ALGEBRA 3 medium

Titolo nota 4 07/09/2018

Successioni def. per ricorrenza [LINEARE]

ESEMPIO post-basic

$x_{n+1} = a x_n + b$ ($x_0 =$ qualcosa) ← condizione iniziale

Cerco una "formula chiusa" per x_n

viene da dopo...

$$\boxed{\begin{aligned} c &= ac + b \\ c(1-a) &= b \\ \to c &= \frac{b}{1-a} \end{aligned}}$$

→ Metodo 1: casi base + induzione

$$x_1 = a x_0 + b$$
$$x_2 = a^2 x_0 + ab + b$$
$$x_3 = a^3 x_0 + a^2 b + ab + b$$
$$x_4 = a^4 x_0 + a^3 b + a^2 b + ab + b$$
$$\dots$$
$$x_n = a^n x_0 + a^{n-1} b + a^{n-2} b + \dots + a^0 b$$
$$= a^n x_0 + b \frac{a^n - 1}{a - 1}$$

(se $a \neq 1$ ... se no succ. aritmetica → + facile)

→ Metodo 2: riduciamo a una ricorrenza + "standard"

$y_n = x_n + k$

$$y_{n+1} = x_{n+1} + k =$$
$$a x_n + b + k =$$
$$= a(x_n + k) - ak + k + b$$
$$= a y_n + \boxed{b + k(1-a)}$$

↑ voglio $\equiv 0$

→ scelgo $k = \dfrac{b}{a-1}$ ← NOTA: funziona se $a \neq 1$

→ ottengo

$$y_n = a^n y_0 = a^n \left(x_0 + \frac{b}{a-1} \right)$$
$$x_n = y_n - k = a^n x_0 + \frac{b}{a-1} (a^n - 1)$$

$$x_{n+1} = 2x_n + n^2$$ (x_0 = qualcosa ...)

Come faccio?

$$y_n = x_n + p(n)$$ ← provo a metterci un pol. di 2° grado

$$y_{n+1} = x_{n+1} + p(n+1) = 2x_n + n^2 + p(n+1)$$
$$= \underbrace{2y_n - 2p(n)}_{2x_n} + \boxed{- 2p(n) + n^2 + p(n+1)}$$

vorrei $\equiv 0$

$p(n) = an^2 + bn + c$

devo avere
- $a = 1$ $\quad (-2a + 1 + a = 0)$
- $b = 2$ $\quad (-2b + 2a^{=1} + b = 0)$
- $c = 3$ $\quad (-2c + a^{=1} + b^{=2} + c = 0)$

$$y_{n+1} = 2y_n, \quad y_n = x_n + n^2 + 2n + 3$$
$$= 2^n y_0$$

$\rightsquigarrow$ formula chiusa per x_n.

PIÚ IN GENERALE

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \text{roba}(n)$$

abbiamo scritto x_n nella forma $y_n + z_n$

risolve l'eq. $y_{n+1} = \alpha y_n$

soluzione dell'equazione originale

... e ancora più in generale

(condizione iniziale: $x_0, \ldots, x_{k-1}$)

$$\underbrace{x_{n+k} - a_{k-1}x_{n+k-1} - a_{k-2}x_{n+k-2} - \ldots - a_0 x_n}_{L(x_n, \ldots, x_{n+k})} = 0 \leftarrow \text{omogenea } *$$
$$= \text{roba}(n)$$

↑ LINEARE

NON omogenea *

RICETTA per trovare TUTTE le soluzioni con roba(n) (ignorando condizioni iniziali):

si scrivono tutte quante come $y_n + z_n$

soluzione generica dell'omogenea associata (DEVO saperle tutte)

è UNA soluzione speciale dell'eq. originale

Perché questo è vero?

- sicuramente $y_n + z_n$ risolve ★; infatti
  $L(y_n + z_n) = L(y_n) + L(z_n) = 0 + \text{roba}(n)$ ✓
- se ho w_n sol. di ★, dico che $w_n - z_n$ risolve ★ (quindi w_n si scrive come $z_n + (w_n - z_n)$). $L(w_n - z_n) =$
  $= L(w_n) - L(z_n) = \text{roba}(n) - \text{roba}(n) = 0$

La ricetta funziona se

- sappiamo risolvere ★
- sappiamo trovare una soluzione di ★

risolto! :)

RIPASSO: come si risolve ★?

Si guarda il polinomio di deg k

$$x^k - a_{k-1}x^{k-1} - a_{k-2}x^{k-2} - \dots - a_0 \;;$$

considero le sue sol. $\lambda_1, \dots, \lambda_k$; se sono tutte distinte, le sol. di ★ sono tutte e sole

$$\mu_1(\lambda_1)^n + \mu_2(\lambda_2)^n + \dots + \mu_k(\lambda_k)^n$$

Se ho soluzioni multiple ($\lambda_1, \dots, \lambda_t$ con λ_i di molteplicità $m(i)$)

$$p_1(n)\lambda_1^n + p_2(n)\lambda_2^n + \dots + p_t(n)\lambda_t^n$$

con $p_i(n)$ pol. di deg $m(i)-1$; ovvero

uso come sol. "fondamentali" per λ_i:
$\lambda_i^n \quad n\lambda_i^n \quad n^2\lambda_i^n \quad \dots \quad n^{m(i)-1}\lambda_i^n$.

Cosa sappiamo "indovinare"?
Se roba(n) è un pol. di deg k, provo un pol. di deg k; se roba(n) $= k^n$, provo $c \cdot k^n$.

ESERCIZIO VERO
(quasi)

$$x_{n+2} = x_n + (-1)^n$$
$$c(-1)^{n+2} = c(-1)^n + (-1)^n$$
$$c(-1)^n = (c+1)(-1)^n$$
$$\rightarrow c = c+1 \quad ?!?$$

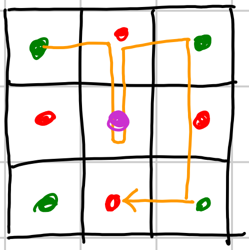
perché ho fallito?

Altro esempio: $x_{n+2} - x_{n+1} - 2x_n = 2^n$
$$4c - 2c - 2c = 1$$

AAAAH! Non funziona perché 2^n è sol di A
Come faccio?! Provo $cn2^n$; lo stesso succede con i polinomi se 1^n è sol. dell'omogenea. Questo metodo (con pol. di grado appropriato a moltiplicare) funziona.
(se roba(n) = somme di polinomi per k^n ...)

... ma a cosa servono?

Problema tipico: ricorrenza in "combinatoria"



percorsi di lunghezza 8
che si muovono da casella
a casella adiacente.

X_n = # percorsi di lunghezza n

A_n = # n che finiscono in •

B_n

C_n

$$\begin{cases} A_n = 2B_{n-1} \\ B_n = 2A_{n-1} + C_{n-1} \\ C_n = 4B_{n-1} \end{cases}$$

$$B_n = 4B_{n-2} + 4B_{n-2} = 8B_{n-2}$$

$$B_{2n} = 8^n B_0 \qquad B_{2n+1} = 8^n B_1$$

(parentesi: $B_n = \mu_1(\sqrt{8})^n + \mu_2(-\sqrt{8})^n$

$B_{2n} = 8^n(\mu_1 + \mu_2)$

$B_{2n+1} = 8^n \sqrt{8}(\mu_1 - \mu_2)$)

invece ... un problema di algebra

$$a_{n+1} = \frac{a_{n-1}}{1 + n a_n a_{n-1}} \qquad a_1 = a_0 = 1$$

quanto fa $a_{199} \cdot a_{200}$?

$$a_{n+1} a_n = \frac{a_{n-1} a_n}{1 + n a_n a_{n-1}}$$

$$b_n = a_n a_{n-1} \longrightarrow b_{n+1} = \frac{b_n}{1+nb_n} \qquad \begin{matrix} n \geq 1 \\ b_1 = 1 \end{matrix}$$

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{1}{b_n} + n$$

$$\rightsquigarrow \quad c_{n+1} = c_n + n \qquad \begin{matrix} (c_n = 1/b_n) \\ c_1 = 1 \end{matrix}$$

$$c_n = 1 + 1 + 2 + \ldots + n - 1 = 1 + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$a_n^2 = 1 + a_{n+1} a_{n-1}$$
$$a_{n+1}^2 = 1 + a_{n+2} a_n$$

$$a_n^2 + \cancel{1} + a_{n+2} a_n = a_{n+1}^2 + \cancel{1} + a_{n+1} a_{n-1}$$
$$a_n(a_n + a_{n+2}) = a_{n+1}(a_{n+1} + a_{n-1})$$
$$\lambda = \underbrace{\frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}}}_{f(n)} = \underbrace{\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n}}_{f(n-1)}$$

$$\forall n \quad \frac{a_n + a_{n+2}}{a_{n+1}} = \lambda.$$

$$\rightsquigarrow \quad a_{n+2} = \lambda a_{n+1} - a_n$$

Dimostrare che $\lfloor (5+\sqrt{21})^n \rfloor + 1$ è divisibile per 2^n.

$$(5+\sqrt{21})^n + (5-\sqrt{21})^n$$

la soluzione è lei!

risolve $\quad x_{n+2} - 10 x_{n+1} + 4 x_n = 0 \qquad x_0 = 2$

$\qquad x_1 = 10$

$\rightsquigarrow$ tesi

EQUAZIONI FUNZIONALI

$$f(f(m)^2 + 2f(n)^2) = m^2 + 2n^2 \quad \text{per } m, n \in \mathbb{Z}^+$$

* f è INIETTIVA: fisso n, se $m_1 \neq m_2$ ma $f(m_1) = f(m_2)$ $LHS(m_1, n) = LHS(m_2, n)$ ma $RHS(m_1, n) \neq RHS(m_2, n)$.

* SE avessi un'identità tipo
$$m^2 + 2n^2 = m'^2 + 2n'^2$$
avrei $f(m)^2 + 2f(n)^2 = f(m')^2 + 2f(n')^2$

IDEA: cerco una tale identità con m, $m+a$, $m+b$, $m+c$ ...

$$(m+3)^2 + 2m^2 = (m-1)^2 + 2(m+2)^2$$

$g(x) := f(x)^2$
$$g(m+3) + 2g(m) = g(m-1) + 2g(m+2)$$

RISOLVO la ricorrenza
(pol. $x^4 - 2x^3 + 2x - 1 = 0$
$= (x-1)^3(x+1)$
$$g(m) = am^2 + bm + c + d(-1)^m \,)$$

Velocemente: si finisce dimostrando $b = 0$ e imponendo $am^2 + c + d(-1)^m$ $\square$ $\forall m$.

→ da qua finisco

$f(xy+f(x)) = xf(y)+f(x)$ $\quad f:\mathbb{R}\circlearrowleft$

f è iniettiva? $f(a)=f(b)=c$

$\underbrace{bc+c}_{x=b\ y=a} = f(ab+c) = \underbrace{ac+c}_{x=a\ y=b} \Rightarrow c(b+1)=c(a+1)$

$\Rightarrow c=0 \lor a=b$ Ehm...

PROSSIMO PASSAGGIO:

$x=y=0$: $f(f(0))=f(0) \Rightarrow f(0)=0$ oppure $f(0)=0$ WOW!

$y=0$: $f(f(x))=f(x) \Longrightarrow f(x)=0$ oppure $f(x)=x$

NOTA $f(x)=0$ e $f(x)=x$ soddisfano.

Suppongo ci siano $a,b\neq 0$ $f(a)=0$ $f(b)=b$

$y=a, x=b$: $f(ab+b)=f(b) \Rightarrow f(b)=0$ FALSO

oppure

$ab+\cancel{b}=\cancel{b}$ FAKE NEWS!!!...

$a=0$ o $b=0$

$\rightarrow$ assurdo

$\Rightarrow$ le uniche soluzioni sono $f(x)=0$, $f(x)=x$

Sulla surgettività:

(Senior 2016: $f(x-f(y)) = f(f(y))+xf(y)+f(x)-1$
$f:\mathbb{R}\circlearrowleft$)

$\exists$? $f:\mathbb{R}\circlearrowleft$ t.c. $f(f(x))=x^2-2$ $\forall x$?

IDEA: guardo i punti fissi!

$g(x)=x^2-2$ ha 2 pti fissi a,b

$g\circ g$ ha 4 pti fissi a,b,c,d

DOMANDA: come "agisce" f su $\{a,b,c,d\}$?