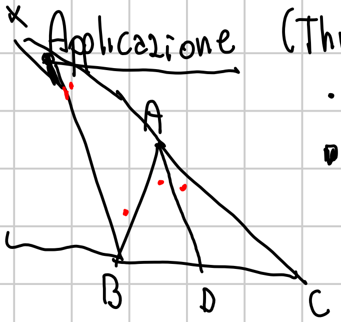
G3 basic - GioacchinoA

Titolo nota 06/09/2018

Thm (Talete)

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

Applicazione (Thm bisettrice)



- AD bisettrice $\Rightarrow \dfrac{AB}{BD} = \dfrac{AC}{\cancel{B}D}$
- Dim: Traccio da B la parallela ad AD che lo incontra in X. Allora $X\hat{A}B$ è isoscele poiché per parallelismo

$$\begin{cases} B\hat{A}D = A\hat{B}X \\ D\hat{A}C = B\hat{X}A \end{cases}$$

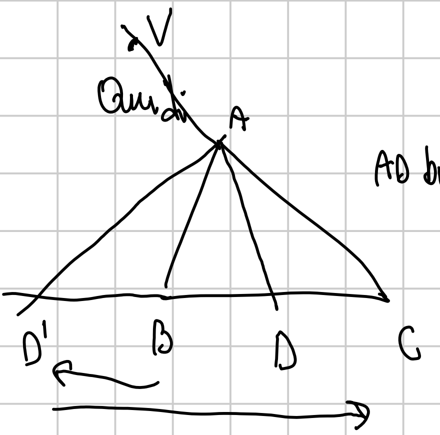
e $B\hat{A}D = D\hat{A}C$ per hp. Quindi $AX = AB$.

per talete $\dfrac{AX}{AC} = \dfrac{BD}{DC}$, con $\dfrac{AX}{AC} = \dfrac{AB}{AC}$ ■

Segmenti con segno

AB positivo
BA negativo

Quindi



AD bis. $\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC}$ (I)

AD' bis. esterna $\Rightarrow \dfrac{BD'}{D'C} = -\dfrac{AB}{AC}$ (II) (Esercizio 1)

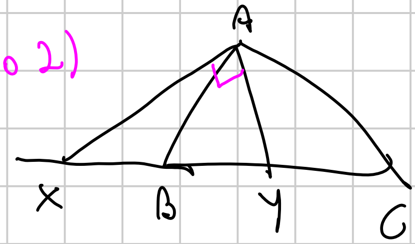
Quindi (I)+(II) $\Rightarrow \dfrac{BD}{DC} \cdot \dfrac{CD'}{D'B} = -1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ ||

Def. X, Y, Z, W allineati $(X, Y; Z, W) = \dfrac{XZ}{ZY} \cdot \dfrac{YW}{WX}$ $\qquad (B, C; D, D')$

Oss. $D'\hat{A}D = \frac{\pi}{2}$. Infatti: $D'\hat{A}D = D'\hat{A}B + B\hat{A}D = \dfrac{V\hat{A}B}{2} + \dfrac{B\hat{A}C}{2} = \dfrac{V\hat{A}B + B\hat{A}C}{2} = \dfrac{\pi}{2}$ ■

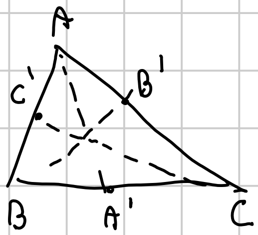
Prop. (Esercizio 2)



- ABC triangolo
- $X\hat{A}Y = 90°$
- $(B, C; Y, X) = -1$

■ Allora AY, AX bis. int/est.

Thm Ceva

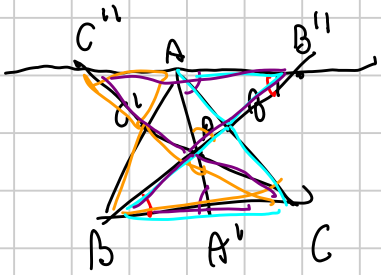


AA', BB', CC' concorrono

$\Updownarrow$

$$\frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} \cdot \frac{AC'}{C'B} = 1$$

Dim $\Rightarrow$) la fremo $\Leftarrow$) Esercizio 3 (per assurdo)



Tracciamo da A la parallela a BC che incontra CC' in C'', BB' in B''.

$B\hat{A'}P \sim B''\hat{A}P \Rightarrow \frac{BA'}{AB''} = \frac{PA'}{PA} = \frac{CA'}{AC''} \Rightarrow \frac{BA'}{A'C} = \frac{B''A}{AC''}$ (I)

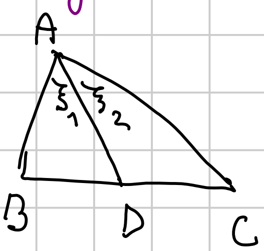
$C\hat{A'}P \sim C''\hat{A}P$

$B\hat{C'}C \sim A\hat{C'}C'' \Rightarrow \frac{AC'}{C'B} = \frac{AC''}{BC}$ (II)

$C\hat{B'}B \sim A\hat{B'}B'' \Rightarrow \frac{CB'}{B'A} = \frac{BC}{B''A}$ (III)

$(I)\cdot(II)\cdot(III) = \frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{CB'}{B'A} = \frac{\cancel{B''A}}{\cancel{AC''}}\cdot\frac{\cancel{AC''}}{\cancel{BC}}\cdot\frac{\cancel{BC}}{\cancel{B''A}} = 1.$

Lemma (gen. thm bis) $\frac{BD}{DC} = \frac{\sin\xi_1}{\sin\xi_2}\cdot\frac{AB}{AC}$ (*)



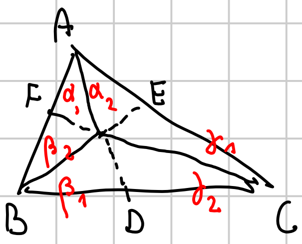
Dim. Th. dei seni su $A\hat{B}D \Rightarrow \frac{BD}{\sin\xi_1} = \frac{AB}{\sin A\hat{D}B}$ (I)

" $A\hat{C}D \Rightarrow \frac{DC}{\sin\xi_2} = \frac{AC}{\sin A\hat{D}C}$ (II)

Ma $\sin A\hat{D}B = \sin A\hat{D}C$ poiché $A\hat{D}B + A\hat{D}C = \pi$.

Quindi $(I)/(II) = \frac{BD/\sin\xi_1}{DC/\sin\xi_2} = \frac{AB/\cancel{\sin A\hat{D}B}}{AC/\cancel{\sin A\hat{D}C}} \Rightarrow$ (*) ■

Thm (Ceva trig.)



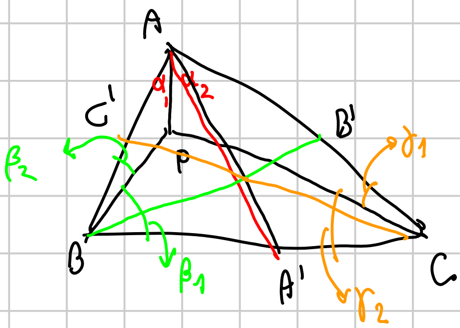
AD, BE, CF concorrono
$\Updownarrow$
$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2} = 1.$

Dim:
$$\left.\begin{aligned}
\frac{BD}{DC} &\overset{\text{Lemma}}{=} \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\cdot\frac{AB}{AC}\\
\frac{CE}{EA} &= \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\cdot\frac{BC}{AB}\\
\frac{AF}{FB} &= \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\cdot\frac{AC}{BC}
\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

(Thm) Ceva dice che AD, BE, CF concorrono sse $\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB} = 1$

dunque in virtù di (*), sse $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\frac{\cancel{AB}}{\cancel{AC}}\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}\frac{\cancel{BC}}{\cancel{AB}}\cdot\frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}\frac{\cancel{AC}}{\cancel{BC}} = 1$ ■

Applicazione (Esistenza del coniugato isogonale)

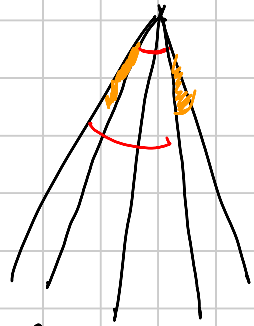


- ABC triangolo; $AP \cap BP \cap CP \neq \emptyset$
- AA' simmetrico di AP wrt bisettrice di $B\hat{A}C$

Dunque se $B\hat{A}P := \alpha_1$
$P\hat{A}C := \alpha_2$

Allora $B\hat{A}A' = \alpha_2$ e $A'\hat{A}C = \alpha_1$

Prendo BB' e CC' analogamente



Th. AA', BB', CC' concorrono e il punto P' in cui concorrono è detto coniugato isogonale di P.

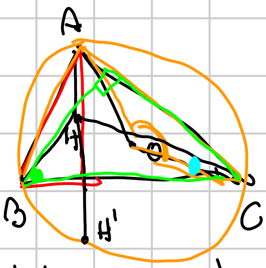
Dim:
Per Th ceva trig AA', BB', CC' conc. sse $\dfrac{\sin B\hat{A}A'}{\sin A'\hat{A}C} \cdot \dfrac{\sin A\hat{C}C'}{\sin C'\hat{C}B} \cdot \dfrac{\sin C\hat{B}B'}{\sin B'\hat{B}A} = 1$

Ma $LHS = \dfrac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1} \cdot \dfrac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} \cdot \dfrac{\sin\beta_2}{\sin\beta_1} = \dfrac{1}{\underbrace{\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \dfrac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2} \cdot \dfrac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}}_{\to 1}} = 1$ ⊠

perché AP, BP, CP conc. e posso usare Ceva trig.

Oss O e H sono coniugati isogonali

Dim



$$\left.\begin{aligned} B\hat{A}H &= 90 - A\hat{B}C \\ O\hat{A}C &= 90 - \frac{A\hat{O}C}{2} = 90 - A\hat{B}C. \end{aligned}\right\} \Rightarrow B\hat{A}H = O\hat{A}C.$$

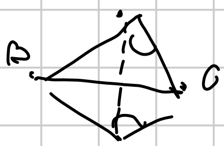
(Lemma del simmetrico)

Oss. Q Dove sta il simmetrico di H rispetto a BC?
R. Sulla circoscritta.

Dim. Per simmetria $B\hat{H'}C \underset{\text{simmetria}}{=} B\hat{H}C \overset{\text{Nel triangolo } BHC \text{ la somma è } 180}{=} 180 - H\hat{B}C - H\hat{C}B =$

$= 180 - (90 - A\hat{C}B) - (90 - A\hat{B}C)$

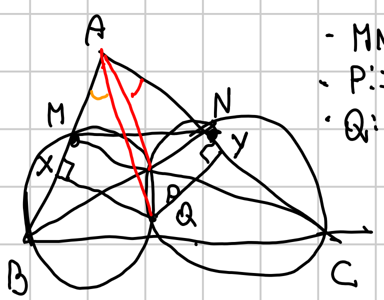
$= A\hat{C}B + A\hat{B}C$



Dunque $B\hat{H'}C + B\hat{A}C = A\hat{C}B + A\hat{B}C + B\hat{A}C = 180$ $\Rightarrow ABCH'$ ciclico $\Rightarrow H'$ sta sulla cfr circ.

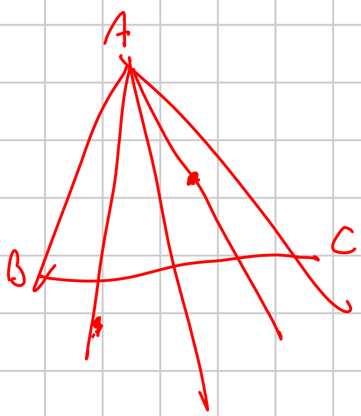
la somma degli angoli di ABC

Es. G3-12



- $MN \parallel BC$
- $P := BN \cap CM$
- $Q := \odot MBP \cap \odot NCP$

Th: $B\hat{A}Q = P\hat{A}C$



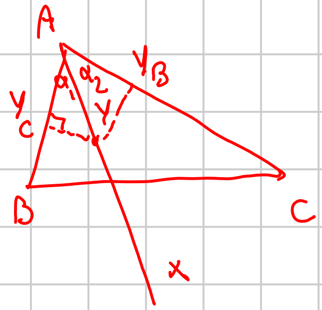
Dim: ① AP è mediana

→ Sia $K := AP \cap BC$. Per ceva $\frac{BK}{KC}\cdot\frac{CN}{NA}\cdot\frac{AM}{MB}=1$ (*). Però $\frac{CN}{NA}=\frac{BM}{MA}$ per Talete.

Quindi (*) diventa $\frac{BK}{KC}=1$ ovvero $BK=KC$ ∎

Strategia ② La tesi equivale a chiedere di dim. che AQ è la simmediana (simmetrica della mediana wrt bisettrice)

Oss.



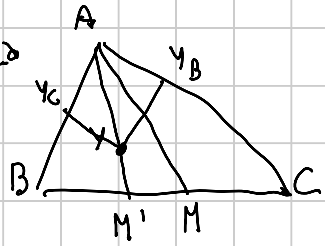
$$\frac{YY_C}{YY_B} = \frac{AY\cdot\sin\alpha_1}{AY\cdot\sin\alpha_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = k_{AX} \quad (\sim)$$

Dunque fissata la ceviana AX, $\frac{YY_C}{YY_B}$ è indip. da Y "e caratterizza la ceviana"

cioè se $\tilde{Y}$ è un altro punto t.c. $\frac{\tilde{Y}\tilde{Y}_C}{\tilde{Y}\tilde{Y}_B}=k_{AX} \Rightarrow \tilde{Y}\in AX$.

(Esercizio 4) (**)

③ **Lemma**

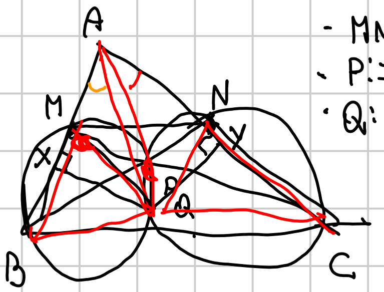


· AM mediana, AM' simm.

∎ $\frac{YY_C}{YY_B}=\frac{AB}{AC}$

Dim. $$\frac{YY_C}{YY_B} \overset{(\sim)}{=} \frac{\sin B\hat{A}M'}{\sin M'\hat{A}C} \underset{\text{AM, AM' sim. wrt bis.}}{=} \frac{\sin M\hat{A}C}{\sin M\hat{A}B} \underset{MB=MC}{=} \frac{\frac{\sin M\hat{A}C}{MC}}{\frac{\sin M\hat{A}B}{MB}} \underset{\text{th seni su AMC, th seni su AMB}}{=} \frac{\frac{\sin A\hat{C}B}{AM}}{\frac{\sin A\hat{B}C}{AM}} = \frac{\sin A\hat{C}B}{\sin A\hat{B}C} \underset{\text{th seni ABC}}{=} \frac{AB}{AC}$$

④ Per concludere l'esercizio mi basta, in virtù dell'oss (**), mostrare che $\frac{QX}{QY}=\frac{AB}{AC}$. Considero i triangoli $M\hat{B}Q$ e $N\hat{C}Q$.

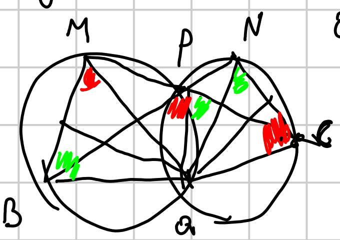


- $MN \parallel BC$
- $P := BN \cap CM$
- $Q := \odot MBP \cap \odot NCP$

Th: $B\hat{A}Q = P\hat{A}C$

$B\hat{M}Q = B\hat{P}Q = Q\hat{C}N$ (MPBQ ciclico, PQNC ciclico) ⇝ $B\hat{M}Q = N\hat{C}Q$.

Analogamente $Q\hat{B}M = Q\hat{N}C$.

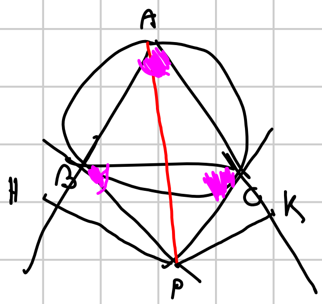


Quindi $M\hat{B}Q \sim C\hat{N}Q$

⇓

$\frac{QX}{QY} = \frac{MB}{NC} = \frac{AB}{AC}$ (MN parallela BC) ∎

Lemma (della simmediana)



· BP, CP tg in B e C alla circoscritta.

∎ **Th.** AP è simmediana

Dim. Conduco le perp. PH e PK a AB e AC.

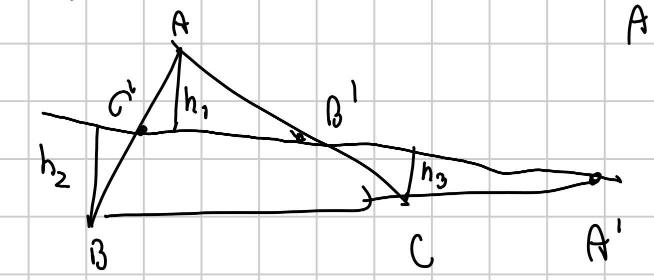
$$\frac{PH}{PK} = \frac{\cancel{PB}\cdot\sin P\hat{B}H}{\cancel{PC}\cdot\sin P\hat{C}K} = \frac{\sin A\hat{C}B}{\sin A\hat{B}C} \underset{\text{th seni in ABC}}{=} \frac{AB}{AC}$$ ∎

$P\hat{B}H = \pi - P\hat{B}C - A\hat{B}C = \pi - B\hat{A}C - A\hat{B}C = A\hat{C}B$

$P\hat{C}K = \pi - B\hat{C}P - A\hat{C}B = \pi - B\hat{A}C - A\hat{C}B = A\hat{B}C$

PB ≤ PC

Thm (Menelao) (Esercizio 5)



A', B', C' allineati sse

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A} = -1.$$

Dim. (Traccia) $\Rightarrow$)

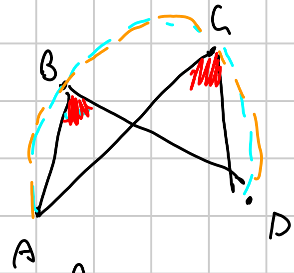
Traccio da A, B, C le altezze alla retta A'B'C'

h_1, h_2, h_3 ...

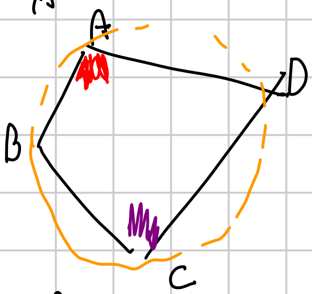
[Esercizio 6: 63/5]

facolt.

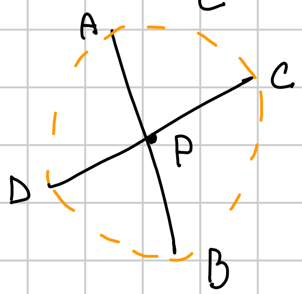
Caratterizzazioni della ciclicità: cioè $\boxed{\text{valgono} \leftrightarrow ABCD \text{ ciclico}}$

1. 

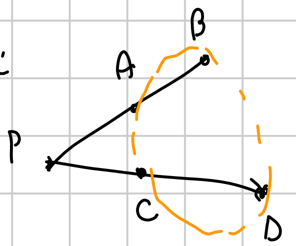
$\hat{ABD} = \hat{ACD}$

2. 

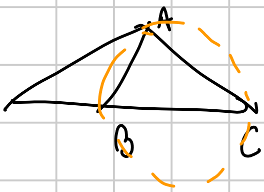
$B\hat{A}D + B\hat{C}D = \pi$

3. 

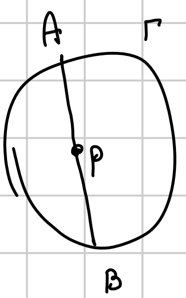
$PA\cdot PB = PC\cdot PD$ [Th. della corda]

4. 

$PA\cdot PB = PC\cdot PD$ [Th della secante]

4bis 

$PA^2 = PB\cdot PC$ [Th della tangente]

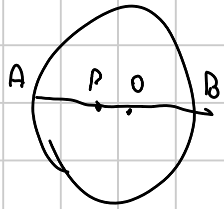
Def. 

In figura P è interno.

$Pow_\Gamma P := PA\cdot PB$ dove AB è una qualsiasi corda che contiene P.

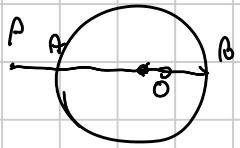
È una "buona" definizione per 3 di cui sopra.

Siccome posso scegliere qualsiasi corda per il calcolo, prendo quelle che passa per il centro



$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \mathrm{Pow}_\Gamma P}}{PA \cdot PB} = (OA - OP)(OB + OP) = (r - OP)\cdot(r + OP) = r^2 - OP^2$$

<u>Oss.</u> Se P è esterno

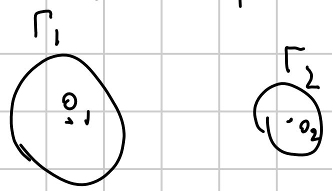


$$\mathrm{Pow}_\Gamma P = PA \cdot PB = (PO - OA)\cdot(PO + OB) = (PO - r)(PO + r) = OP^2 - r^2.$$

Dunque in generale $\boxed{\mathrm{Pow}_\Gamma P = |OP^2 - r^2|}$

<u>Q.</u> Luogo dei punti per cui $\mathrm{Pow}_{\Gamma_1} P = \mathrm{Pow}_{\Gamma_2} P$

<u>R.</u> Asse radicale.

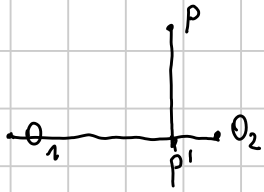


<u>Traccia di dim.</u> $\mathrm{Pow}_{\Gamma_1} P = \mathrm{Pow}_{\Gamma_2} P \iff$

$\iff O_1P^2 - r_1^2 = O_2P^2 - r_2^2$

$\iff O_1P^2 - O_2P^2 = r_1^2 - r_2^2$

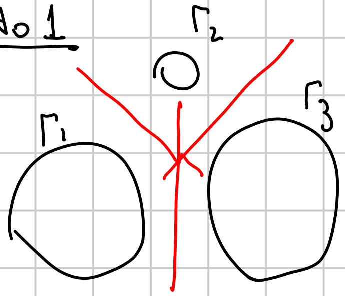
<u>Modello</u>



Il luogo dei P t.c. $O_1P^2 - O_2P^2 = k$ ($\nearrow r_1^2 - r_2^2$)

Questo luogo è una retta $\perp O_1O_2$. [Esercizio 7]

<u>Fatto 1</u>

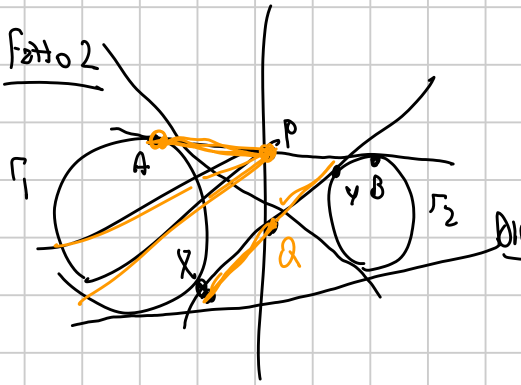


- r_{12}, r_{23}, r_{13} assi rad. concorrono
- Infatti: Sia $P := r_{12} \cap r_{23}$ allora

$$\begin{cases} \mathrm{Pow}_{\Gamma_1} P = \mathrm{Pow}_{\Gamma_2} P & \leftarrow P \in r_{12} \\ \mathrm{Pow}_{\Gamma_2} P = \mathrm{Pow}_{\Gamma_3} P & \leftarrow P \in r_{23} \end{cases}$$

$\to \mathrm{Pow}_{\Gamma_1} P = \mathrm{Pow}_{\Gamma_3} P \longrightarrow P \in r_{13}$.

<u>Fatto 2</u>

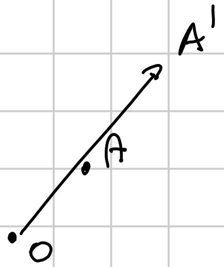


- AB tg. esterna
- $P := AB \cap r_{12}$
- $AP = PB$ [e analogamente sulle altre]

<u>Dim.</u> Infatti $P \in r_{12} \Rightarrow \mathrm{Pow}_{\Gamma_1} P = \mathrm{Pow}_{\Gamma_2} P \Rightarrow PA^2 = PB^2 \Rightarrow PA = PB$

[Esercizio 8: IMO 1\2017]

<u>OMOTETIA</u> centro (O) rapporto (k) ($\in \mathbb{R}$)

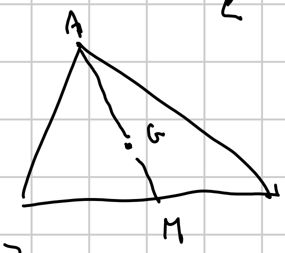


A' = il punto allineato con O, A t.c.

$$\frac{OA'}{OA} = k$$

[segmenti con segno]

Es.

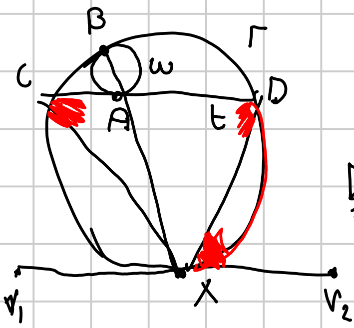


Omotetia di centro G e ragione $-\frac{1}{2}$ manda A in M

Oss. Conserva i rapporti fra lunghezze, angoli (parallelismi, perpendicolarità), NON conserva le distanze.

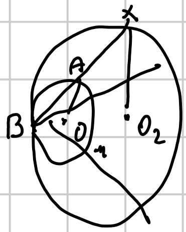
retta → retta parallela.

Fatto [G3|7]



- ω tange CD e Γ in A e B.
- Sia $X := BA \cap \Gamma$
- X è il p.to medio dell'arco $\overset{\frown}{CD}$

Dim: $\exists$ un'omotetia di centro B che manda ω in Γ



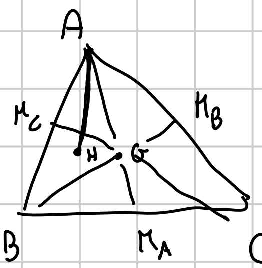
Sotto questa omotetia

$A \to X$

$CD \to$ retta per X, parallela a CD, tg in X a Γ

Allora $V_2 \hat{X} D \overset{\text{parall.}}{=} C\hat{D}X$, $V_2 \hat{X} D \overset{\text{tangenza}}{=} X\hat{C}D$ $\Rightarrow C\hat{D}X = X\hat{C}D \Rightarrow X$ è p.to medio dell'arco CD

Fatto 2 [retta di Eulero + cfr. Feuerbach]



Omotetia di centro G e fattore $-1/2$.

$A \to M_A$

$B \to M_B$

$C \to M_C$

Voglio capire dove va H ortocentro di ABC. H sta sulle altezze AH, BH, CH.

AH va in una retta passante per M_A e $\parallel AH$, ovvero in una retta passante per A $\perp BC$ ovvero l'asse di BC.

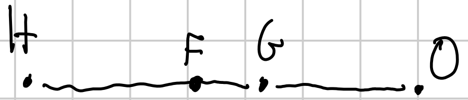
$AH \to$ asse di BC

Analogamente $BH \to$ asse di AC, $CH \to$ asse di AB

Ciò significa che $H \to O$

Quindi H, G, O allineati in quest'ordine e $HG = 2\,GO$.

retta di eulero.



$\odot ABC \to \odot M_A M_B M_C$ [cfr. di Feuerbach]

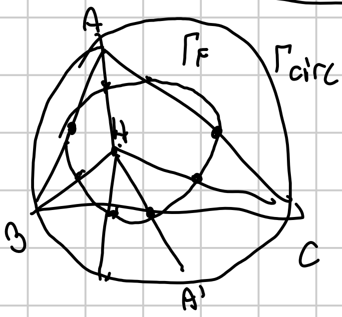
Il centro F di $\odot M_A M_B M_C$ è il trasformato di O secondo questa omotetia ovvero il punto F t.c. F, G, O allineati in quest'ordine e $OG = 2GF$.

Se chiamo $HG = 4x$, $GO = 2x$, $FG = x$

Quindi $HF = 3x$, $FO = 3x$ $\rightarrow$ F è p.to medio di OH.

[Esercizio 9] Le omotetie mandano "centri in centri"

Q. $r_F = \dfrac{r_{circoscritto}}{2}$!



Oss. L'omotetia di centro H e ragione 2 manda $\odot M_A M_B M_C$ in $\odot ABC$ [Argomentarlo bene]

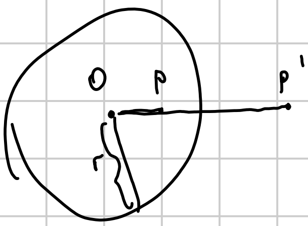
Oss. So per il (Lemma del simmetrico) che il sim. di H wrt BC sta su Γ_{circ}.
In più, grazie a ciò che ho detto prima, ottengo che $H_A \in \odot M_A M_B M_C$ e anche, ovviamente H_B, H_C.
Inoltre ci sono su anche i punti medi di AH, BH, CH

Fatto: So che $M_A \in \odot M_A M_B M_C$, so che l'omotetia di centro H e ragione 2 manda $\odot M_A M_B M_C$ in $\odot ABC$ $\rightarrow$ il simmetrico di H rispetto a M_A sta su $\odot ABC$ (che chiamo A')

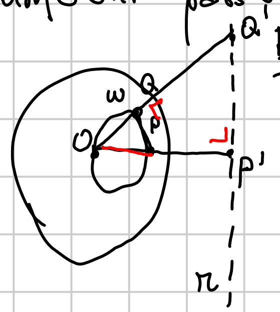
[Esercizio 10] Il punto del fatto precedente, ovvero A', è il p.to diametralmente opposto ad A in $\odot ABC$

INVERSIONE CIRCOLARE centro (O) raggio (r)

$P' :=$ punto tale che O, P, P' allineati in quest'ordine e $OP \cdot OP' = r^2$



- rette passanti per O $\rightsquigarrow$ loro stesse e
- circonferenze passanti per O $\rightsquigarrow$ rette non passanti per O



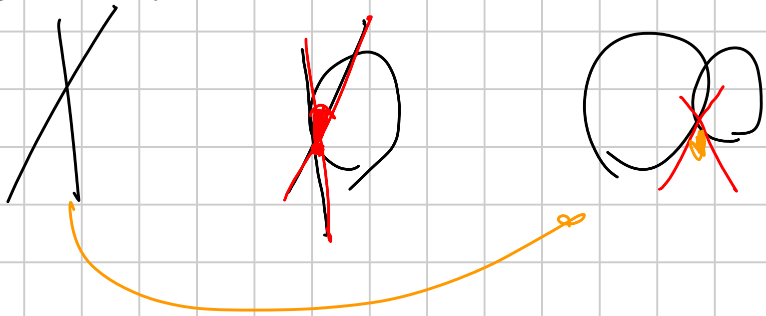
Dim: Prendo ω cfr per O, sia P' il trasf. di un punto P su ω (che è il diam. opposto di O in ω).

CLAIM: $\omega \leftrightarrow$ retta r perpendicolare a OP' passante per P'

Infatti, se prendo Q su ω, $Q' := OQ \cap r$. Allora $QPP'Q'$ è ciclico poiché OP diam $\rightsquigarrow O\hat{Q}P = \pi/2$ e $O\hat{P'}Q' = \pi/2$.

Dunque $\underset{r^2}{\underset{\parallel}{OP \cdot OP'}} = OQ \cdot OQ'$ (per th. della secante) $\rightsquigarrow$ Q' è il trasf. di Q.

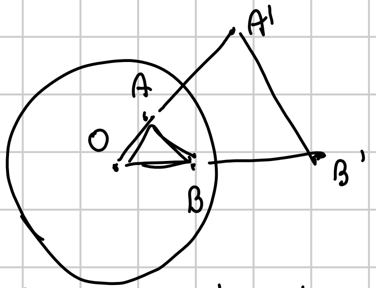
• cfr non passanti per O $\rightsquigarrow$ cfr non passanti per O [Esercizio 11]
COSA CONSERVA? Angoli fra rette e cfr. [Esercizio 12]



Non conserva paral., conserva tangenze, non conserva dist., conserva birapporti

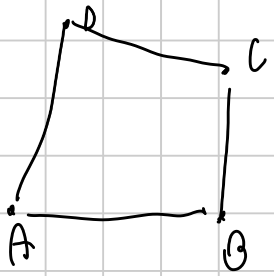
Oss. Γ, Γ' due cfr di centri X e X'
Dim: O (centro di inv.), X, X' allineati ma non è detto che X' è il trasformato di X [Es. 13]

Oss.



$$A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{OA \cdot OB}$$ [Es. 14]

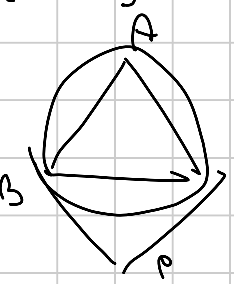
Es. 15
Usando l'es. 14 e un'inversione dimostrare il seguente [THM TOLOMEO]



"ABCD quad. convesso,
$$AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$$
e = vale sse A, B, C, D ciclico"

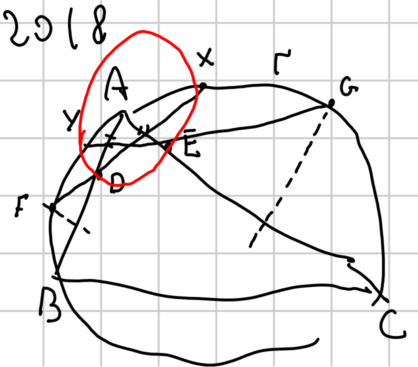
Dim. [Es. 14] + Inversione in A di raggio a caso [+ dis. triangolare]

[Es. 16] Dimostrare il lemma della simmediana con



"inversione in A di raggio $r = \sqrt{AB \cdot AC}$ + simmetria rispetto alla bisettrice in A"

IMO 1 | 2018



• ABC triangolo
• $AD = AE$
• $F := \Gamma_{circ} \cap \text{asse}_{BD}$
• $G := \Gamma_{circ} \cap \text{asse}_{EC}$
• Th: $ED \parallel FG$.

Sol [Pitrone] Siano $X := FD \cap \Gamma$
$Y := GE \cap \Gamma$

CLAIM X, Y, D, E sono su un'unica cfr di centro A.

Dim. [CLAIM] $A\hat{X}D = A\hat{X}F = A\hat{B}F = F\hat{D}B = A\hat{D}X \Rightarrow \overset{\triangle}{AXD}$ isoscele $\Rightarrow AX = AD$

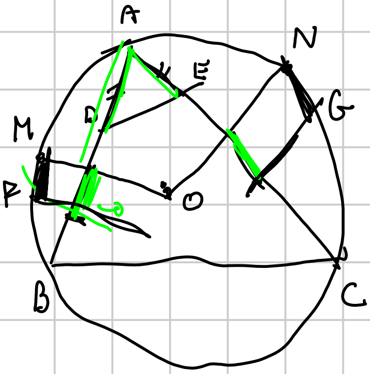
ciclicità; $FD = FB$ perché FG asse BD; opp. al v.

Analog. $AE = AY$
Dunque il claim segue.

Conclusione $Y\hat{E}D = Y\hat{X}D = Y\hat{X}F = Y\hat{G}F \Rightarrow ED \parallel GF$

$XYDE$ ciclico per le claim; ciclicità Γ

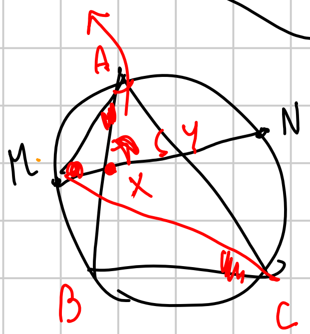
Sol (2)



CLAIM $MN \parallel DE$ [Da fare]

p.ti medi archi

In più gli archi equidistano da OM e ON $\Rightarrow GF \parallel MN \Rightarrow GF \parallel DE$.



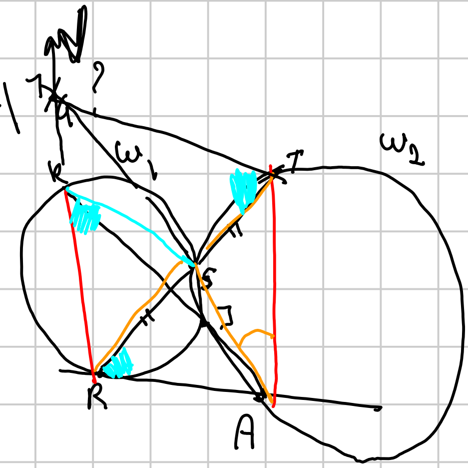
Dim [CLAIM]

$M\hat{A}B = \frac{\gamma}{2}$

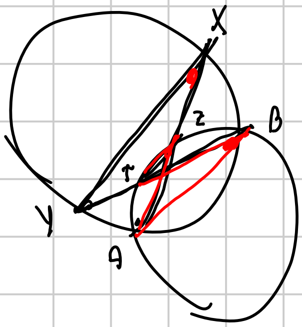
$A\hat{M}N = \frac{\beta}{2}$

$\Rightarrow A\hat{X}N = \frac{\gamma}{2} + \frac{\beta}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow AXY$ isoscele

IMO 2017/?



· $RS = ST$
· AR tange ω_1
· A, J, K allineati, R, S, T allineati



Lemma: $ZT \parallel XY$
Dim: Disegno.

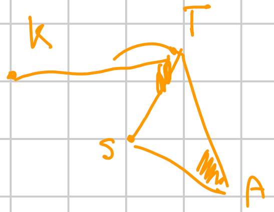
Sol. Dal lemma $KR \parallel AT$.
Vogliamo $K\hat{T}S = S\hat{A}T$
Sia $V := AS \cap RK$, siccome $AT \parallel KR$ e $RS = ST$, allora $ATRV$ parallelogramma.
Voglio mostrare $KSTV$ ciclico. Infatti $S\hat{K}R = S\hat{R}A = S\hat{T}V \Rightarrow KSTV$ ciclico.
In più dalla ciclicità ho

AR tg. ω_1; $RV \parallel AT$

$K\hat{T}S = K\hat{V}S = S\hat{A}T$ cioè ciò che volev.

$KSTV$ ciclico; $RV \parallel AT$

Addendum



$\rightsquigarrow$ KT tange la cfr circoscritta ad ATS