C1 - MEDIUM

PROBLEMA. $a_1, a_2, \dots, a_{17}$ reali distinti.
Esiste una sottosequenza di lunghezza 5 crescente ✶, o ne esiste una decrescente ✶.

$1 \leq i \leq 17$ $\quad f(i) = (x_i, y_i)$

x_i: lunghezza max di una sottoseq. crescente che finisce con a_i

y_i: lungh. max sottoseq. decrescente che finisce con a_i.

Cosa succede a f se NON ho ✶ né ✶?
Ho $f(\{1, \dots, 17\}) \subseteq \{1, 2, \dots, 4\} \times \{1, \dots, 4\}$
$\Rightarrow f$ prende al più 16 valori.
$\rightsquigarrow$ PIGEONHOLE: dovrei avere $i < j$ t.c.
$f(i) = (x_i, y_i) = (x_j, y_j) = f(j)$. Ma è possibile?
Se $i < j$ e $a_i < a_j$, allora $x_j > x_i$; se $a_i > a_j$, allora $y_j > y_i$, quindi NO.
$\Rightarrow$ ASSURDO.

(1) [ERDÖS - SZEKERES] Se ho $a_1, a_2, \dots, a_{nm+1}$ reali distinti allora c'è una sottoseq crescente da $n+1$ o una decrescente da $m+1$.

(2) Se ho $nm+1$ interi positivi, ce ne sono $n+1$ tali che, comunque ne scelga 2, NON si dividono, oppure $m+1$ che si dividono a coppie.

(3) Se ho $nm+1$ intervalli, o ne trovo $n+1$

disgiunti (2 a 2), o $m+1$ che si intersecano tutti in uno stesso punto.

POSET

$X, \leq$

- X: insieme, diciamo finito
- $\leq$: insieme di coppie di elementi (ordinate)

insieme **P**arzialmente **O**rdinato

* $a \leq a \quad \forall a \in X$
* $a \leq b$ e $b \leq a \Rightarrow a = b \quad \forall a, b \in X$
* $a \leq b \leq c \Rightarrow a \leq c \quad \forall a, b, c \in X$

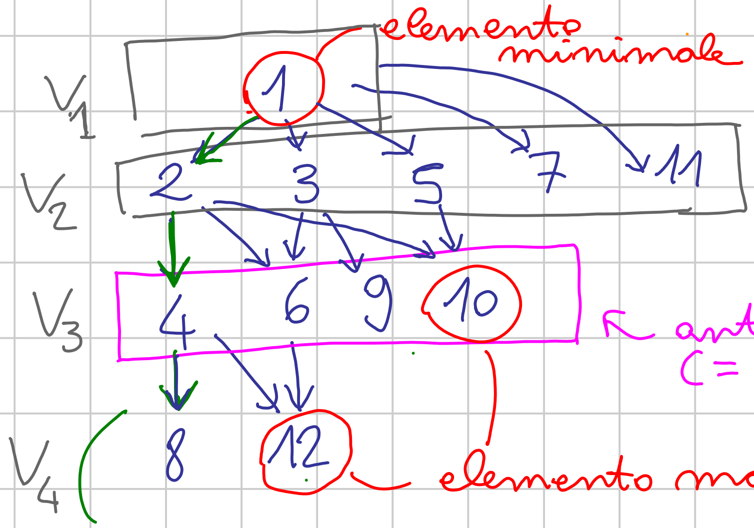
ESEMPI: (1) prendo $X = \{1, 2, \dots, mn+1\}$
$i \preceq j$ se $i \leq j$ E $a_i \leq a_j$

(2) $\mathbb{Z}^+, \mid$

(3) $\{[a,b]$ con $a < b \in \mathbb{R}\}$
$[a,b] \prec [c,d]$ se $b < c$

Rappresentazione "a strati"

$\{1, 2, \dots, 12\}$ divisibilità



elemento minimale

anticatena (= insieme di elementi 2 a 2 non confrontabili)

elemento massimale

catena = seq. $x_1 < x_2 < \dots \leq x_n$

V_1 = insieme degli el. minimali
V_2 = el. $\geq$ SOLO di elementi in V_1

V_3 = el. ≥ SOLO di el. in V_1 e V_2

...

V_i = el. ≥ SOLO di el. in $V_1, \dots, V_{i-1}$

...

V_n ← fatto tutto di el. massimali

$X = \underbrace{V_1 \sqcup V_2 \sqcup \dots \sqcup V_n}_{\text{anticatene}}$; inoltre ho

che la catena + lunga è lunga esattamente n.

> $X, \leq$ poset;
> la lunghezza della max catena $\geq$ cardinalità del minimo ricoprimento in anticatene

l'altra disug è OVVIA!

Duale del teorema di Dilworth. Vale = nell'enunciato di sopra.

Conseguenza super-utile di Dilworth duale

Ho $(X, \leq)$ poset con $nm+1$ elementi; allora c'è una catena da $n+1$ o un'anticatena da $m+1$.

> perché? Non c'è una catena da $n+1$; allora copro $nm+1$ elementi con $\leq n$ anticatene. Se ciascuna avesse $\leq m$ elementi avrei $|X| \leq nm$, assurdo.

→ (1), (2), (3)

(1) catena = sottoseq. crescente. anticatena = sottoseq. decrescente

(2) catena di divisibilità $x_1 | x_2 | \dots | x_n$
anticatena = insieme in cui nessuna coppia si divide

(3) catena = insieme di intervalli disgiunti 2 a 2.

antica tena = insieme di intervalli che s'intersecano 2 a 2.

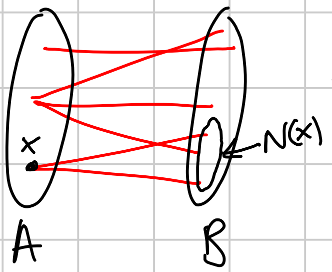
Attenzione a (3)! Non è completamente automatico. Se k intervalli s'intersecano 2 a 2 allora s'interse-cano tutti in un punto! Considero l'intervallo che finisce più a sx ...

VERO teorema di Dilworth: # max anticatena (in un poset) = # minima copertura fatta con catene! (un po' più difficile...)

(SLOVACCHIA 2004) 1001 rettangoli con lati di lunghezze in $\{1, 2, \ldots, 1000\}$. Dim che esistono 3 rett. A, B, C nell'insieme tali che $A \subset B \subset C$.

MATCHING

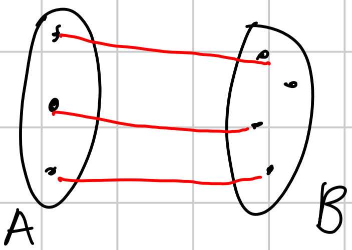
$\mathcal{G}$ grafo bipartito $V(\mathcal{G}) = A \cup B$



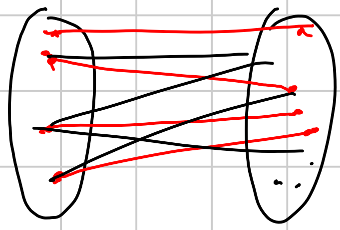
$\forall x \in A \quad N(x) \subseteq B$

$\forall y \in B \quad N(y) \subseteq A$

un matching di A in B è un insieme di archi scelti in $E(\mathcal{G})$ t.c. da ogni elemento di A esce esattamente un arco e da ogni el. di B esce al più un arco:



Un matching di A in B che è anche un matching di B in A è un "perfect matching".



Graf bipartito G $V(G) = A \cup B$

LEMMA dei MATRIMONI (teorema di Hall)

C'è un matching di A in B $\iff [\forall S \subseteq A$ $|N(S)| \geq |S|.]$ * "condizione di matching"

($\Rightarrow$ ovvia)

dimostrazione 1. per induzione su $|A|$.

1. caso in cui $\forall S \subsetneq A$ $|N(S)| > |S|$.

Prendo $x \in A$ e $y \in N(x)$; considero il grafo ottenuto togliendo x e y, che "faccio sposare"; * è soddisfatta sul grafo su $(A \setminus \{x\}) \cup (B \setminus \{y\})$?

Sì! $S' \subseteq A \setminus \{x\} \Rightarrow |N(S') \setminus \{y\}| \geq |N(S')| - 1 \geq |S'| + 1 - 1 = |S'|$, che è * con $|A \setminus \{x\}| = |A| - 1$

$\rightsquigarrow$ finisco il matching per induzione.

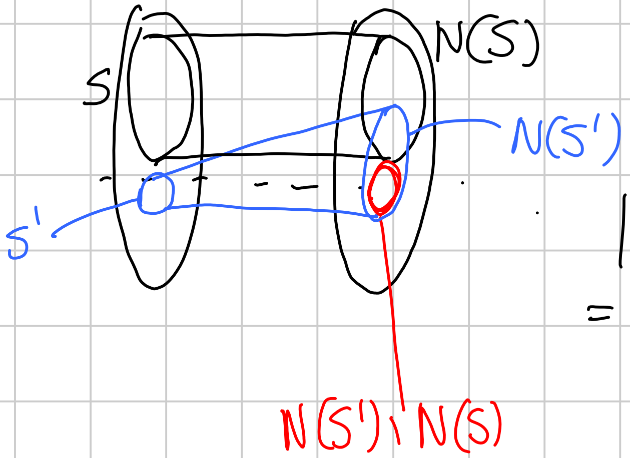
(NOTA: il caso base lo dovevo dire, ma era ovvio)

2. c'è $S \subsetneq A$ tc $|N(S)| = |S|$.

considero $S \cup N(S)$ e $(A \setminus S) \cup (B \setminus N(S))$.

Ho $|S| < |A|$ e $|A \setminus S| < |A|$; se avessi * nei due grafi, avrei finito (hp. induttiva).

* in $S \cup N(S)$ è chiara ($S' \subseteq S$ ha $N(S') \subseteq N(S)$). Mentre se prendo



caso 2

$S' \subseteq A \setminus S$

$$|N(S') \setminus N(S)| + \underbrace{|N(S)|}_{} = |S| \quad\text{(caso 2)}$$

$$= |N(S \cup S')| \geq |S \cup S'| = |S| + |S'|$$

$$\rightarrow |N(S') \setminus N(S)| \geq \cancel{|S|} + |S'| - \cancel{|S|}$$

⇝ ho vinto!

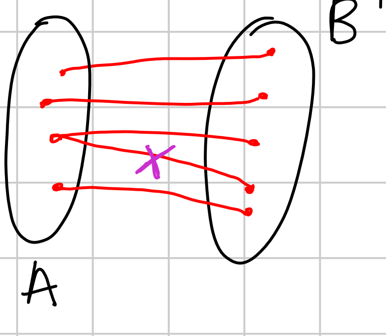
dimostrazione 2. $A \cup B'$ POSET ponendo $x < y$ (metto $N(A)$) se $x \in A$ e $y \in N(x)$. Catena = coppia $(x,y) \in A \times B'$ t.c. $x \sim y$ ($y \in N(x)$). Copertura in catene è un insieme di archi che copre A e B'.

Chi è una antocatena massimale? Dico che è B'! Supp. F antocatena, $F = (B' \cap F) \cup (A \cap F)$.

$$|F| = |B' \cap F| + |A \cap F| \leq |A \cap F| + |B' \setminus N(A \cap F)|$$

$$\leq |A \cap F| + |B'| - |N(A \cap F)| \underset{*}{\leq} |B'|$$

$\Rightarrow$ per Dilworth esiste una copertura con $|B'|$ catene, una per ogni el. di B'



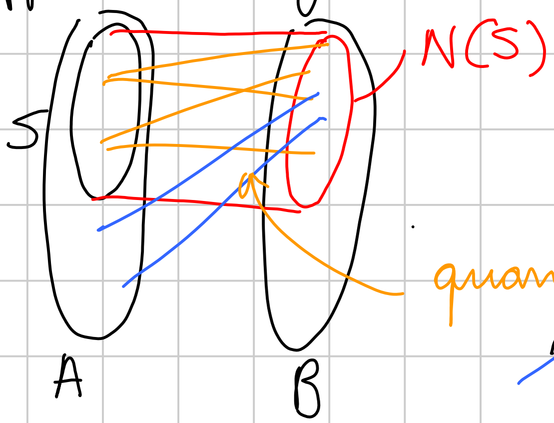
⇝ riesco a estrarne un matching di A in B'.

PROBLEMA: scacchiera $k \times k$, n pedine per riga e per colonna; posso scegliere k pedine in modo da averne una per riga e per colonna.

$$\{R_1, R_2 \dots, R_k\} \cup \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$$

$R_i \sim C_j$ quando c'è una pedina in (i,j).

Vogliamo trovare un perfect matching!
Sappiamo $\deg x = n$ per ogni vertice x.



$$\cancel{n}|S| \leq \cancel{n}|N(S)|$$

archi che "entrano" da S in $N(S)$

archi che escono da $N(S)$

→ è proprio $*$

Teorema di Sperner. Nel POSET $(\mathcal{P}(\{1,2,\dots,n\}), \subseteq)$ la max cardinalità di un'anticatena è $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Anticatene "naturali": $A_k = \{S \subseteq \{1,\dots,n\} \mid |S| = k\}$
$A_{\lfloor n/2 \rfloor}$ → ovvio il "$\geq$" in Sperner.

dimostrazione 1.

Considero A_k e A_{k-1} con $k \le \frac{n+1}{2}$;
formano un grafo bipartito ($x \sim y$ se $x \subseteq y$).
$x \in A_k \Rightarrow \deg x = k$; $y \in A_{k-1} \Rightarrow \deg y = n-k+1$.
$Z \subseteq A_{k-1}$ $\quad |N(Z)| \overset{?}{\ge} |Z|$.

conto archi da Z a $N(Z)$ $\curvearrowright$ $|Z|(n-k+1) \le |N(Z)|k$

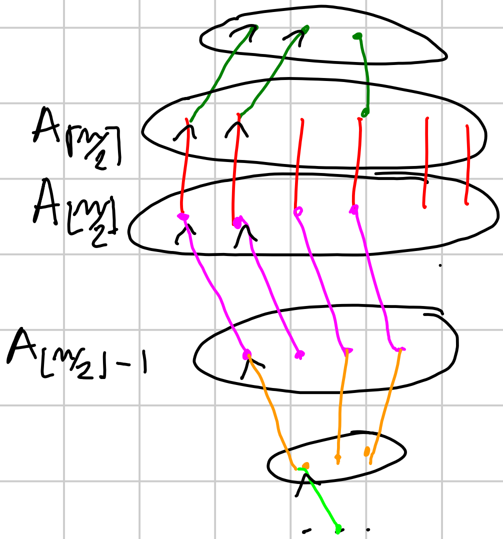
$\uparrow$ archi che escono da $N(Z)$

$\Rightarrow$ $*$ sul mio grafo.

$\left(\frac{k}{n-k+1} \le 1 \Leftrightarrow n-k+1 \ge k \Leftrightarrow k \le \frac{n+1}{2} \right)$

$\Rightarrow$ ho un matching di A_{k-1} in A_k.

Simmetricamente ho un matching di A_{k+1} in A_k per $A_k \ge \frac{n-1}{2}$.

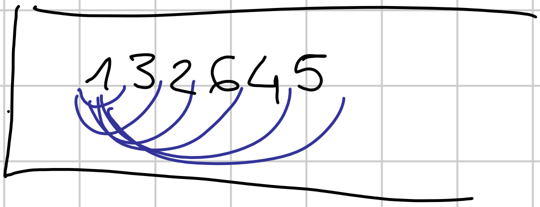


$\leadsto$ concatenando matching ottengo $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ si scrive come unione di $|A_{\lfloor n/2 \rfloor}| = \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

Potrei usarne di meno?
No, perché gli el. di $A_{\lfloor n/2 \rfloor}$ devono stare in catene diverse.
$\Rightarrow$ (Dilworth) $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ è la cardinalità massima di un'anticatena.

dimostrazione 2. voglio prendere F anticatena in $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$ e $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$

permutazione a caso di $\{1,\dots,n\}$.
Data $\sigma(1)\dots\sigma(n)$ quanti "segmenti iniziali" (cioè insiemi $\{\sigma(1),\dots,\sigma(k)\}$) stanno in F? Al max 1!



$$\sum_{\substack{\sigma\in S_n}} \frac{1}{n!}\,\#\text{segm. iniz. di } \sigma \text{ che stanno in } F \;\le\; \frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in S_n} 1 = 1$$

S_n: permutazioni di n elementi

$$= \sum_{k\le n}\sum_{\substack{S\in F\\|S|=k}} \frac{1}{n!}\,\#\text{permutazioni } \sigma \text{ che hanno } S \text{ come segmento iniziale} =$$

$$= \sum_{k}\sum_{\substack{S\in F\\|S|=k}} \frac{1}{n!}\,k!(n-k)! =$$

$$= \sum_{k}\sum_{\substack{S\in F\\|S|=k}} \frac{1}{\binom{n}{k}} \ge \sum_{k}\sum_{\substack{S\in F\\|S|=k}} \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}$$

$$= \frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}\sum_{k}\sum_{\substack{S\in F\\|S|=k}} 1 = \frac{|F|}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}$$

$$\rightsquigarrow \quad |F| \le \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor} \qquad \square$$