frac{3a-4b}{5}, \frac{4a+3b}{5}$.

Posso avere alla fine $12, 13, 14$?

Posso ottenere numeri x, y, z t.c. $\begin{matrix} |x-12| \\ |y-13| \\ |z-14| \end{matrix} < 1$?

Sol: l'invariante è $a^2+b^2+c^2$.

(in particolare le risposte sono no)

Es 4) Ci sono 2018 carte disposte sul tavolo

ciascuna ha 2 facce, quella bianca e quella nera

posso scegliere una carta bianca e capovolgere le 50

carte da questa scelta verso destra (se ce ne sono 50).

Dimostrare che sono possibili solo finite mosse.

Regola generale: se trovo una quantità M che può solo crescere, ma ho finiti stati, allora posso fare solo finite mosse.

M := il numero binario che ha nella cifra i-esima
$$\begin{cases} 1 & \text{se la carta } i\text{-esima è nera} \\ 0 & \text{" " bianca} \end{cases}$$

È chiaro che M è crescente:

perché M(stato dopo la mossa) $-$ M(stato prima della mossa)

$$= 1\underbrace{*\,*\,*\ \ldots\ *}_{49 \text{ cifre che non so}}0000 - 0**\ast\ldots*0000 > 0$$

i-esima cifra

EGMO18.3 (a) - domanda intermedia -
dimostrare che i salti effettuabili sono finiti.

Sol: il nano j-esimo salta un nano i-esimo con $i>j$

M = un numero in base $n+1$

alla cifra i-esima scrivo la posizione del nano i-esimo

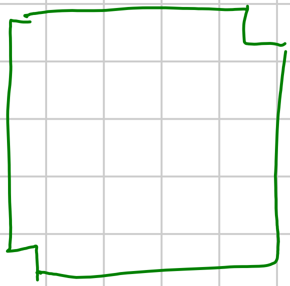
3
2
1 ← l'ultimo

1, 2, 3,

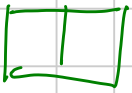
posizione di 1

Colorazioni

Es 5) Voglio tassellare



8 x 8

con 

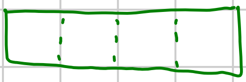
È possibile?

Sol: la risposta è no

posso colorare a scacchiera

- ogni domino copre una bianca e una nera
- la scacchiera conta 32 bianche e 30 nere.

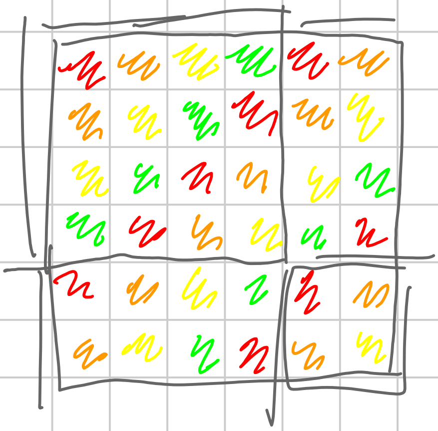
Es 6) Quali sono i rettangoli $n \times m$ che posso tassellare

con  (4×1) ?

Sol: $4 \mid n$ ó $4 \mid m$ si riesce a fare (una striscia alla volta)

Contando i □ ottengo $4 \mid n \cdot m$

Devo ancora escludere $2 \| n$, $2 \| m$

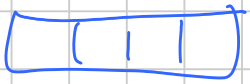


$= \frac{n \cdot m}{4}$

$= \frac{n \cdot m}{4} + 1$

$= \frac{n \cdot m}{4}$

$= \frac{n \cdot m}{4} - 1$

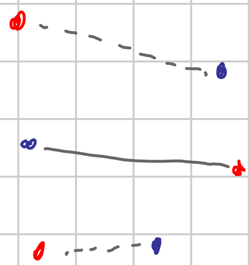
Ogni  prende un colore per tipo

Principio dell'estremale.

Tecnica generale: il problema vi chiede un oggetto con la proprietà P. Allora mi invento una quantità Q e scelgo l'oggetto m t.c. m è massimale rispetto Q

Dimostro che m ha la proprietà P: per assurdo se non ce l'ha riesco a costruire m' cambiandolo un po' m, tale che $Q(m') > Q(m)$

Es 7)



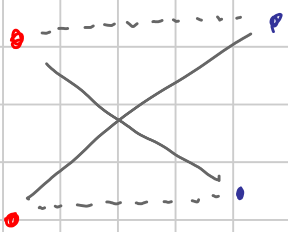
Voglio match tra • e • t.c. non ci sono intersezioni tra i segmenti

Dimostrare che è sempre possibile.

(a 3 a 3 non allineati)

Sol: fra tutti i match, considero (uno di) quelli con somma delle lunghezze minimale.

Per assurdo



costruisco un nuovo matching tutto uguale tranne questi 2 collegamenti, metto, invece, quelli ------
La lunghezza totale è scesa!

Giochi

Tecnica generale: ci sono Alberto e Barbara. Uno dei 2 vince ...

Dato un gioco finito (ogni successione di mosse termina) in cui ad ogni stato finale è associato un vincitore

È vero per induzione: costruisco l'albero di tutte le configuraz. ad ogni nodo associamo il giocatore che partendo da quella " ha una strategia vincente. L'induzione è sulla distanza dai vertici finali.

P.B. Coloro gli stati finali

P.I. dato un nodo n, guardo tutte le conf. ragging. con 1 mossa

per ipotesi induttiva, per ciascuna so dire quale giocatore vince

Se ne esiste una in cui il giocatore di turno perde, allora scelgo quella mossa e n è un nodo per cui il gioc. di turno vince.

Altrimenti, sono spacciato e n è un nodo perdente.

Riassunto: Se riesco a dividere l'insieme delle config.

in 2: quelle vincenti per il giocatore di turno W

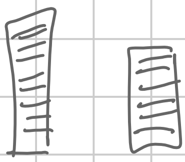
e quelle perdenti " " L

tali che $\forall\, n \in W$ $\exists$ mossa che manda n in L

$\forall\, n \in L$ $\forall$ mossa, n viene mandato in W

Ho risolto il gioco e so dire chi vince con la conf. iniziale a seconda che questa sia in W o in L.

BMO18. 3 A e B giocano al seguente:

2 pile , ad ogni mossa, il giocatore di turno sceglie una pila con numero pari, la divide a metà e pone una delle metà sopra l'altra pila.

Perde chi non può più muovere. Determinare le conf. iniz. tali che B ha una strategia vincente.

Oss: il gioco non è finito:  sono possibili un numero arbitrario di mosse.

IMO 18 . 4 A e B pongono pedine su una scacchiera 1000x1000.

A può mettere solo dei cavalli (in modo che non si mangino a vicenda), B può mettere solo delle pedine.

(al + un pezzo per casella)

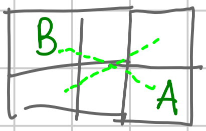
Quanti cavalli è sicuro di mettere A al massimo?

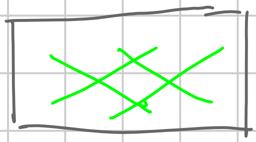
Sol

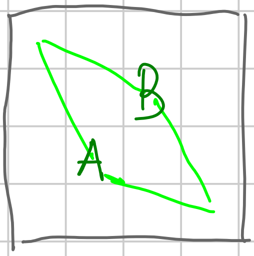
Oss: i cavalli sulle caselle nere non si attaccano, non ho vincoli

A è sicuro di riuscire a mettere $\frac{1000 \times 1000}{4}$ cavalli.

Euristica: lavoro su scacchiere piccole

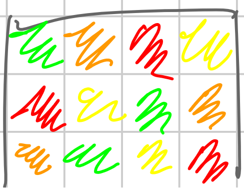






B gioca in contrapposizione ad A e quindi A non può mettere + di un cavallo su queste 4 caselle.

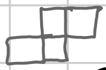
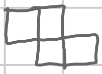
Continuo la soluzione: spezzetto la scacchiera in 4x4 e in ciascun 4x4 lo divido in 4 cicli:



A non è sicuro di mettere più di un cavallo su ciascun cicletto.

Esercizi

Invarianti 131, 133, 134, 135 p. 22

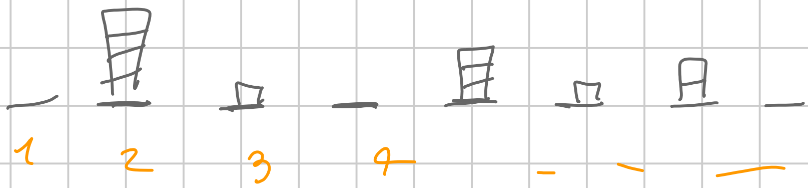
Colorazioni Quanti  o  posso mettere in 8×9 senza sovrapposizioni?
15 p. 34

Estremale 5, 16 p. 33-34

Giochi BMO18.3

Correzione

131



Consideriamo il sistema con le pile in fila

$$I = \sum_{\square} \text{n° di pila della moneta } \square$$

$$= \sum i \cdot \text{n° di monete sopra } i$$

Quando faccio una mossa

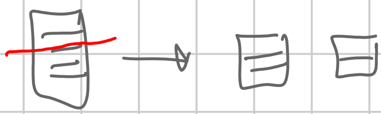
sopra i tolgo
sopra $i-1$ aggiungo

sopra j tolgo
$j+1$ aggiungo

$$I_{dopo} - I_{prima} = (i-1+j+1) - (i+j) = 0$$

Nel problema 131, I è invariante modulo n.

133 2 mosse

- tolgo una moneta 
- divido una pila 

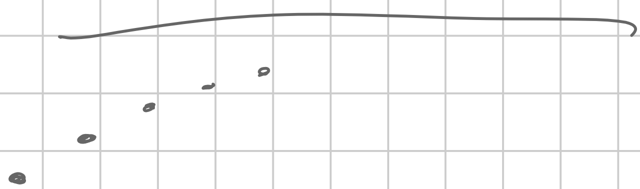
Sol: Cerco M che cala o cresce $\boxed{\text{strettamente}}$ * ad ogni mossa

$$M := \#\text{monete} - \#\text{pile}$$

o

$$M := \sum_{p \in pile} m_p^2$$

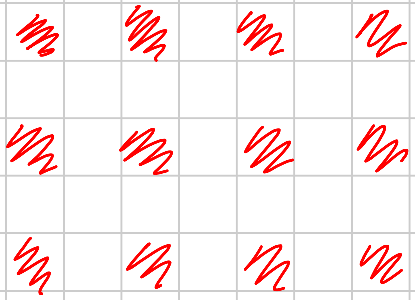
* M deve essere discreta (o cambiare almeno di ε fissato a priori)



134 I = parità delle bianche

135 I = parità delle lampadine accese e sul pentagono interno

Tassellazione con 



Tutte prendono esattamente un 

Per determinare il massimo, per ora abbiamo $\max \leq 16$

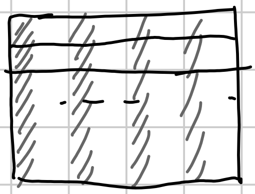
Per mostrare $\max \geq 16$, fate un esempio (per casa).

15 

Oss: Serve che l'area $m \times n$ è mul di 4.

Oss:  si fa 2×4 $\Rightarrow$ si fa $2h \times 4k$

Se $mn \equiv 4 \ (8)$ non si riesce per la seguente



ogni L prende 3 ■ e 1 □

oppure 3 □ e 1 ■

Ora ■ − □ = 0, però ogni L aggiunge 6 toglie 2

a

Se # di L fosse dispari $\blacksquare - \square \equiv 2 \ (4)$

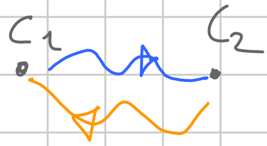
Ora sappiamo che $8 \mid mn$

riusciamo a fare $4 \mid m, \ 2 \mid n$

Oss: $1 \times n$ non si fanno

Oss: 3×8 si fa!

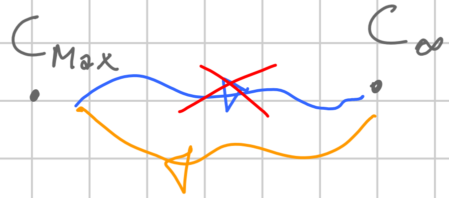
5 Per ogni coppia di città



$\exists$ una tra

Sol: scelgo la città dalla quale raggiungo il maggior numero di città

Per assurdo non esiste la strada



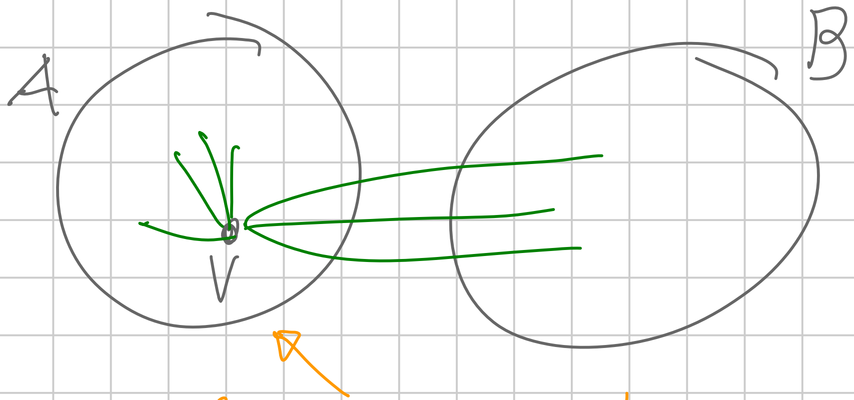
allora da C_∞ riesco a raggiungere C_∞ e tutte quelle di C_{Max}, assurdo per massimalità.

16 Un grafo G ha almeno un arco. Dimostrare che si riesce a dividere in 2 parti $A \cup B$ in modo che gli archi fra A e B siano di più di

quelli dentro A e dentro B.

Sol: considero la suddivisione che ha il maggior numero di archi fra A e B

Allora vale la seguente: $\forall$ v, i vicini sull'altro sottoinsieme sono almeno tanti quanti quelli del sottoinsieme dove sta v.



se fosse così, sposto V e violo la massimalità

Per ogni $v \in A$ abbiamo $\deg_A v \leq \deg_B v$

e similmente per $v \in B$

allora sommo tutte queste disug.

Provate a capire se la disug. globale può essere stretta.