A2 MEDIUM

Note Title 9/5/2018

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\cancel{1/2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\cancel{1/2}}$$

$\boxed{\text{SOS}}$ (sum of squares)

$$LHS = \sum_{i,j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j \qquad RHS = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 b_j^2$$

$$2(RHS - LHS) = \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{(a_i b_j - a_j b_i)^2}_{} = \geq 0$$

$$= \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_i^2 b_j^2}_{RHS} + \underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_j^2 b_i^2}_{RHS} - \underbrace{2\sum_{i,j=1}^{n} a_i b_i a_j b_j}_{2LHS}$$

$$RHS - LHS \qquad a_i^2 b_j^2 - a_i a_j b_i b_j$$

$$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab \iff (a-b)^2 \geq 0$$

Omogeneizzazione / disomogeneizzazione:

$f(x_1, x_2 \ldots x_n)$ si dice

omogenea di grado d se

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots \lambda x_n) = \lambda^d f(x_1, \dots x_n)$$

es: $f(a,b,c) = a^2+b^2+c^2$ $\quad f(\lambda a, \lambda b, \lambda c) = \lambda^2(a^2+b^2+c^2)$

$\Rightarrow$ omogeneo di grado 2

$$\sum_{cyc} a\sqrt{b} = a\sqrt{b}+b\sqrt{c}+c\sqrt{a} \quad \text{om. di grado } 3/2$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \quad \text{omog. di grado } 0$$

$f(x_1, \dots x_n)$ con f omogenea di grado d'

$g(x_1, x_2, \dots x_n)$ omogenea di grado $d \neq 0$

Allora $f(x_1, \dots x_n) \geq 0$ è vera $\forall (x_1, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$ positivi

$(\Leftarrow)$ se e solo se è vera per tutti gli x che soddisfano
$g(x_1 \dots x_n) = C > 0$

Dim: $\Rightarrow$ ovvia

$\Leftarrow$ normalizzo: Data $y_1, \dots y_n$
tale che $g(y_1, \dots y_n) = D \neq C$, scelgo λ
tale che $g(\lambda y_1 \dots \lambda y_n) = \lambda^d \cdot D = C$
Allora, la n-upla $(\lambda y_1, \dots \lambda y_n)$ soddisfa il vincolo

e quindi $f(\lambda y_1, \dots \lambda y_n) \geq 0$

Ma allora $f(y_1, \dots y_n) = \dfrac{f(\lambda y_1, \dots \lambda y_n)}{\lambda^{d'}} \geq 0$

Se ho dimostrato (*) $\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy$ per tutte le coppie tali che $x^2+y^2=1$, allora l'ho dimostrata per tutte le coppie x,y positive

Tipicamente (*) viene scritta in versione non-omogenea,

(*) $xy \leq \frac{1}{2}$

e devo omogeneizzare, cioè moltiplicare per avere tutti i termini "dello stesso grado"

⚠ serve grado (vincolo) $\neq 0$: se so dimostrare

$\dfrac{x^2+y^2}{2} \geq xy$ per tutte le 2-uple con $\dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = 1$,

allora non basta

$$\sum_i a_i b_i \leq \left(\sum_i a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_i b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Omogeneizziamo: posso supporre $\sum_i a_i^2 = 1$

posso supporre $\sum_i b_i^2 = 1$

Posso ricondurmi a dimostrare

$$\sum a_i b_i \leq 1 \text{ per tutte le } (a_i, b_i)$$

$$\text{t.c. } \sum_i a_i^2 = \sum_i b_i^2 = 1$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2+b_i^2}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} b_i^2 = 1 \quad \checkmark$$

Questa dim. si generalizza a molti casi:

G1

- $\sum_i a_i b_i c_i \leq \left(\sum_i a_i^3\right)^{1/3} \left(\sum_i b_i^3\right)^{1/3} \left(\sum_i c_i^3\right)^{1/3}$:

  omogeneizzo, poi

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3+b_i^3+c_i^3}{3}$$

G2

- $$\sum_i a_i b_i \leq \sum_i \left(\frac{1}{2}a_i^2 + \frac{1}{2}b_i^2\right)$$

$$\sum_i a_i b_i \leq \sum_i \frac{1}{p} a_i^p + \frac{1}{q} b_i^q \quad \text{se } \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$ (medie pesate con pesi $\frac{1}{p}, \frac{1}{q}$)

Potete dimostrare

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q} \quad \forall \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Hölder

(Generalizzazioni ulteriori sono possibili... n specie diverse con pesi $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\dots+\frac{1}{r_n}=1$)

Oss: perché le disuguaglianze sono omogenee?

$$x^3+y^3+z^3 \geq x^2+y^2+z^2 \quad \forall x,y,z \geq 0 \ ?$$

se fosse vera $\forall x,y,z \geq 0$, allora

$$(\lambda x)^3 + (\lambda y)^3 + (\lambda z)^3 \geq (\lambda x)^2 + (\lambda y)^2 + (\lambda z)^2 \quad \forall x,y,z,\lambda$$

impossibile se λ è abb. piccolo.

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{x^2+y^2+z^2}{\lambda} \quad \forall \lambda, x, y, z$$

Analogamente, $x^2+y^2+z^2 \geq x^3+y^3+z^3$ fallisce se prendete λ abb. grande

---

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3 + a_i}{2}$$

GR. 2 $\leq$ GR. 3 + GR 1

---

medie pesate: $\underbrace{a, \dots, a}_{n_1}, \underbrace{b, b, \dots b}_{n_2}, \underbrace{c, \dots c}_{n_3}$.

$$a^{\overbrace{\frac{n_1}{n_1+n_2+n_3}}^{w_1}} b^{\overbrace{\frac{n_2}{n_1+n_2+n_3}}^{w_2}} c^{\overbrace{\frac{n_3}{n_1+n_2+n_3}}^{w_3}} \leq \frac{n_1 a}{n_1+n_2+n_3} + \frac{n_2 b}{n_1+n_2+n_3} + \frac{n_3 c}{n_1+n_2+n_3}$$

$$\boxed{a^{w_1} b^{w_2} c^{w_3} \leq w_1 a + w_2 b + w_3 c} \quad w_1+w_2+w_3=1$$

$w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{Q}$

ma anche $\in \mathbb{R}$,

costruendo successioni w_1^n, w_2^n, w_3^n di razionali che tendono a w_1, w_2, w_3

Medie pesate: $\prod a_i^{w_i} \leq \sum w_i a_i$ $\quad \forall a_i \geq 0$, $\forall w_i \in [0,1]$ t.c. $\sum w_i = 1$

(ES: esiste CS pesato?)

Modi "strani" di usare CS:

Disuguaglianza di Nesbitt:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

$\sum x_i y_i \leq$

Dimostrazione con CS:

[tipo: HM-AM $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c) \geq 9$]

$$\frac{a}{b+c} =: x_1^2 \qquad \frac{b}{c+a} =: x_2^2 \qquad \frac{c}{a+b} =: x_3^2$$

$x_1 = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b+c}}$ e cicliche

$y_1 = \sqrt{a}\sqrt{b+c}$ e cicliche

$$\left(\sum_{cyc} \frac{\sqrt{a}}{\cancel{\sqrt{b+c}}} \cdot \sqrt{a}\cancel{\sqrt{b+c}}\right)^2 \leq \left(\sum_{cyc} \frac{a}{b+c}\right)\left(\sum_{cyc} a(b+c)\right)$$

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c} \geq \boxed{\frac{(a+b+c)^2}{\sum_{cyc} a(b+c)}} = \frac{(a+b+c)^2}{2\sum_{cyc} ab} = \boxed{\frac{\sum_{cyc} a^2 + 2\sum_{cyc} ab}{2\sum_{cyc} ab}}$$

$$\geq \frac{3\cancel{\sum ab}}{2\cancel{\sum ab}}$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$$

Lemma di Titu:

$$\sum \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{(\sum a_i)^2}{(\sum b_i)}$$ per a_i, b_i n-uple di reali positivi

È CS applicata a $\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$ e $\sqrt{b_i}$

IMO 2001

$$\sum \frac{a}{\sqrt{a^2+8c}} \geq 1$$

IMO 2005/3 se $\boxed{xyz \geq 1}$, allora

$$\sum_{cyc} \frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} \geq 0$$

Trucco 1: manipolare le frazioni per migliorare il numeratore:

$$\sum_{cyc} \frac{\cancel{x^5}-x^2\cancel{-x^5}-y^2-z^2}{x^5+y^2+z^2} \geq -1-1-1$$

$$\sum_{cyc} \frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \leq 3$$

Voglio una disuguaglianza con effetti di questo tipo:

$$x^5+y^2+z^2 \geq x^2+y^2+z^2$$

CS su $\left(\sqrt{x^5}, y, z\right)$ e $\left(\sqrt{\frac{1}{x}}, y, z\right)$

$xyz \geq 1$
$\Rightarrow \frac{1}{x} \leq yz$

$$\underbrace{(x^5+y^2+z^2)}\left(\frac{1}{x}+y^2+z^2\right) \geq \underbrace{(x^2+y^2+z^2)^2}$$

$$\sum_{cyc}\frac{x^2+y^2+z^2}{x^5+y^2+z^2} \le \sum_{cyc}\frac{\frac{1}{x}+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} \le \sum_{cyc}\frac{yz+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{\sum_c yz + 2\sum_c y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\le \frac{\sum_{cyc} y^2 + \sum_{cyc} y^2 + \sum_{cyc} z^2}{x^2+y^2+z^2} = 3$$

(catene di disuguaglianze sono un buon modo di scrivere soluzioni)

Riarrangiamento

Se σ è una permutazione di $\{1,2,\dots n\}$

se $a_1 \le a_2 \le \dots \le a_n$, $b_1 \le b_2 \le \dots \le b_n$, allora

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \le \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

Dim: sia σ_* tale che $\sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma_*(i)}$ = massimo,

(che esiste perché è su un # finito di permutazioni)

supponiamo per assurdo che non sia l'identità.

Allora esisteranno $i<j$ t.c. $\sigma(i) > \sigma(j)$

$$\dots + a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)} + \dots \quad \text{(altri addendi)}$$

Ma allora se "raddrizzo" i due termini ottengo qualcosa di più grande:

$$a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)} \geq a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)}$$

$$\underset{\substack{\vee\!\shortparallel\\ 0}}{(a_j - a_i)}\ \underset{\substack{\vee\!\shortparallel\\ 0}}{(b_{\sigma(i)} - b_{\sigma(j)})} \geq 0 \qquad \square$$

Dimostrazione di AM-GM via "smoothing"

Partiamo da una n-upla

$$(a_1, a_2, \dots a_n)$$

supponiamo che non siano tutti uguali, allora costruisco

$$(b_1, b_2, \dots b_n)$$

tale che $AM(a_1 + a_2 + \dots + a_n) = AM(b_1, b_2, \dots b_n)$,

e $GM(b_1, b_2, \dots b_n) > GM(a_1, a_2, \dots a_n)$

Tra gli a_i ci sarà sicuramente uno, diciamo a_i, tale che $a_i > AM$, e uno a_j con $a_j < AM$.

Allora prendo

$$(b_1, b_2, \dots b_n) = (a_1, a_2, \dots a_i - \varepsilon, \dots a_j + \varepsilon, \dots a_n)$$

$AM(b_i)$ è uguale

$$GM(b) = GM(a) \cdot \frac{\sqrt[n]{a_i - \varepsilon}\ \sqrt[n]{a_j + \varepsilon}}{\sqrt[n]{a_i}\ \sqrt[n]{a_j}}$$

$$(a_i - \varepsilon)(a_j + \varepsilon) = a_i a_j + (\underset{\phi}{a_i - a_j - \varepsilon})\,\varepsilon > a_i a_j$$

> 0 se ε è abbast. piccolo

Se (a_k) non sono tutti uguali, posso far salire la media geometrica avvicinandoli $\Rightarrow$ "il max dev'essere quando sono tutti uguali!

non funziona, senza argomenti sull'esistenza del massimo

Teo: il numero intero positivo più grande è 1

Dim: prendiamo $a \neq 1$. Allora $a^2 > a$.

Come si aggiusta la dim. con le medie?

1. dimostrando che il max. esiste:

Teo: Weierstrass:

sia $f: U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se U è chiuso e limitato, allora f ammette massimo (e minimo).

Chiuso: definito tramite uguaglianze, $\leq$, $\geq$ (non $<$ e $>$)

limitato: esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|x_i| \leq M$ per ogni coordinata x_i di $x \in U$

$$f(x_1, x_2, \dots x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n$$

Dove $(x_1, \dots x_n)$ è tale che $x_i \geq 0$

e $x_1 + x_2 + \dots + x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$

chiuso ✓ limitato ✓ $|x_i| \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n$

$\Rightarrow$ (Weierstrass) esiste una n-upla $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ che massimizza il prodotto

Ora la dim. funziona:

prendo $(b_1, b_2, \dots b_n)$ che massimizza ($\exists$ per W-strass)

suppongo che b_i non tutti uguali

costruisco una $(c_1, c_2, \dots c_n)$ con prodotto maggiore stretto, assurdo.

(2) oppure:

Lo trasformo in un procedimento che termina in un # finito di passi: prendo $(a_1, \dots a_n)$ t.c. $a_i > M > a_j$,

e lo rimpiazzo con $(a_1, \dots, \underset{\cancel{a_i}}{M}, \underset{\cancel{a_j}}{a_i + a_j - M} \dots a_n)$

$$M(a_i + a_j - M) > a_i a_j \text{, perché}$$

$$(a_i - M)(M - a_j) > 0$$

Questo proc. termina in al più n passi, perché ogni volta aumentano il numero degli a_k uguali a M.

Bunching:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \overset{?}{\geq} 3/2$$

$$2\sum_{cyc} a(a+c)(a+b) \geq 3(b+c)(c+a)(a+b)$$

$$2\underbrace{\sum_{cyc}}\Big(a^3+\underbrace{a^2c+a^2b}+abc\Big) \geq 3\Big(\sum_{sym}(a^2b)+2abc\Big)$$

$$\sum_{sym} a^3 + 2\sum_{sym} a^2b + \sum_{sym} abc \geq 3\sum_{sym} a^2b + \sum_{sym} abc$$

$$[3,0,0] \cancel{+2[2,1,0]} \cancel{+[1,1,1]} \geq \cancel{3}[2,1,0] \cancel{+[1,1,1]}$$

$$[3,0,0] \succeq [2,1,0]$$

<u>vera</u> perché le somme parziali di $[3,0,0]$ battono le somme parziali di $[2,1,0]$:

$$3 \geq 2$$
$$3+0 \geq 2+1$$
$$3+0+0 = 2+1+0$$

Schur: $[r+2s,0,0]+[r,s,s] \geq 2[r+s,s,0]$ (*)

(nota che non segue da Bunching, perché $[r+2s,0,0] \succeq [r+s,s,0] \geq [r,s,s]$)

Schur-Vornicu:

se $a,b,c \geq 0$ e $x,y,z \geq 0$ sono ordinate nello stesso modo, allora

$$x(a-b)(a-c)+y(b-a)(b-c)+z(c-a)(c-b)\geq 0$$

Dim: possiamo supporre

$$x\geq y\geq z \quad e \quad a\geq b\geq c$$

Allora,

$$\underbrace{\underbrace{x(a-b)(a-c)}_{\geq 0}+\underbrace{y(b-a)(b-c)}_{\leq 0}}_{\geq 0}+\underbrace{z(c-a)(c-b)}_{\geq 0}\geq 0$$

$$\begin{array}{ccc} x & \geq & y \\ a-c & \geq & b-c \\ a-b & = & a-b \end{array}$$

$$x(a-c)(a-b)\geq -y(b-c)(b-a)$$

Di solito, $x,y,z = a^r, b^r, c^r$

$$\sum_{cyc} a^r(a-b)(a-c)\geq 0$$

oppure

$$\sum_{cyc} a^r(a^s-b^s)(a^s-c^s)\geq 0 \quad (*)$$

oppure

$$\sum_{cyc} a(a-b)(a-c)\geq 0 \quad (*)$$

Metodo ABC, SPQ, PQR

Idea 1: tutte le disuguaglianze polinomiali, simmetriche, omogenee in $a,b,c\geq 0$ si possono riscrivere

in funzione di $S = a+b+c$
$Q = ab+bc+ca$
$P = abc$

ES: Schur ⊛:

⊛ $$\sum_{cyc} (a^3 - a^2b - a^2c + abc) \geq 0$$

$$S^3 = a^3+b^3+c^3+3\left(\sum_{sym} a^2b\right) + 6abc$$

$$\underbrace{a^3+b^3+c^3} = S^3 - 3\sum_{sym} a^2b - 6P$$

$$QS = (ab+bc+ca)(a+b+c) = \sum_{sym} a^2b + 3abc$$

$$\sum_{cyc}(a^3-a^2b-a^2c+abc) = (a^3+b^3+c^3) - \sum_{sym} a^2b + 3P =$$

$$= S^3 - 3\sum_{sym} a^2b - \sum_{sym} a^2b - 6P + 3P$$

$$= S^3 - 3P - 4\sum_{sym} a^2b = S^3 - 3P - 4(QS - 3P)$$

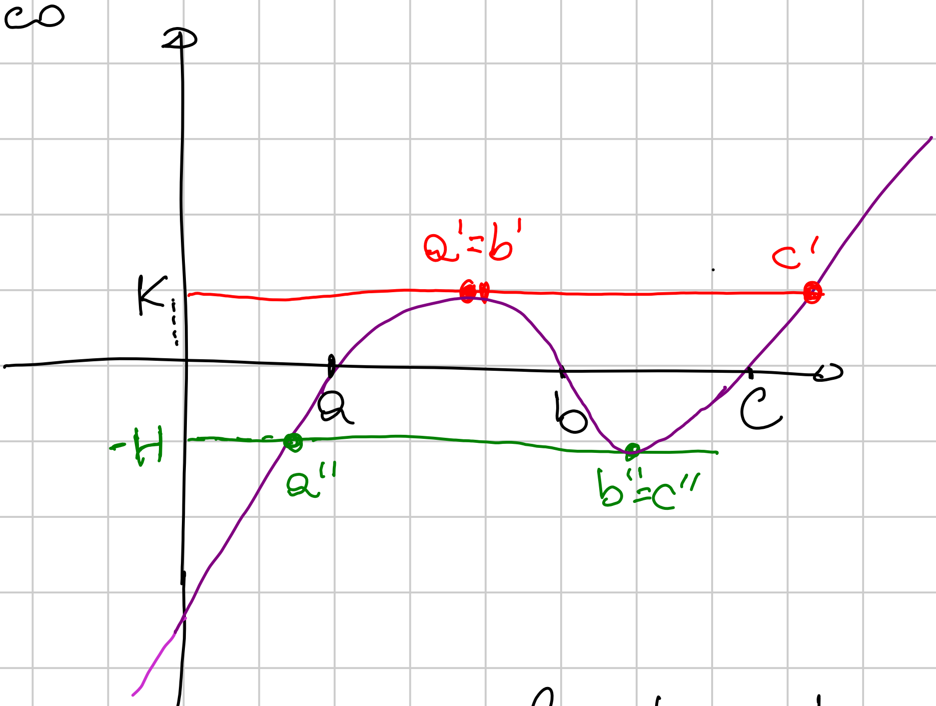
$$= S^3 - 4QS + 9P$$

Schur: $\boxed{S^3 - 4QS + 9P \geq 0}$

Idea 1: dati a, b, c, esistono sempre a', b', c' tali che $S = S'$, $Q = Q'$, $P \geq P'$ (oppure: $P \leq P'$) e ($a' = b'$, oppure $c' = 0$)

Scriviamo il polinomio $\lambda^3 - S\lambda^2 + Q\lambda - P =$
$= (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)$

Ha grafico



I tre punti in rosso sono le radici di

$$\lambda^3 - S\lambda^2 + Q\lambda - P - K = 0$$

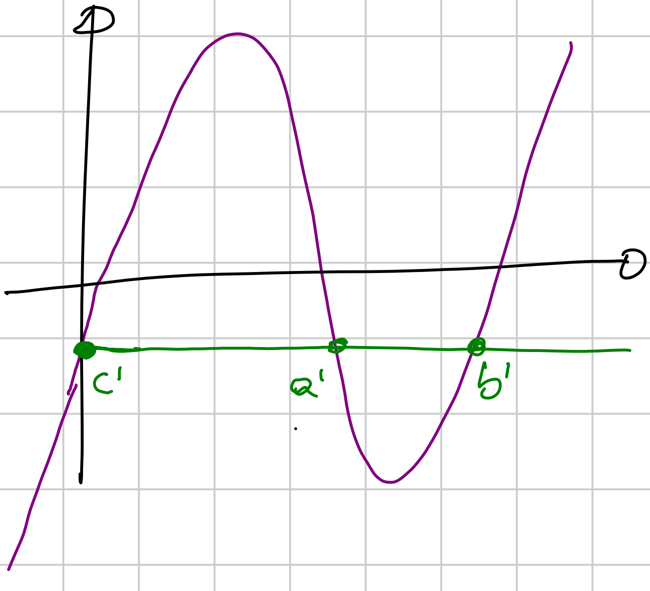
$$a'+b'+c' = S \qquad a'b'+b'c'+c'a' = Q \qquad a'b'c' = P+K$$

I tre p.ti in verde sono le radici di

$$\lambda^3 - S\lambda^2 + Q\lambda - P + H = 0.$$

$$a''+b''+c'' = S \qquad a''b''+b''c''+c''a'' = Q \qquad a''b''c'' = P-H.$$

Riesco sempre a trovare a', b', c' o a'', b'', c'' in questo modo?



Idea 2: mi basta dimostrare la mia disuguaglianza per la terna a'', b'', c'', per cui

$S''=S$, $Q''=Q$, $P''\leq P$: difatti,

$$0\leq S''^3-4S''Q''+9P''\leq S^3-4SQ+9P$$

$\Rightarrow$ Per dimostrare $S^3-4SQ+9P\geq 0$, mi basta farlo in due casi particolari:

- $a=b$
- $c=0$

Teo: Una disuguaglianza $f(P,Q,S)\geq 0$

(tutte le dis. polinomiali, simmetriche, omogenee, in tre variabili)

monotona in P, è vera se e solo se

vale nei due casi particolari:

- $a=b$
- $c=0$

ES: Schur:

$$a(a-b)(a-c)+b(b-a)(b-c)+c(c-a)(c-b)\geq 0$$

Se $a=b$: diventa $c(c-a)^2\geq 0$ ovvia

se $c=0$: $a^2(a-b)+b^2(b-a)\geq 0 \Leftrightarrow (a^2-b^2)(a-b)\geq 0$

Oss: se la disuguaglianza ha grado ≤ 5, allora è sempre monotona in P.

P^2

$(abc)^2$ → grado troppo grosso

$$\text{robe}(Q,S)+\text{robe}(Q,S)\cdot P$$

Fissati Q,S, è sempre monotona in P.

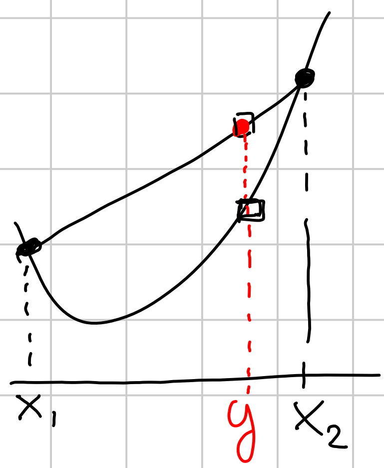
Cannone megagalattico: una disuguaglianza simmetrica, omogenea, polinomiale in n variabili di grado d mi basta dimostrarla nel caso in cui le variabili assumono al più $d/2$ valori positivi distinti (e gli altri sono zeri, o copie dei precedenti).

"Half-degree principle".

Convessità:

Def: f convessa se

$$y = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \qquad \lambda\in[0,1]$$



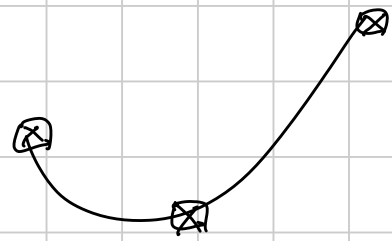
$$f(y) \leq \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$$

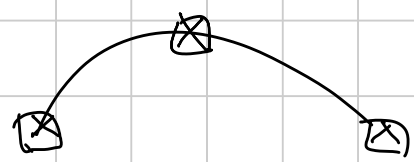
$$\overset{\shortparallel}{f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)} \qquad \forall x_1, x_2 \in \text{dominio}, \quad \forall \lambda\in[0,1]$$

Jensen: dati $x_1, x_2, \dots x_n$ nel dominio della funzione e $w_1, w_2, \dots w_n \in [0,1]$ tali che $w_1+w_2+\dots+w_n=1$,

$$f(w_1x_1+\dots+w_nx_n) \le w_1f(x_1)+\dots+w_nf(x_n)$$

(DIM: induzione "up and down" come per AM-GM.)



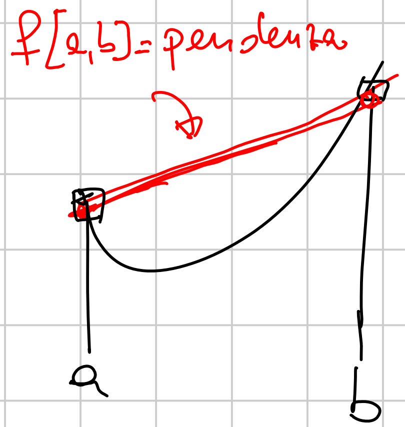


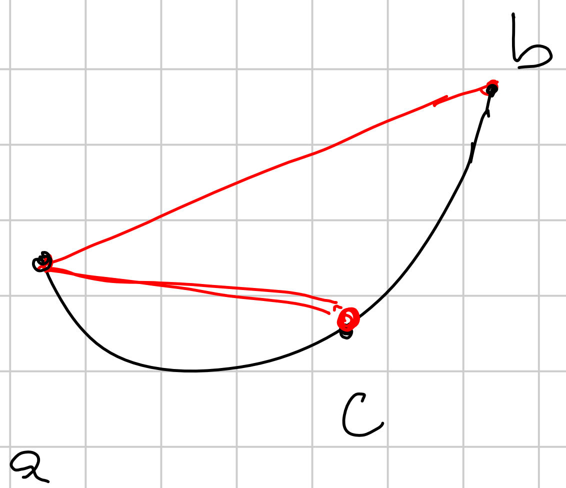
Caratterizzazione alternativa:

f convessa $\iff$ rapporti incrementali sono crescenti

Def: rapporto incrementale:

$$f[a,b] := \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$





per $a \le c \le b$

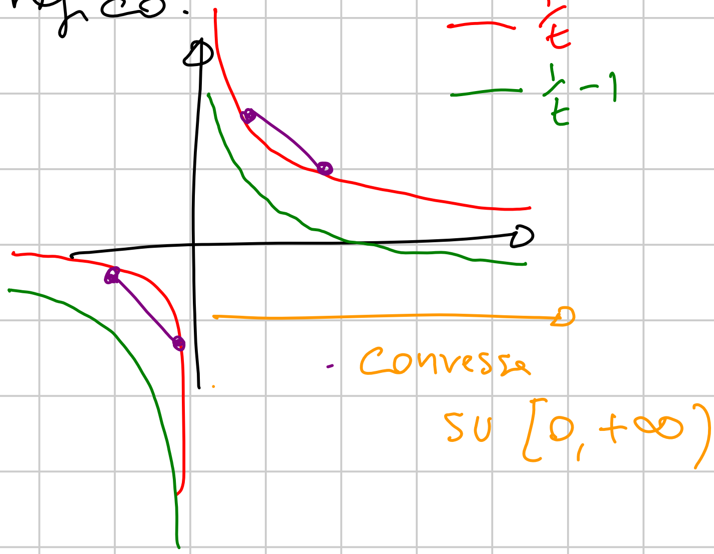
f convessa $\iff$ $f[a,c] \le f[a,b]$.

$\iff$ $f[a,b] \le f[c,b]$.

Come si riconosce la convessità?

1) ragionamenti sul grafico:

$f(t) = \dfrac{1-t}{t} = \dfrac{1}{t} - 1$



2) se f è derivabile, f convessa in un intervallo $\iff$ $f''(x) \ge 0$ in ogni punto dell'intervallo.

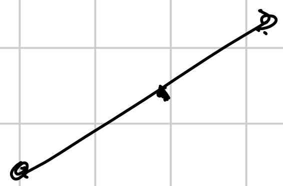
es: $f(t) = \frac{1}{t} - 1 \qquad f'(t) = -\frac{1}{t^2} \qquad f''(t) = \frac{2}{t^3} \ge 0$ per $t > 0$

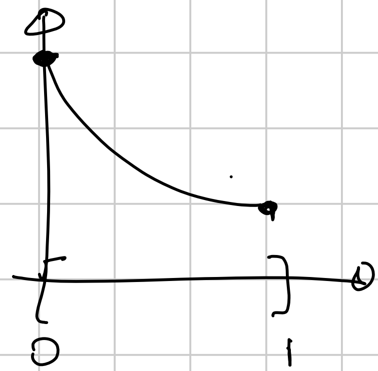
Come si usa?

- $\dfrac{1}{3}\dfrac{1-a}{a} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1-b}{b} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1-c}{c} \ge \dfrac{1-\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}{\frac{a+b+c}{3}}$

$f(t) = \frac{1-t}{t}$, pesi $= \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}$ (Nesbitt dopo aver posto $a+b+c=1$)

- Se f convessa in $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\max(f)$ sta sul bordo, cioè $f(a)$ o $f(b)$





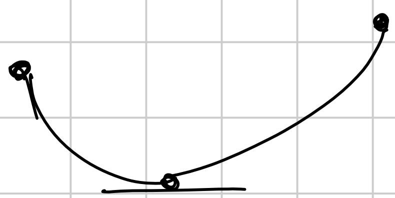
Per ogni $x_i \in [0,1]$

ES: $x_1+x_2+\dots+x_n-(x_1x_2+\dots+x_nx_1) \le \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

lineare in x_1 $\Rightarrow$ max assunto o per $x_1=0$
o per $x_1=1$

stessa cosa vale in tutti gli x_i

$\Rightarrow$ max assunto quando un po' degli x_i sono uguali a 1 e gli altri sono uguali a 0.

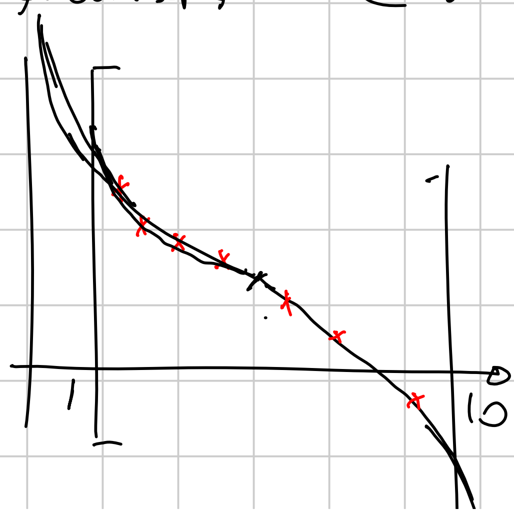


$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}f(b)$$

$f(a)+f(b) \ge 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $\Rightarrow$ se $a+b$ è fissato,

$f(a)+f(b)$ è minimo quando sono uguali

Idea più avanzata che si vede qualche volta:



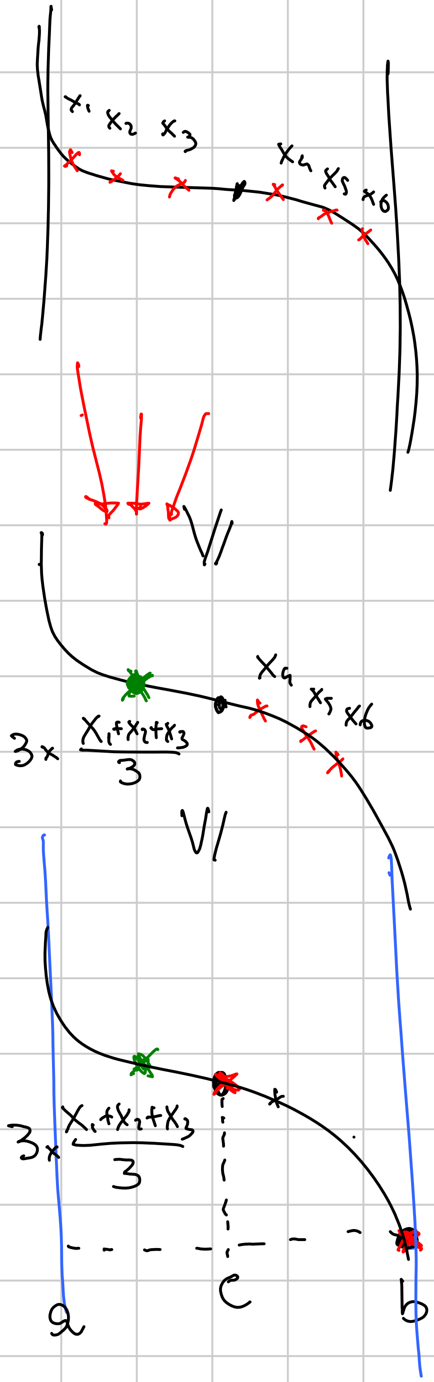
funzione convessa-concava

$x_1, \dots, x_n$ dentro l'intervallo,

$x_1+x_2+\dots+x_n$ fissato

Quando è minimo

$f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)$?



Posso rimpiazzare $f(x_1), f(x_2), f(x_3)$ (zona convessa) con $3f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right)$

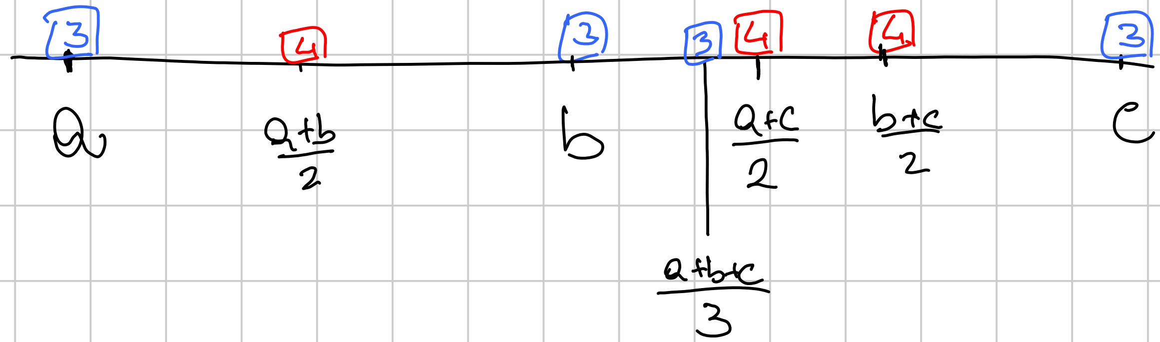
e posso rimpiazzare $f(x_4)+f(x_5)+f(x_6)$ con una combin. di $f(c)$ e $f(b)$

$x_4=\lambda c+(1-\lambda)b$

$f(x_4)\geq \lambda f(c)+(1-\lambda)f(b)$

<u>ES</u>: Sia f convessa, $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dimostrare che a,b,c nel suo dominio
Dimostrare che

$$4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+4f\left(\frac{b+c}{2}\right)+4f\left(\frac{c+a}{2}\right)\leq 3f(a)+3f(b)+3f(c)+3f\left(\frac{a+b+c}{3}\right).$$



$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f(a) + \frac{1}{2} f(b)$$

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq f(a) + f(b)$$

$$4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 2f(a) + 2f(b)$$

$$f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) \leq \frac{1}{3} f(a) + \frac{1}{3} f(b) + \frac{1}{3} f(c)$$

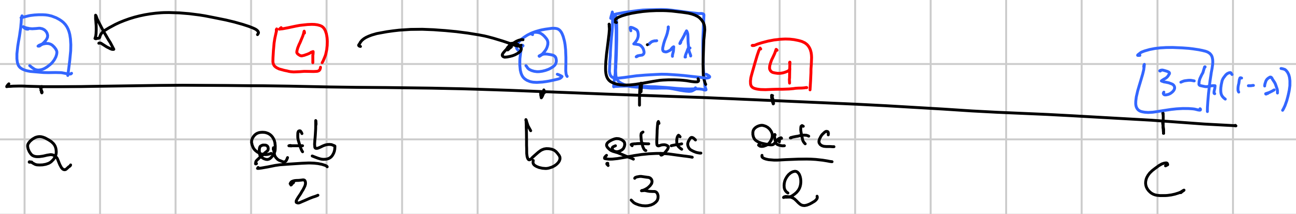
$$\frac{a+b+c}{3} =: m$$

$$\frac{b+c}{2} = \lambda \cdot \frac{a+b+c}{3} + (1-\lambda) c \qquad \lambda (c-m) = c - \frac{b+c}{2} = \frac{c-b}{2}$$

$$\lambda = \frac{c-b}{c-m} \cdot \frac{1}{2}$$

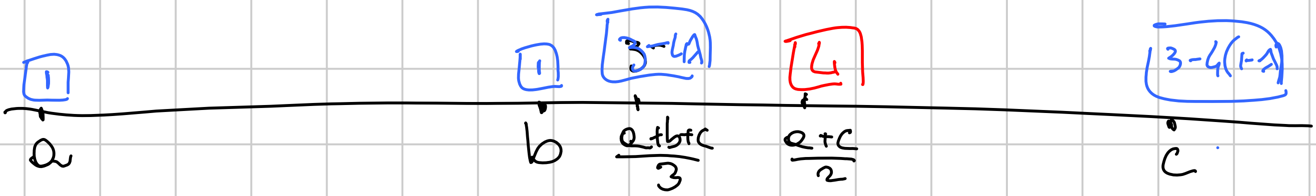
$$4f\left(\frac{b+c}{2}\right) \leq 4\lambda f\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + 4(1-\lambda) f(c)$$

iii



$$4f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq 2f(a) + 2f(b)$$

ii



Nota che $1+1+(3-4\lambda)+3-4(1-\lambda)=4$

$$1\cdot a+1\cdot b+(3-4\lambda)\cdot\frac{a+b+c}{3}+(3-4(1-\lambda))\cdot c=4\,\frac{a+c}{2}$$

$$\frac{1}{4}f(a)+\frac{1}{4}f(b)+\frac{3-4\lambda}{4}f\left(\frac{a+b+c}{3}\right)+\frac{3-4(1-\lambda)}{4}f(c)\geq f\left(\frac{a+c}{2}\right)\quad (i)$$

(Resta da verificare che $3-4\lambda\geq 0$
$3-4(1-\lambda)\geq 0$)

(Provate a farlo anche con <u>disuguaglianza di Karamata</u> :))

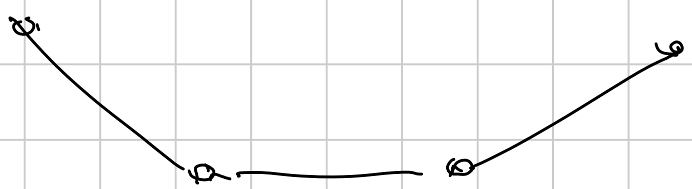
Dati $a_1\leq a_2\leq\dots\leq a_n$
$b_1\leq b_2\leq\dots\leq b_n$

tali che $a_n\geq b_n$
$a_n+a_{n-1}\geq b_n+b_{n+1}$
$a_n+a_{n-1}+\dots+a_k\geq b_n+b_{n-1}+\dots+b_k$
$\vdots$
$a_n+a_{n-1}+\dots+a_0=b_n+b_{n-1}+\dots+b_0$

e data f convessa,

<u>allora</u> $f(b_1)+\dots+f(b_n)\leq f(a_1)+\dots+f(a_n)$

<u>ES</u>:



$f(a_1) \quad f(b_1) \quad f(b_2) \quad f(a_2)$

$a_1 \quad b_1 \quad b_2 \quad a_2$

Sketch dimostrazione:

$$\sum_{i=1}^{n} f(a_i) - f(b_i) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f[b_i, a_i]}_{\text{crescenti}} \cdot (a_i - b_i)$$

$$f[b_{i+1}, a_{i+1}] - f[b_i, a_i] \geq 0$$

$$\sum_{j \geq i} (a_j - b_j) \geq 0$$

(aggiustare)

$$\sum x_i y_i = \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)(y_i + y_{i+1} + \dots + y_n)$$

FORMULA DI SOMMAZIONE DI ABEL

(aggiustare)