Permutazioni

Permutazione $\sigma = f: \{1 \dots n\} \to \{1, \dots n\}$ biettiva

$S_n = \{ \sigma : \{1, \dots, n\} \to \{1, \dots n\} \}$ gruppo simmetrico

Problema simmetrico risp. a una trasf. o a un insieme di trasf: non cambia se le applico.

(origine: permutazioni delle radici di un polinomio)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & & & \sigma(n) \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Oss. Si possono comporre e viene ancora una permutazione

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}}_{\text{dopo}} \circ \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \dots & n \\ \tau(1) & \dots & \tau(n) \end{pmatrix}}_{\text{per prima}} \quad (i)$$

$f \circ g(x) = f(g(x))$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- la compos. è associativa
- esiste l'inversa σ^{-1} $\quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

- esiste id: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & & n \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}$

Gruppo: $(S, \circ, e, ^{-1})$ S insieme

$\circ$ operaz. interna assoc.

e el. neutro

$^{-1}$ esiste inverso

Struttura ciclica delle permutazioni

σ è un k-ciclo se $1, \sigma(1), \sigma(\sigma(1)), \dots \underbrace{\sigma(\sigma(\dots(\sigma(1)}_{k-1\ \sigma}$ sono tutti diversi e invece $\underbrace{\sigma(\dots\sigma}_{n\ \sigma}(1)) = 1$

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

	$\bar\sigma(1)$	$\bar\sigma(\bar\sigma(1))$	$\bar\sigma(\bar\sigma(\bar\sigma(1)))$	$\bar\sigma(\bar\sigma(\bar\sigma(\bar\sigma(1))))$
1	4	3	2	1

$1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$

$(1\,4\,3\,2)$ $\bar\sigma$ in forma ciclica

$=$

$(3\,2\,1\,4)$ 4-ciclo

ma $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ non è un 4-ciclo! È $(1)(2\,3\,4)$ che c'è qui?

se 1 k ciclo (σ_k) e 1 h ciclo (σ_h) sono disgiunti in S_n

$\sigma_k \sigma_h$ $(\dots \sigma_k\ )(\dots \sigma_h\ )$ è una moltiplicazione

o anche la notazione per un'altra permutazione, perché posso farle indipendentemente e contemporan.

Teorema: ogni $\sigma \in S_n$ si può scomporre in cicli disgiunti

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 6 & 2 & 7 & 1 & 9 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

$(1\,3\,6)(2\,4)(5\,7\,9)(8)$

convenzione: i cicli da 1 si possono omettere

non è un gruppo commutativo:

$$(1\,2\,3)\,(3\,4) = (3\,4\,2\,1)$$
$$\neq$$
$$(3\,4)\,(1\,2\,3) = (3\,2\,1\,4)$$

però è facile sapere l'ordine di un elemento

$\sigma^k = e$ $\quad$ $\sigma =$ k-ciclo $\quad$ ordine k

se ho, $\sigma = c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 \cdots c_e$ $\quad$ c_i k_i-cicli.

ordine di $\sigma = \text{mcm}\,(k_i)$

Segno di una permutazione

Teorema: ogni permutazione si può scrivere come prodotto di 2-cicli (trasposizioni) [NON necessar. disgiunti]

Basta scrivere un k-ciclo

$(1\,2\,3\,4)$ $\quad$ [id. $\overset{\text{NON è}}{\overline{\quad}}$ $(1)(2)(3)(4)$]

$(a_i\ b_i)$ $\qquad (12)(23)(34) = (1234)$

$(41)(31)(21) = (1234)$

Oss. se $\sigma = \prod_{i=1}^{k} \text{trasp}_i = \prod_{j=1}^{h} \text{trasp}_j$, allora

h e k o sono entrambi pari — perm. PARI $sgn(\sigma) = +1$

o sono entrambi dispari — perm. DISPARI $sgn(\sigma) = -1$

pari ∘ pari = pari
pari ∘ disp = disp
disp ∘ pari = disp.
disp ∘ disp = pari

$$sgn(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$$

Azione transitiva (e k-transitiva)

Trasf. di un oggetto (insieme) S

Se $\forall s \in S$ e $t \in S$ $\exists T$ trasf. $T(s) = t$

si dice che {Trasf} agisce su S in modo trans.

Se $\forall s_1, s_2 \quad t_1, t_2 \in S \quad \exists T.$ $T(s_1) = t_1$, $T(s_2) = t_2$

... 2-transitiva; così k-transitiva

S_n è n-transitivo

triangolo in problema invar. per affinità $\longrightarrow$ posso wlog supporre che sia equilatero.

affinità del piano sono 3-transitive.

IMO SL 2002 C3: successione piena di n interi positivi $a_1 \dots a_n$ dove se $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ compare, allora compare anche $k-1$ e la prima volta che compare $k-1$ è prima dell'ultima volta in cui compare k. Quante sono?

Cerchiamo una bigezione con qualcosa di noto.

111	112	121	~~211~~
122	212	123	

1111	$\boxed{1112}$	1122	1123	1234
1222	1212	1121	1213	1223
1233	1232	1221	1231	1211
1323	2212	2122	2123	2112
2121	2132	2312	3123	

è $n!$??

1234

f

4321   3214   2143   4123

$S_i = \{k \mid a_k = i\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 1 & 3 & 2 \end{array}$$

f è iniettiva: se 2 succ. sono $\neq$, almeno 1 degli S_i sarà diverso

f è invertibile: g: la perm. è letta come una lista di succ. decrescenti massimali (è modo unico)

che diventano gli indici dei vari i

$\Rightarrow$ Risp. $n!$

ARG 2016? Trovare tutte le $f: \{1 \dots n\} \to \{1 \dots n\}$ big.
t.c. $|f(1)-f(2)| + |f(2)-f(3)| + \dots + |f(n)-f(1)| = 2n-2$

Sull'id. ok fa $2n-2$.

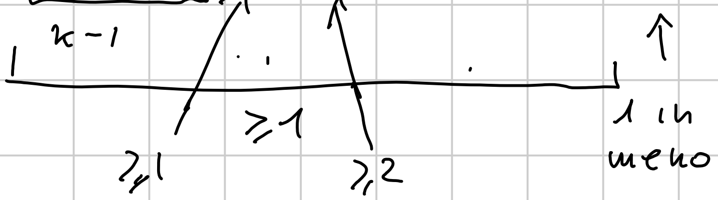
E se è un k-ciclo? $\quad (1 \dots k)(k+1) \dots (n)$

$1 \ 2 \ \dots \ k-1 \ \ k \ \ k+1 \ \dots$

$2 \ 3 \ \ \ k \ \ 1 \ \ k+1 \ \ k+2 \ \dots \ n$

2-ciclo ok (12)

$\underbrace{1 \ 1 \ \dots 1}_{k-1} \ k-1 \ \ k \ \ 1 \ \ 1 \ \ 1 \ \ n-2$



$k=2$ ok $\quad k>2$ no, troppo grande

$n-2+n-3+2k-1 =$

$2n-6+2k$

2-ciclo $(k, k+1)$ qual. no

$1 \ 2 \ \dots \ k-1 \ \ k \ \ k+1 \ \ k+2 \ \dots \ n$

$1 \ 2 \ \ k-1 \ \ k+1 \ \ k \ \ k+2 \ \dots \ n$

$1 \ 1 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 1 \ 1 \dots 1 \ \ n-1$

$1 \ 2 \dots \ j-1 \ \ j \ \ j+1 \ \dots \ j+k-2 \ \ j+k-1 \ \ j+k \dots n$

$1 \ \ j-1 \ \ j+1 \ \ j+2 \ \ j+k-1 \ \ j \ \ j+k \dots n$

$1 \ \ 1 \ \ 2 \ \ 1 \ \dots \ 1 \ \ k-1 \ \ k \ \ 1 \dots 1 \ \ n-1$

$\sigma \longrightarrow \sigma \circ c_n$ ha lo stesso valore, perché sono solo differenze

Posso supporre $\sigma(n) = n$

Quindi ho perm. $\bar{\sigma} \in S_{n-1}$ $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n-1 & n \\ & \boxed{\bar{\sigma}} & & n \end{pmatrix}$

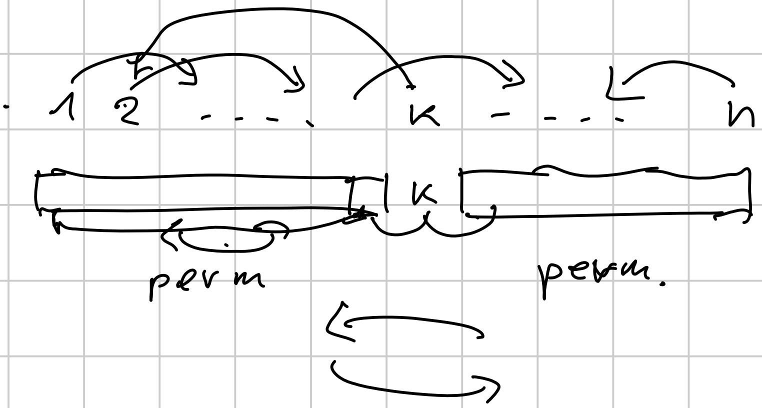
$$\sum_{\substack{i=1 \\ \text{ciclico mod } n-1}}^{n-1} |\bar{\sigma}(i) - \bar{\sigma}(i+1)| \geq 2(n-1) - 2$$

$\rightarrow |\bar{\sigma}(n-1) - \bar{\sigma}(1)|$

$$\sum_{\substack{i=1 \\ \text{ciclica}}}^{n} |\sigma(i) - \sigma(i+1)| = \sum^{n-1} |\bar{\sigma}(i) - \bar{\sigma}(i+1)| - |\bar{\sigma}(n-1) - \bar{\sigma}(1)| + \underbrace{|\sigma(n-1) - \sigma(n)| + |\sigma(n) - \sigma(1)|}_{\geq 2}$$

$\sigma(n) = n$ quindi è dis. triangolare (stretta) su $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \geq 2$

n freeee



$\geq 2k - 4$ $\qquad\qquad$ $\geq 2(n-k) - 2$

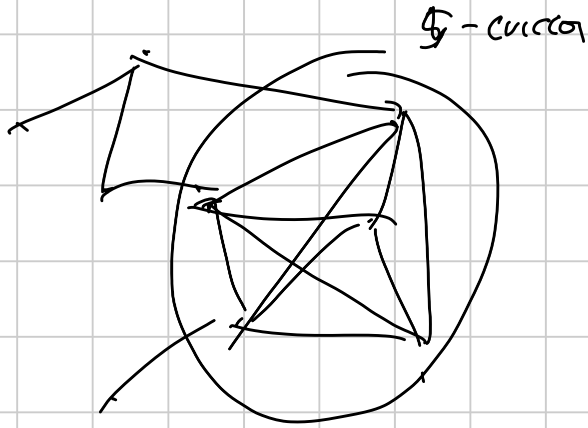
Più in generale, posso calc. il contributo dei vari cicli e mi accorgo che non mi conviene avere più di un ciclo $\rightarrow$ $(1\,2)$ e quelli "ruotati"

$(1\,2 \cdots n)$

e non vanno bene gli n-cicli non in ordine

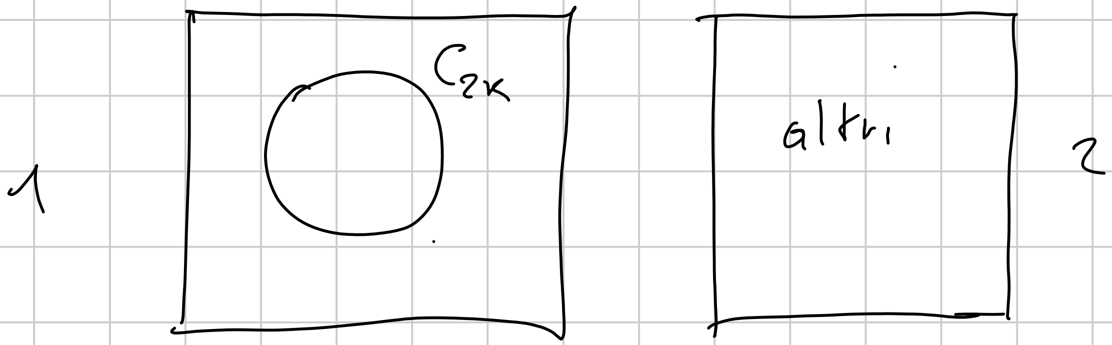
Configurazioni estremali

IMO 2007/3 n partecipanti a uno stage alcuni sono amici (rel. simmetrica). Si sa che la massima dim. di una cricca è pari. Allora dim. che è possibile dividere i partec. in due alberghi in modo che la mass. dim. delle cricche sia la stessa nei due alberghi.



Tentativo: dare un algoritmo di costruzione.

1 o più cricche da 2k.



m_1 = dim. max. cricca in 1
m_2 = " " 2

Caso 1 : $m_2 = m_1 = 2k$ ok

Caso 2: $m_2 < m_1$

Oss. Se tolgo (o metto) un tizio in una scatola, $m_{scatola}$ rimane uguale, o dim. (o aum.) di 1

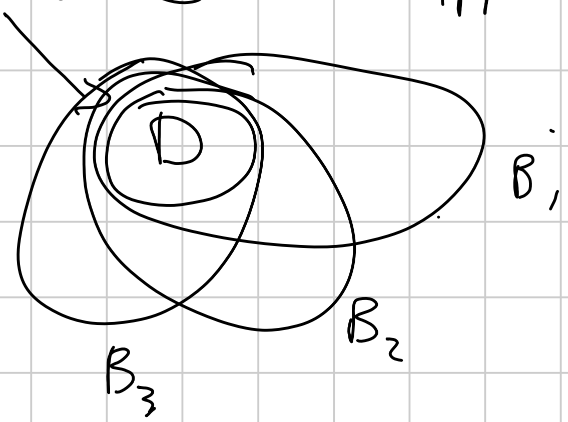
Oss. $m_1 + m_2 \geq 2K$

Spostano 1 a 1 da $\boxed{1}$ a $\boxed{2}$ arrivo al momento in cui $m_1 = m_2 + 1$ o $m_1 = m_2$

1) $\exists$ un tizio in $\boxed{1}$ che portato di là non produce cricche da m_2+1 ok

2) $\nexists$, cioè ogni tizio produce 1 cricca da m_2+1 ne porto comunque di là 1, e ci saranno alcune cricche B_i da m_2+1

Oss. tutti i deportati da $\boxed{1}$ devono appartenere a tutte le B_i



$B_i = D \cup R_i$

Provo a riportare uno di là

Prendo $x_1 \in R_1$ e lo porto di là. Non può essere amico di tutti in $\boxed{1}$, quindi non fa salire m_1

Forse alcune B_i sono ancora grandi m_2+1

In una di queste prendo wlog $x_2 \in B_2$ non amico di B_1, che starà in R_2 e lo porto di là.

Così $x_3 \dots x_s$. L'ultimo è speciale:

o funziona, e si pareggia a m_2

o non funziona e basta portare indietro x_{s-1}.

EGMO 2012/4 $\exists A \subseteq \mathbb{Z}$ t.c. 1) $A \subseteq A+A$

2) Tutti i $z \in \mathbb{Z}$ tranne 0 sono somma di un sottoins. di A ?

Risp.: sì.

Algoritmo "greedy" e iterativo: mi preoccupo di un numero per volta.

1 2,3,4, 5,6,7,8,9,10,11,12

$a_1 = 1$ 3 8

-2 -5 -13

-1,-2 -3,-4,-5,-6,-7

Cong.: $(-1)^n F_n$ funziona. 1) ok

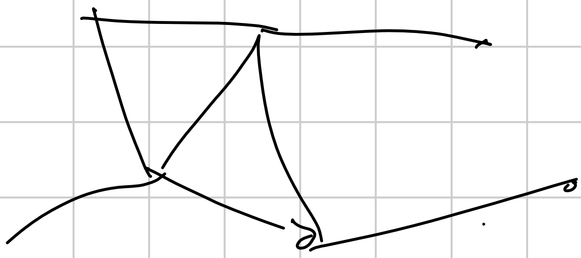
2) $[F_{2n}+1, F_{2n+2}]$ con F_{2n+2}

$[-F_{2n+1}+1, -F_{2n-1}]$ con $-F_{2n+1}$

Ma 0? Se $0 = \sum_i F_{2n_i} - \sum_j F_{2n_j+1}$ non è possibile

perché $\sum_{i=1}^{n} F_{2i} < F_{2n+1}$ e $\sum_{i=0}^{n} F_{2i+1} < F_{2n+2}$

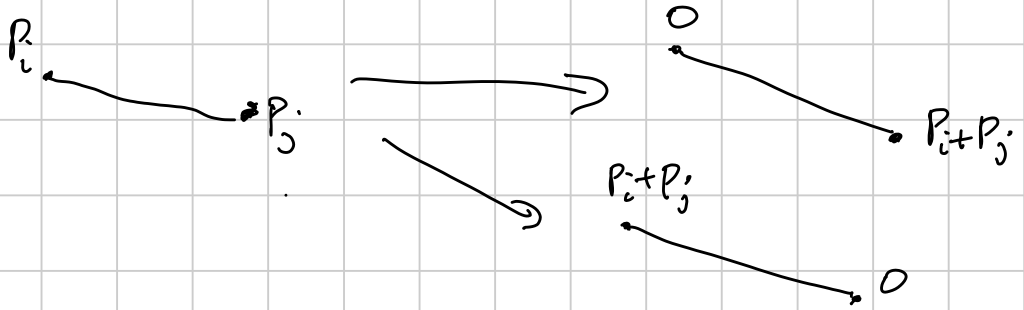
Quanti archi al max su n vertici per <u>non</u> avere nessuna k-cricca.



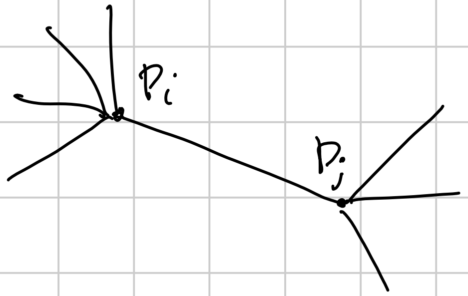
Diamo pesi ai vertici. $\quad v_i \quad p_i$

All'inizio, $p_i = 1 \quad \forall i = 1 \dots n$

$$E = \sum_{\substack{ij \text{ arco} \\ i<j}} p_i \cdot p_j \qquad (\#\text{archi all'inizio}).$$



Dico che in (almeno) uno dei due casi E aumenta.



$$E = \sum_{\substack{\text{lati che} \\ \text{non passano} \\ \text{da } i \text{ o da } j}} + p_i \cdot \sum_{k \text{ ad. } i} p_k + p_j \cdot \sum_{h \text{ ad. } j} p_h - p_i p_j$$

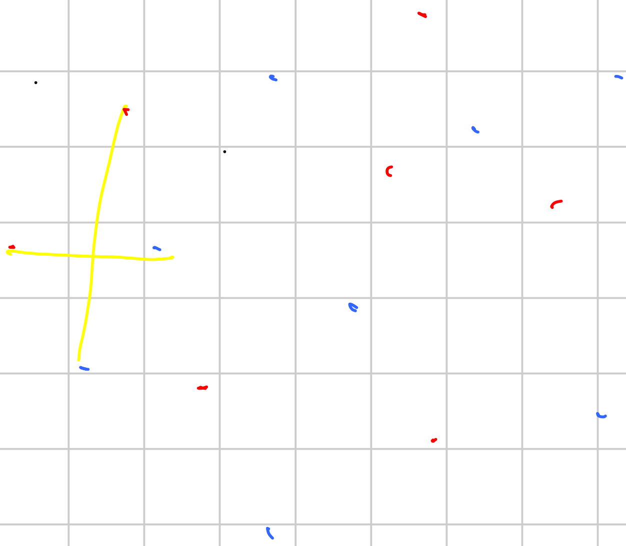
Supp. $\displaystyle\sum_{k \text{ ad. } i} p_k > \sum_{h \text{ ad. } j} p_h$

Dopo? $\displaystyle E = \sum_{\substack{\text{lati che} \\ \text{non toccano} \\ i \text{ o } j}} + \begin{cases} (p_i+p_j)\displaystyle\sum_{k \text{ ad. } i} p_k \\ (p_i+p_j)\displaystyle\sum_{h \text{ ad. } j} p_h \end{cases}$

$$\#\text{lati} \leq \left(\frac{\sum r_i}{k-1}\right)^2 \binom{k-1}{2} = \left(\frac{n}{k-1}\right)^2 \binom{k}{2}$$

n p. rossi

n p. blu in $\mathbb{R}^2$



$\exists$ n segm. bicolori che non si intersecano?

$Q = \sum$ lungh. segm.