P - Induzione e Principio dei cassetti.

Titolo nota 02/09/2018

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$P(n)$ = frase che parla di $n \in \mathbb{N}$.

Se

① dimostro $P(0)$ ← passo BASE

② dimostro $P(n+1)$ assumendo $P(n)$ ← passo INDUTTIVO

allora so che $P(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

Es 1: "la somma degli interi da 0 a n fa $\frac{n(n+1)}{2}$"

Per induzione

P.B. $n=0$ la somma degli interi da 0 a $n=0$ $= 0$

$$\frac{0(1)}{2} = 0 = 0 \quad \text{ok}.$$

PI: Suppongo di sapere che $0+1+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

E mi accorgo che

$$\underbrace{0+1+\dots+n}_{\text{ipotesi INDUTTIVA}} + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) =$$

$$= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{(n+2)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Oss: Partire da 0 non è indispensabile.

Es2: $m^2 \leq 2^n$ ~~$\forall n \in \mathbb{N}$~~ $\forall n \in \mathbb{N},\ n \neq 3$

Per induzione: PB $\boxed{n=0}$ $0 \leq 1$ ok.

(PI) Se so che $n^2 \leq 2^n$, allora

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geq 2 \cdot n^2 \overset{?}{\geq} (n+1)^2$$

$$2n^2 \geq n^2 + 2n + 1 \qquad n^2 \geq 2n + 1$$

$$(n^2 - 2n + 1) - 2 \geq 0$$

$$(n-1)^2 - 2 \geq 0$$

$$\boxed{n \geq 3}$$

Il PASSO INDUTTIVO funziona solo per $n \geq 3$

Quindi mi serve un passo BASE ≥ 3, $n=3$ non va bene ($9 \not\leq 8$)
$n=4$ va bene ($16 \leq 16$)

$\Rightarrow$ La tesi è dim. per induzione per $n \geq 4$.

Es 3: (disug. di Bernoulli) Sia $x > -1$ un numero reale allora

$$(1+x)^n \geq 1 + nx \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

(Definizioni ricorsive)

$$n! \qquad \begin{cases} 0! = 1 \\ n! = n \cdot ((n-1)!) \end{cases}$$

FATTORIALE

$$F_n \qquad \begin{cases} F_0 = 0 \\ F_1 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & n \geq 2 \end{cases}$$

NUMERI DI FIBONACCI

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34,

55, 89, 144, ...

$0 \curvearrowright 1 \curvearrowright 2 \curvearrowright 3 \; \dots \curvearrowright n \curvearrowright n+1$

Principio di induzione esteso

PB ① Se dimostro $P(0)$

PI ② Se, assumendo $P(0), P(1), \dots, P(n)$, dimostro $P(n+1)$

allora $P(n)$ è vero $\forall n \in \mathbb{N}$

Es 4: Ogni numero naturale è somma di numeri di Fibonacci non consecutivi.

Dim: $n=0$ ok

passo induttivo esteso: Se $0, 1, 2, \dots, n$ sono somme di Fibonacci non consecutivi, allora sia F il più grande Fibonacci $\leq n+1$. Per ipotesi, so scrivere $(n+1)-F$ come richiesto.

$\Rightarrow (n+1)-F = F' + F'' + \dots \qquad F' > F'' > \dots$

$(n+1) = F + F' + F'' + \dots$ Se F e F' fossero consecutivi, allora $F+F' \leq n+1$ ed è un fibonacci $\Rightarrow F+F' = F$

$\Rightarrow F' = 0 \Rightarrow n+1 = F$ e ho comunque finito. $\square$

Es 5: $F_n \geq n^2$ per quali valori di n è vero?

Facciamo prima il passo induttivo (induz. estesa)

Se $F_{n-1} \geq (n-1)^2$ e $F_{n-2} \geq (n-2)^2$ allora

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \geq (n-1)^2 + (n-2)^2 \overset{?}{\geq} n^2$$

OK se $n \geq 5$

$\Rightarrow$ il PI funziona per $n \geq 5$

$$\cancel{2}n^2 - 6n + 5 \geq \cancel{n^2}$$

$$(n-1)(n-5) \geq 0$$

$n = 1$

$n = 0$

$\boxed{n \geq 5}$

Il passo base mi serve da 3 in poi.

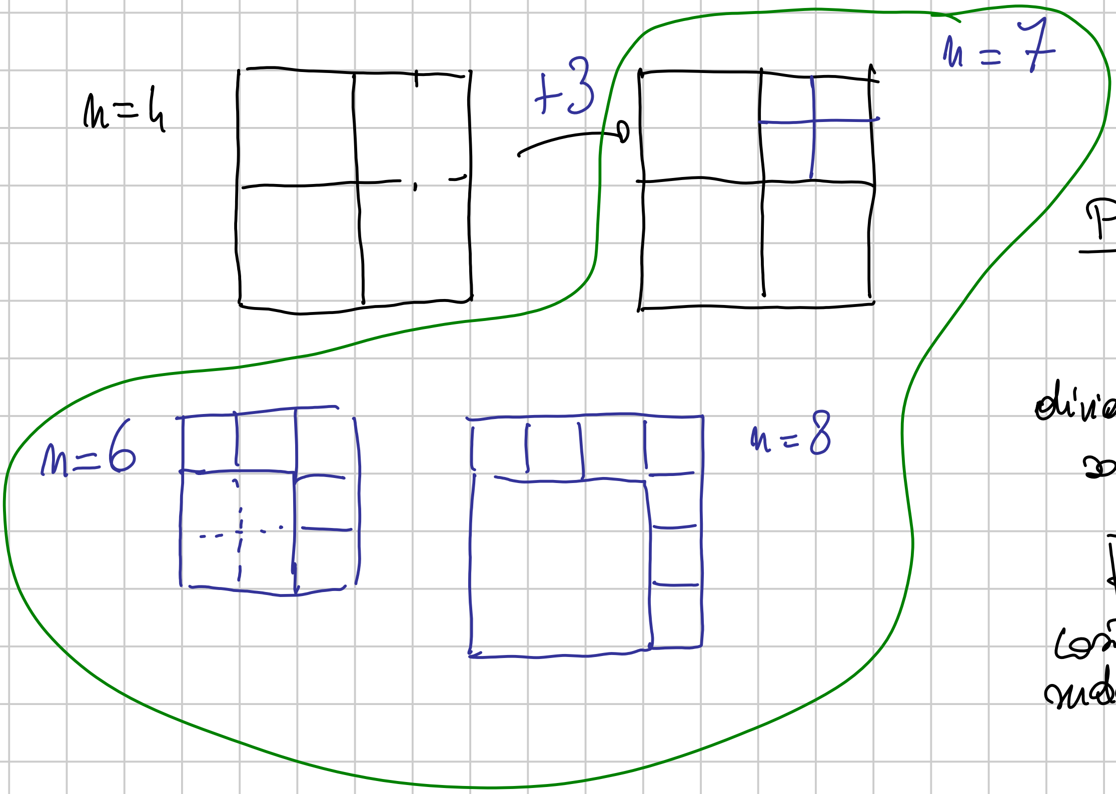
n	F_n	n^2
0	0	0
1	1	1
2	1	4
3	2	9
4	3	16
5	5	25
6	8	36
7	13	49

n	F_n	n^2
8	21	64
9	34	81
10	55	100
11	89	121
12	144	144 ✓
13	233	169 ✓

OCCHIO: Solo 12 come PB non basta!!

$\Rightarrow$ $F_n \geq n^2$ è vero per $n = 0, 1$ e per $n \geq 12$.

Es 6: Dato $n \geq 6$ è sempre possibile dividere un quadrato in n sottoquadrati.



PI: Dato un quadrato suddiviso in n sottoquadrati divido in 4 uno dei sottoquadrati

così ottengo una suddivisione in $n+3$.

Principio dei cassetti (pigeonhole)

Dati $n+1$ oggetti da sistemare in n cassetti, ne esistono almeno due che finiscono nello stesso cassetto.

Dati $kn+1$ oggetti e n cassetti, almeno $k+1$ oggetti finiscono nello stesso cassetto

Es 7: Due di voi (77) hanno il compleanno la stessa settimana

Es 8: Date n persone ce ne sono 2 con lo stesso numero di conoscenti tra le n.

dim: I possibili numeri di conoscenti sono

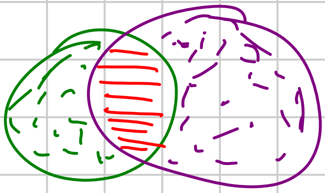
$$\underbrace{0, 1, 2, \dots, n-1}_{n \text{ cassetti}}$$

Però i casi 0 e $n-1$ non si verificano contemporaneamente (se qualcuno non conosce nessuno, nessuno conosce tutti)

$\Rightarrow$ ho $n-1$ cassetti e n persone. Per il princ. dei cassetti, ho finito.

Es 8: Dati 10 numeri di due cifre, posso trovare due sottoinsiemi di loro disgiunti e non vuoti con la stessa somma.

dim: Posso anche eliminare l'ipotesi disgiunti

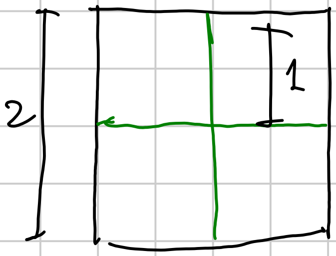


n° sottoins. non vuoti $2^{10}-1=1023$

Quanto può valere al max la somma? Al max 1000.

$\Rightarrow$ Se divido i sottoins. non vuoti in base alla somma, per i cassetti, ne ho due con la stessa somma.

Es 9: Dati 5 punti in un quadrato di lato 2, ce ne sono almeno 2 a dist. $\leq \sqrt{2}$.



I cassetti sono i 4 quadratini

$\Rightarrow \exists$ 1 cassetto con 2 punti all'interno

$\Rightarrow$ ho finito.

Es 10: (Compressione lossless)

Se un algoritmo di compressione è lossless, allora esiste almeno un file che viene ingrandito dall'algoritmo.

dim: Per assurdo, supponiamo che il file compresso sia sempre lungo al più quanto il file originale.

Sia F il più piccolo file che viene davvero ridotto.

e supponiamo che dopo la compressione sia lungo N bit.

Ci sono 2^N file lunghi N bit e tutti loro, dopo la compressione, sono ancora lunghi N bit.

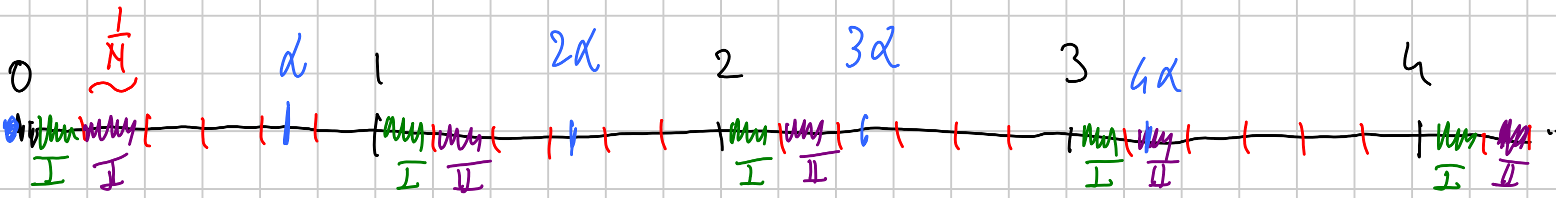
Prendo le compressioni dei file di lunghezza N e la compressione di F questi sono 2^N+1 tutti di lunghezza N, ma ci sono solo 2^N file di lunghezza N $\Rightarrow$ ne ho due uguali. Assurdo.

Es 11: (Teo di DIRICHLET sulle approssimazioni razionali)

Sia $\alpha > 0$ un numero IRRAZIONALE, sia $N > 0$ un intero. Allora esistono $p, q \in \mathbb{N}$ con $0 < q \leq N$ tali che

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{Nq} \leq \frac{1}{q^2}$$

dim: Considero i numeri $\underbrace{0, \alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, N\alpha}_{\text{irrazionali}}$



Il cassetto i-esimo è dato da tutti gli intervalli del tipo

$i = 1, \dots, N$ $\qquad$ $\left[k + \frac{i-1}{N}, k + \frac{i}{N}\right]$ $\quad k \in \mathbb{N}$

Ho N cassetti e $N+1$ multipli di α $\Rightarrow$ ce ne sono due nello stesso cassetto

Diciamo che siano $m\alpha$ e $\bar{m}\alpha$ $\quad (m > \bar{m})$

$$m\alpha = k + \frac{i-1}{N} + \varepsilon \qquad 0 \le \varepsilon < \frac{1}{N}$$

$$\bar{m}\alpha = \bar{k} + \frac{i-1}{N} + \bar{\varepsilon} \qquad 0 \le \bar{\varepsilon} < \frac{1}{N}$$

$$(m - \bar{m})\alpha = k - \bar{k} + \varepsilon - \bar{\varepsilon}$$

$m - \bar{m} = q \qquad q\alpha - p = \varepsilon - \bar{\varepsilon}$

$k - \bar{k} = p \qquad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| = \left|\frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{q}\right| \le \frac{1}{Nq} \le \frac{1}{q^2}$