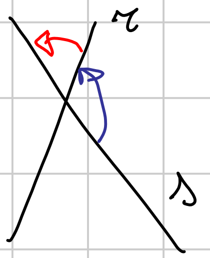
G3 medium - Metodo Sintetico - Sam

Titolo nota 06/09/2018

1) Angoli orientati modulo π



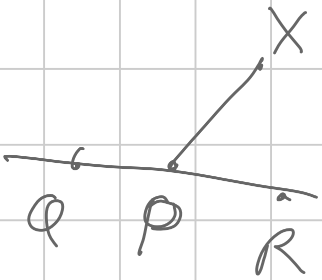
- $\measuredangle(r,s)$ = angolo per portare r su s in senso antiorario
- $\measuredangle(s,r)$ = angolo per portare s su r in senso antiorario

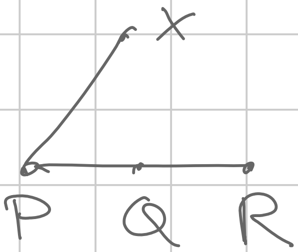
$$\measuredangle(r,s) + \measuredangle(s,r) = 0 \quad (\text{mod } \pi)$$

$$\measuredangle APB = \measuredangle(AP, PB)$$

Es 1: Per dimostrare P, Q, R allineati basta dimostrare che esiste X t.c.

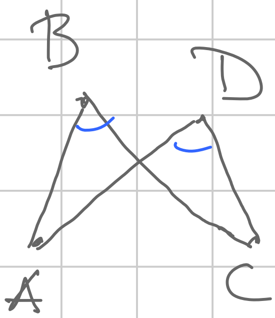
$$\measuredangle XPQ = \measuredangle XPR$$

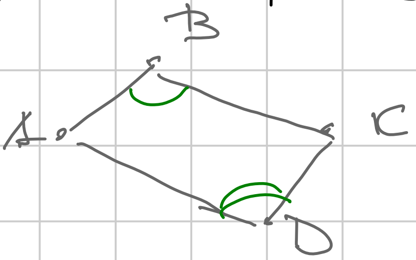


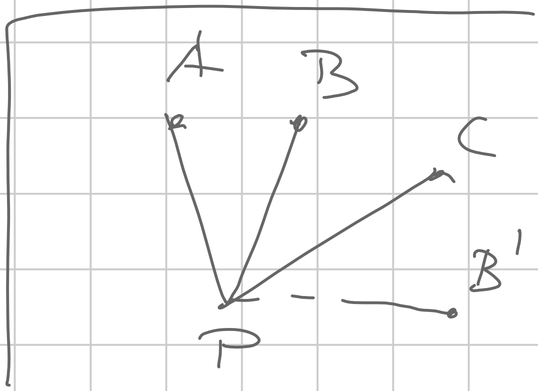


Es 2: Per dimostrare che $ABCD$ è ciclico mi basta dimostrare che

$$\measuredangle ABC = \measuredangle ADC$$





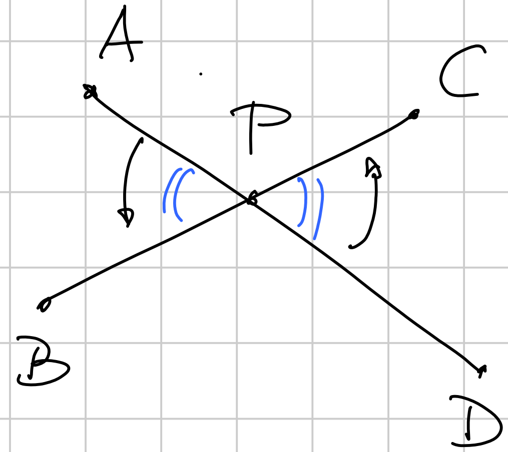


<u>Altre proprietà</u>: i) $\measuredangle ABC = -\measuredangle CBA$

ii) $\measuredangle APB + \measuredangle BPC = \measuredangle APC$

iii) $\measuredangle ABC + \measuredangle BCA + \measuredangle CAB = 0$

<u>Es</u>:



$\measuredangle APB = \measuredangle DPC$

<u>Es</u>: Se so che $\measuredangle ABC = \measuredangle DEF$

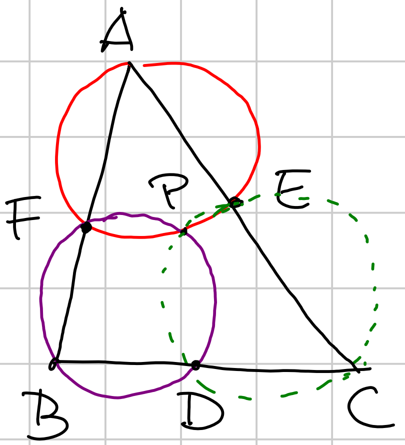
$\measuredangle BCA = \measuredangle EFD$

posso dire che $ABC \sim DEF$? Certo! Perché ci convince.

2) <u>Configurazioni di Miquel</u>

(I) ABC triangolo D, E, F sulle rette BC, CA, AB risp.
Allora (AEF), (BDF), (CDE) concorrono.

(XYZ) la circonf per X, Y, Z



<u>Dim</u>: Sia P l'altra intersezione di (AEF) e (BFD) oltre ad F
Voglio dim $PECD$ ciclico.

$\iff \measuredangle PEC \overset{?}{=} \measuredangle PDC$

$\measuredangle PEC = \measuredangle PEA$ (perché A, E, C allineati)

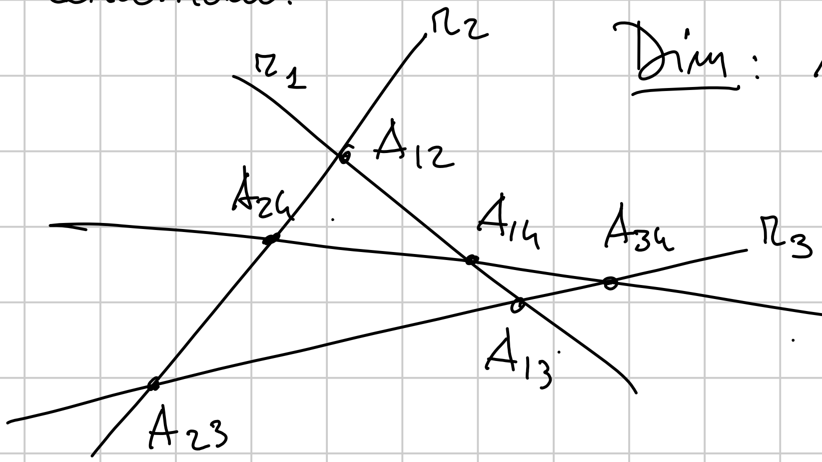
$$\underset{\text{ciclicità}}{\measuredangle PEA = \measuredangle PFA} \underset{F,A,B \text{ allineati}}{=} \measuredangle PFB \underset{\text{ciclicità}}{=} \measuredangle PDB \underset{B,D,C \text{ allineati}}{=} \measuredangle PDC$$

$\boxtimes$

P si dice punto di Miquel di D, E, F in $\overset{\Delta}{ABC}$.

Es: P a caso, D,E,F proiez. sui lati di P
$\Rightarrow$ P pt. di Miquel di D,E,F in ABC.

(II) r_1, r_2, r_3, r_4 rette in posizione generale
cioè non ve ne sono che parallele o 3 concorrenti
Sia $A_{ij} = r_i \cap r_j$. Allora
$(A_{12}A_{23}A_{13})$, $(A_{13}A_{34}A_{14})$, $(A_{12}A_{24}A_{14})$, $(A_{23}A_{34}A_{24})$
concorrono.



Dim: Applico I al triangolo
$A_{12}A_{13}A_{23}$ con punti
A_{24}, A_{34}, A_{14}
$\Downarrow$
$$\left.\begin{array}{l} \boxed{(A_{12}A_{24}A_{14})} \\ (A_{13}A_{34}A_{14}) \\ \boxed{(A_{23}A_{34}A_{24})} \end{array}\right\} \text{ concorrono in } M$$

Applico I al triangolo
$A_{13}A_{34}A_{14}$ con i punti A_{12}, A_{24}, A_{23}
$\Downarrow$
$$\left.\begin{array}{l} (A_{13}A_{23}A_{12}) \\ \boxed{(A_{34}A_{24}A_{23})} \\ \boxed{(A_{14}A_{24}A_{12})} \end{array}\right\} \text{ concorrono in } M'.$$

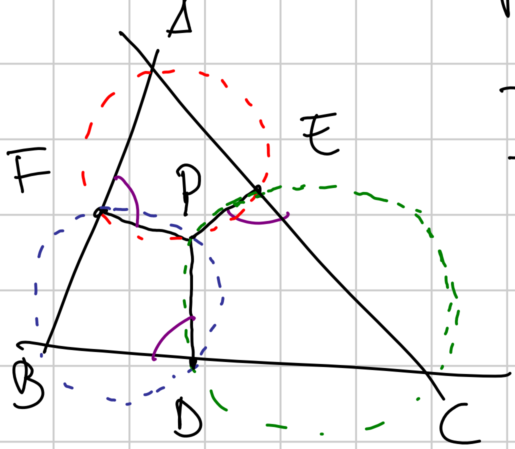
$\Rightarrow M' = M$
oppure
$M' = \cancel{A_{24}}$ impossibile

$\Rightarrow$ le circonf. concorrono in M.

Es: I circocentri O_1, O_2, O_3, O_4 sono conciclici
su una circonferenza che passa per M.

Es2: Gli ortocentri H_1, H_2, H_3, H_4 stanno su una sola retta
detta retta di STEINER-MIQUEL.

Oss: ABC triangolo, D, E, F sulle rette BC, CA, AB.
P t.c. $\measuredangle PDB = \measuredangle PEC = \measuredangle PFA$
Allora P è il pt. di Miquel di D, E, F in ABC



Dim: $\measuredangle PEC = \measuredangle PDB = \measuredangle PDC$
$\Rightarrow CDPE$ ciclico.
Così si fanno gli altri due. $\square$

Oss2: P pt. di Miquel di D, E, F in ABC
$P \in (ABC) \Longleftrightarrow D, E, F$ allineati.

Dim: ($\Longleftarrow$) è il Teo di Miquel (II).

($\Longrightarrow$) So che $\measuredangle APB = \measuredangle ACB$ (ciclicità di $APBC$)
Se dim che $\measuredangle PFE = \measuredangle PFD$ ho finito!

$$\measuredangle PFE = \measuredangle PFA - \overbrace{\measuredangle EFA = \measuredangle PFA - \measuredangle EPA}^{\text{ciclicità di } EPFA} = \underbrace{\measuredangle PFA}_{\parallel \to A,F,B \text{ allineati}} + \measuredangle APE$$

$$\measuredangle PFD = \measuredangle PFB - \overbrace{\measuredangle DFB = \measuredangle PFB - \measuredangle BPB}^{\text{ciclicità di } DPFB} = \measuredangle PFB + \measuredangle BPD$$

$$\measuredangle APE + \measuredangle EPD + \measuredangle DPB + \measuredangle BPA = 0 \Rightarrow \measuredangle APE = \measuredangle BPD$$

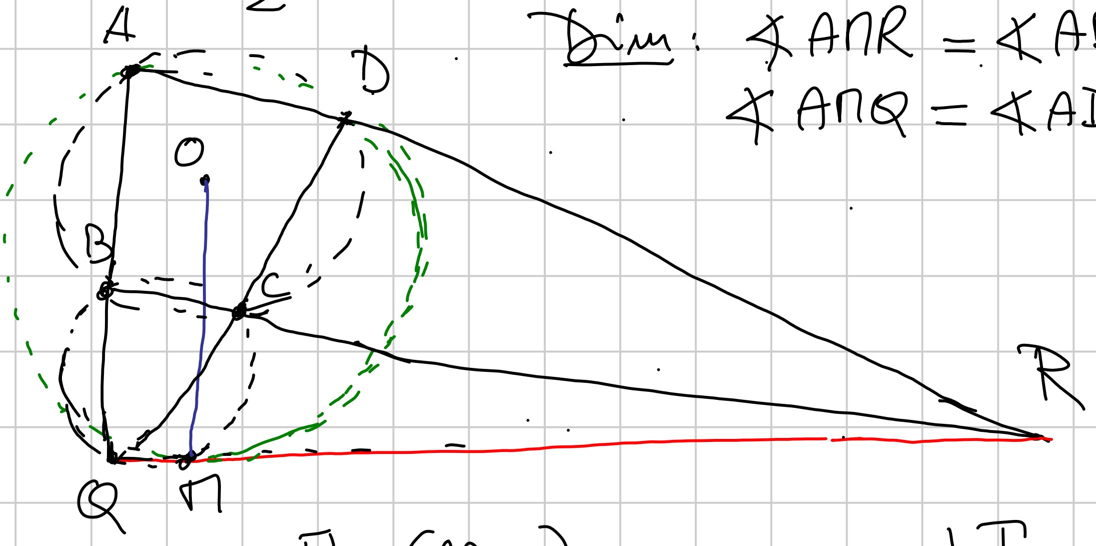
ciclicità di $EPCD$: $\measuredangle EPD = \measuredangle ECD = \measuredangle ACB = \measuredangle APB$

$$\Rightarrow \measuredangle PFE = \measuredangle PFD. \quad \square$$

Corollario (RETTA DI SIMSON) Se proietto $P \in (ABC)$ sui lati, ottengo 3 punti allineati.

<u>Lemma</u>: ABCD ciclico, $P = AC \cap BD$, $Q = AB \cap CD$, $R = AD \cap BC$

M pt. di Miquel di AB, BC, CD, DA. Allora $M \in QR$ e, detto O il centro di (ABCD), si ha $\widehat{OMR} = \frac{\pi}{2}$.



<u>Dim</u>: $\measuredangle AMR = \measuredangle ABR = \measuredangle ABC$

$\measuredangle AMQ = \measuredangle ADQ = \measuredangle ADC$

perché ABCD ciclico.

$\Gamma = (ABCD)$ $\quad r =$ raggio di Γ

$$pow_\Gamma(R) = RO^2 - r^2 = RA \cdot RD = RC \cdot RB = RQ \cdot RM$$

$$pow_\Gamma(Q) = QO^2 - r^2 = QB \cdot QA = QC \cdot QD = QM \cdot QR$$

$$\boxed{RO^2 - QO^2} = QR(RM - QM) = \boxed{RM^2 - QM^2}$$

$\Downarrow$ + Q, M, R allineati

$OM \perp QR$

<u>Altre proprietà</u>

(i) MOAC, MODB ciclici

(ii) MO biseca $\widehat{AMC}$ e $\widehat{BMD}$

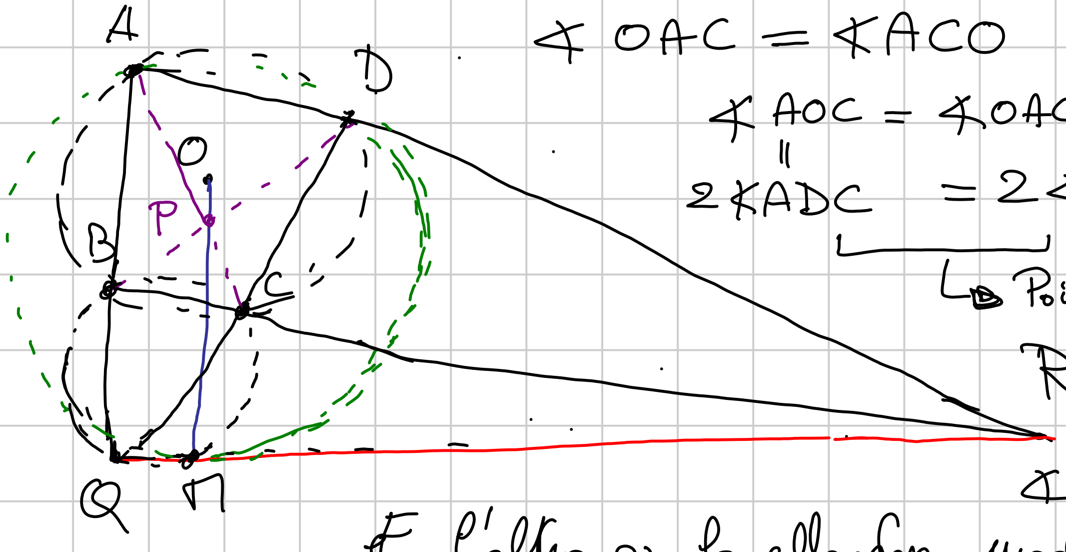
(iii) OM, AC, BD concorrono (in P)

(iv) P, M inversi risp. a Γ

(v) O ortocentro di PQR.

<u>Dim</u>: (i) $\quad \measuredangle OMC = \measuredangle OAC$

$\measuredangle OMR + \measuredangle RMC = \frac{\pi}{2} + \measuredangle RDC = \frac{\pi}{2} + \measuredangle ADC$



$\measuredangle OAC = \measuredangle ACO$

$\measuredangle AOC = \measuredangle OAC + \measuredangle ACO =$

$\parallel$

$2\measuredangle ADC \quad = \underbrace{2\measuredangle OAC}$

↳ Poiché $\widehat{ADC}$ deve essere $\geq \widehat{OAC}$ si deve avere $\measuredangle ADC = \frac{\pi}{2} + \measuredangle OAC$

E l'altro si fa allo stesso modo.

(ii) MO biseca $\widehat{AMC}$

$\left.\begin{array}{l}\measuredangle AMO = \measuredangle ACO \\ \measuredangle OMC = \measuredangle OAC\end{array}\right\}$ perché O è il centro di Γ

Idem l'altro

(iii) Assi radicali

(iv) P, M inversi in Γ: sappiamo che $P = pol_\Gamma(QR)$

$\Rightarrow$ inv di $P \in pol_\Gamma(P) \cap OP = M$

$\Rightarrow$ inv di P è M.

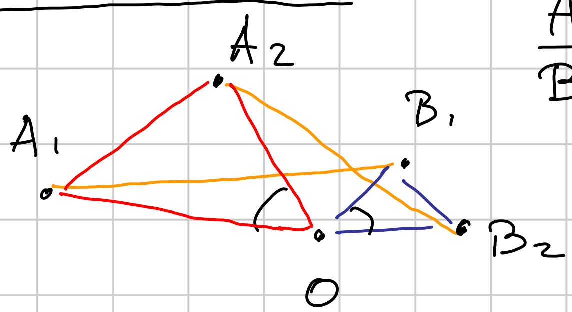
(v) Posso permutare A, B, C, D scambiando tra loro P, Q, R e so che (in ogni config) $OP \perp QR$

$\Rightarrow$ O ortocentro di PQR.

3) Rotomotetie (Spiral similarities)

$\parallel$

[rotazione + omotetia]



$\frac{A_1O}{B_1O} = \frac{A_2O}{B_2O}$

$A_1\hat{O}B_1 = A_2\hat{O}B_2$

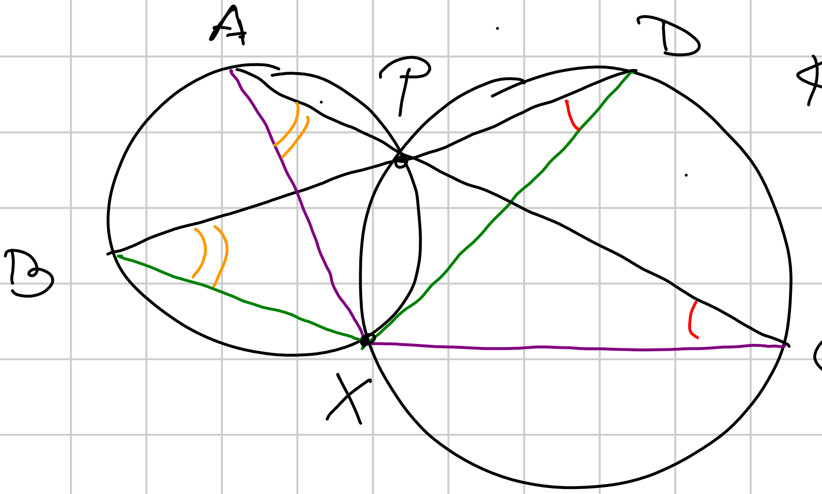
Lemma: A, B, C, D con AC e BD non parallele.

Allora esiste una rotomotetia che manda A in C e B in D.

Dim: $P = AC \cap BD$ $\quad X$ pt. di Miquel di $\underbrace{AB, CD}$, $\underbrace{AC, BD}$

$X = (ABP) \cap (CDP)$ e non è P.

Se dim ACX e BDX sono simili, ho finito



$\sphericalangle BDX = \sphericalangle PDX = \sphericalangle PCX$
$= \sphericalangle ACX$
$\sphericalangle DBX = \sphericalangle PBX = \sphericalangle PAX$
$= \sphericalangle CAX$
$\Rightarrow$ simili ■

Lemma: X è il centro anche di una rotomotetia che manda A in B e C in D

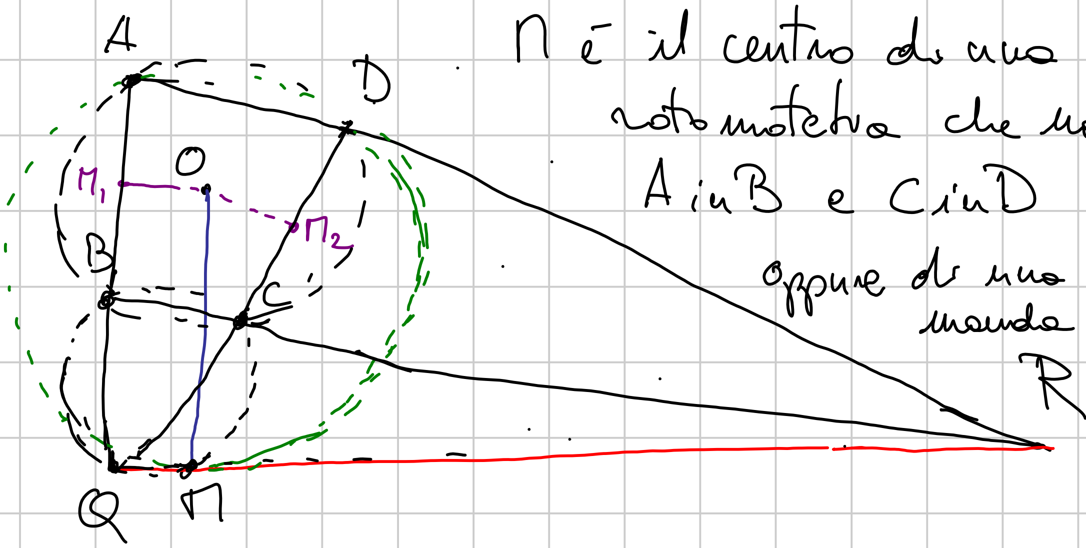
Dim: So che $\sphericalangle AXB = \sphericalangle CXD$

$$\frac{XC}{XA} = \frac{XD}{XB} \Rightarrow \frac{XB}{XA} = \frac{XD}{XC}$$

$\Rightarrow$ tri $B\hat{X}A$ e $D\hat{X}C$ simili $\Rightarrow$ ho finito. ■

Es: Si può dim $OM \perp QR$ anche con le rotomotetie.

Dim:



M è il centro di una rotomotetia che manda A in B e C in D

oppure di una che manda A in D e B in C

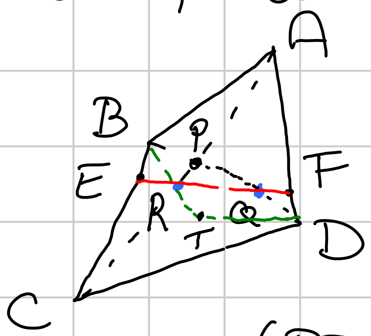
La rotomotetia che manda A in D e B in C, manda M_1 in M_2
$\Rightarrow M$ è il centro di una rotomotetia che manda A in M_1 e D in M_2

$\Rightarrow \Pi, \Pi_1, \Pi_2, Q$ conciclici. Inoltre $O\Pi_1\Pi_2 Q$ conciclici

$\Rightarrow O\,\Pi, \Pi_1, \Pi_2, Q$ conciclici

OQ è diametro $\Rightarrow O\hat{\Pi}Q = \frac{\pi}{2}$. ▨

IMO 2005 - 5 ABCD convesso, $BC = DA$ ma non parallele
E su BC, F su DA t.c. $BE = DF$.
$AC \cap BD = P$ $BD \cap EF = Q$, $EF \cap AC = R$
Dim che (PQR) passa per un punto fisso $\neq P$ al variare di E, F come detto.



Claim: Il punto fisso è T centro della rotomotetia che manda AC in BD

$T = (BPC) \cap (APD)$ e diverso da P

T è anche centro della rotomotetia che manda CB in AD

Voglio dim TPRQ ciclico

$\sphericalangle TAD = \sphericalangle TCB$
$\sphericalangle TDA = \sphericalangle TBC$

$BC = AD$
$\Downarrow$
(BPC) e (APD) sono congruenti
$\Rightarrow$ la rotomotetia che manda BC in AD è una rotazione!!

$TB = TD$
$TA = TC$

$BE = DF$

$\Rightarrow \overset{\triangle}{TBE} \cong \overset{\triangle}{TDF}$
$\Downarrow$
$TE = TF$
$\sphericalangle BTE = \sphericalangle DTF$

$\Rightarrow$ rotomotetia di centro T che manda D in F e B in E

$\Rightarrow T$ pt. di Miquel di DF, BE, EF, BD

$\Rightarrow B, T, Q, E$ concicli

$\Rightarrow T \in (BQE)$

$T \in (BPC)$

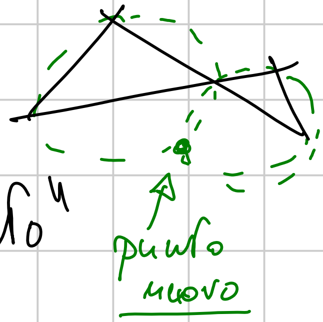
Considero le rette BP, PR, RE, EB

$BP \cap RE = Q$

$PR \cap EB = C$

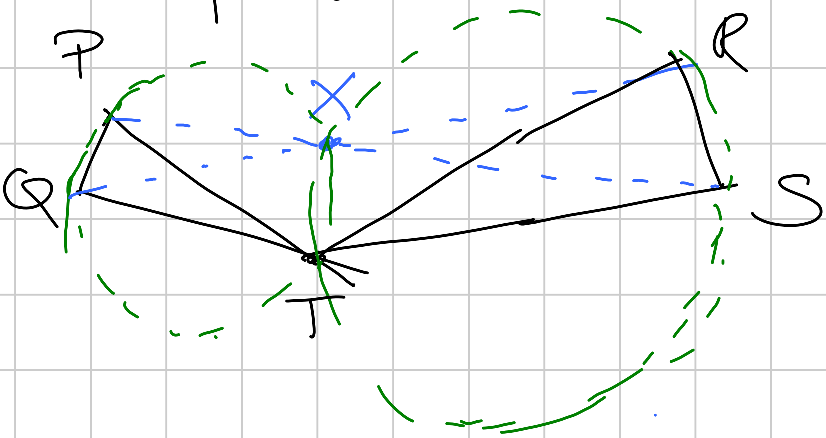
$\Rightarrow T$ pt di Miquel

$\Rightarrow T \in (PQR)$. ▨



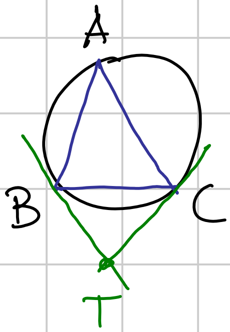
Idea 1: Usare Miquel / centro di SS per "produrre un nuovo punto"

Idea 2: Trovare "cose rotomotetiche" per dimostrare ciclicità



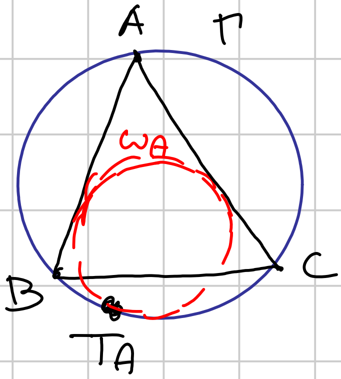
Inversione + simmetria

Es 1:



Dim che AT è simmediana

Es 2:



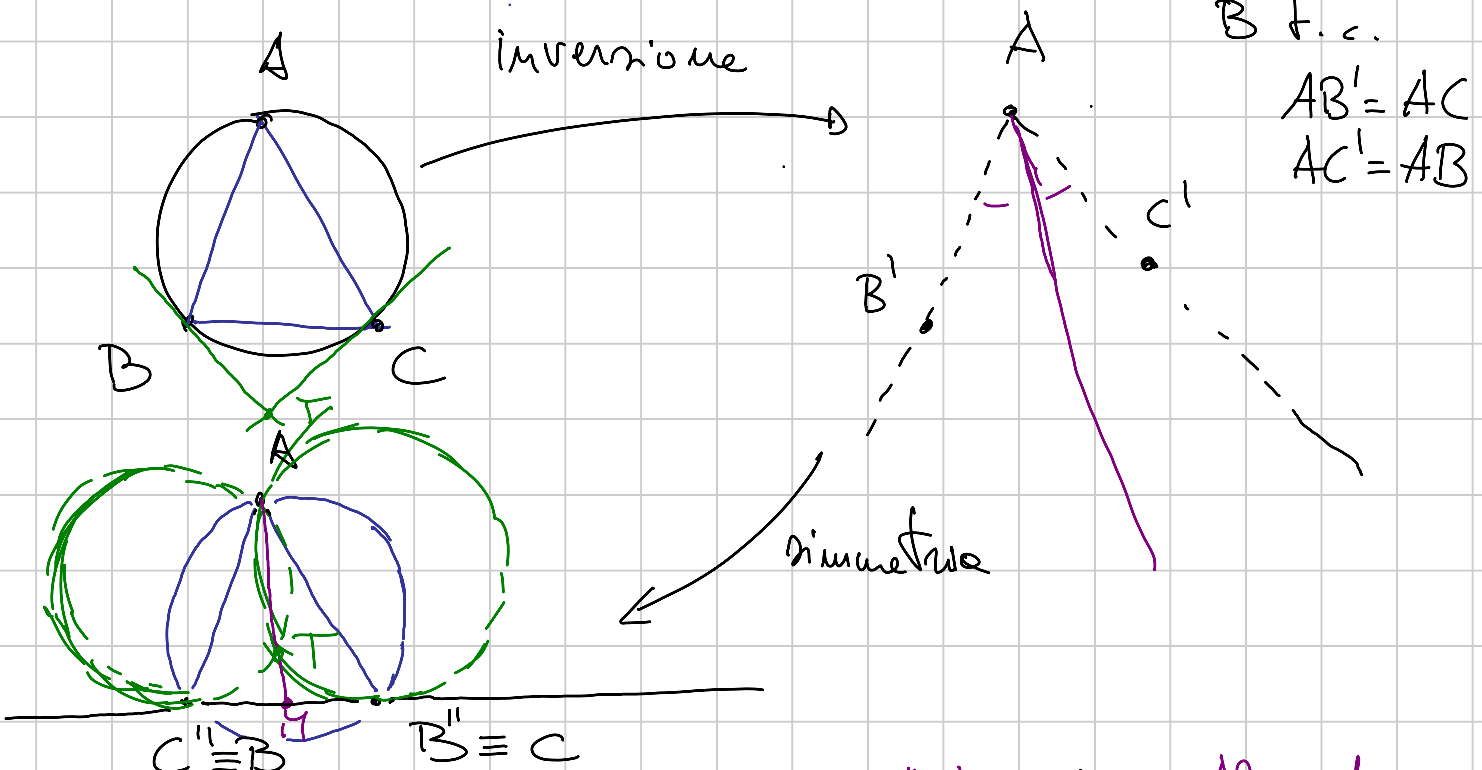
ω_A tangente a AC, AB, Γ (internamente)

ω_B, ω_C simili

$\Longrightarrow$ AT_A, BT_B, CT_C concorrono nel coniugato isogonale del punto di Nagel.

Tecnica: Inversione in A di raggio $\sqrt{AB\cdot AC}$ + simmetria rispetto alla bisettrice.

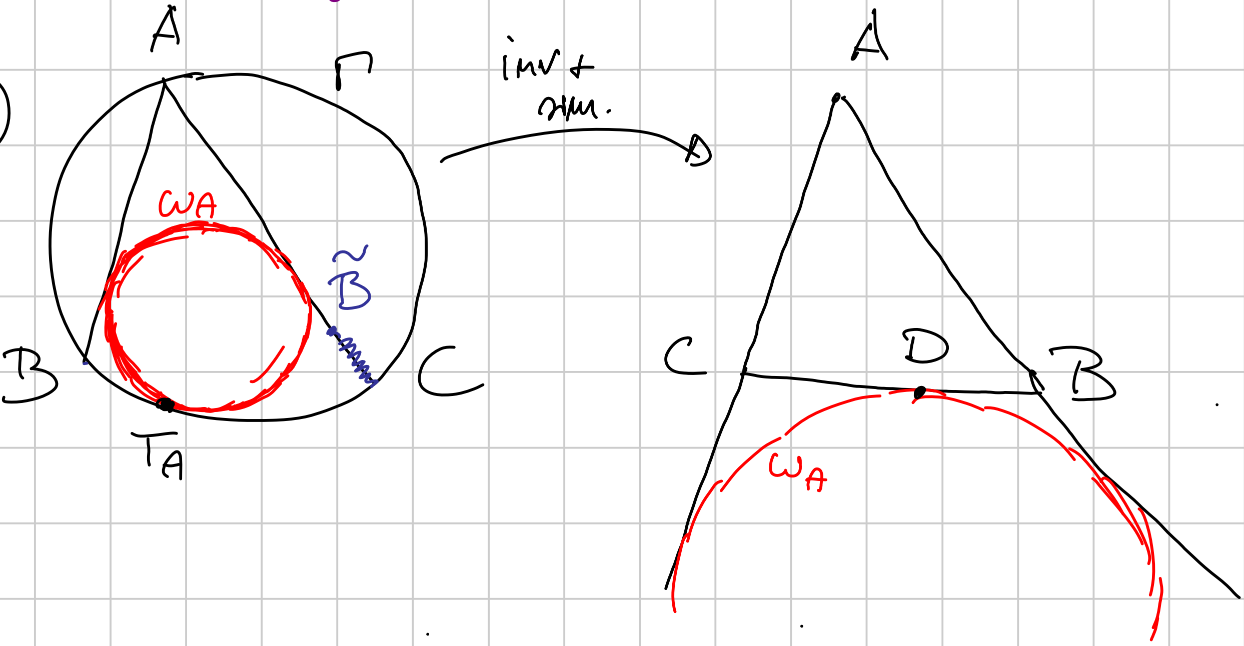
(1) Applico la trasformazione



AT'' asse radicale $\Rightarrow$ biseca $B''C'' = BC$ $\Rightarrow$ AM mediana

è l'immagine di AT $\Rightarrow$ sono simmetriche nella bisettrice.

(II)



$\Rightarrow AT_A$ è simmetrica di AD risp. alla bisettrice in A

$\Rightarrow AT_A, BT_B, CT_C$ si intersecano nel coniug. isog. del pt. di Nagel.

Oss: A = centro di simil. esterno tra ω (inscritta) e ω_A

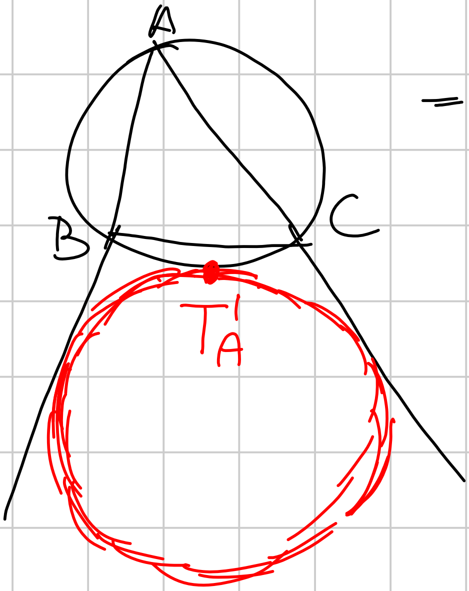
T_A = " " " esterno tra ω_A e Γ

$\Downarrow$

AT_A contiene il centro di simil. esterno tra ω e Γ

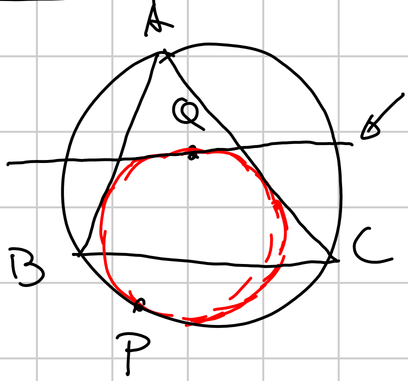
$\Rightarrow AT_A, BT_B, CT_C$ concorrono nel centro di simil. esterno tra ω e Γ.

Per casa:



$\Rightarrow AT'_A\ BT'_B\ CT'_C$ concorrono nel centro di simil interno tra ω e Γ, coniugato isogonale del punto di Gergonne.

EGMO 2013 - 5



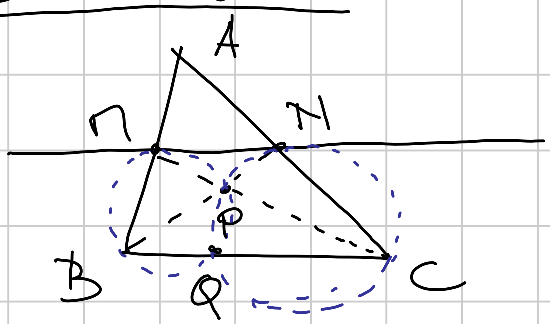
parallela a BC

$\Rightarrow B\hat{A}P = Q\hat{A}C$

Dim: AP è simm. di AD con D tangenza dell'exscritta opposta ad A,

Per omotetia in A, A, Q, D allineati.

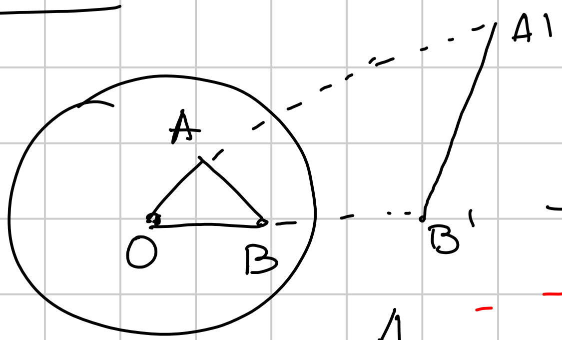
BMO 2009 - 2



$\Rightarrow B\hat{A}Q = C\hat{A}P$

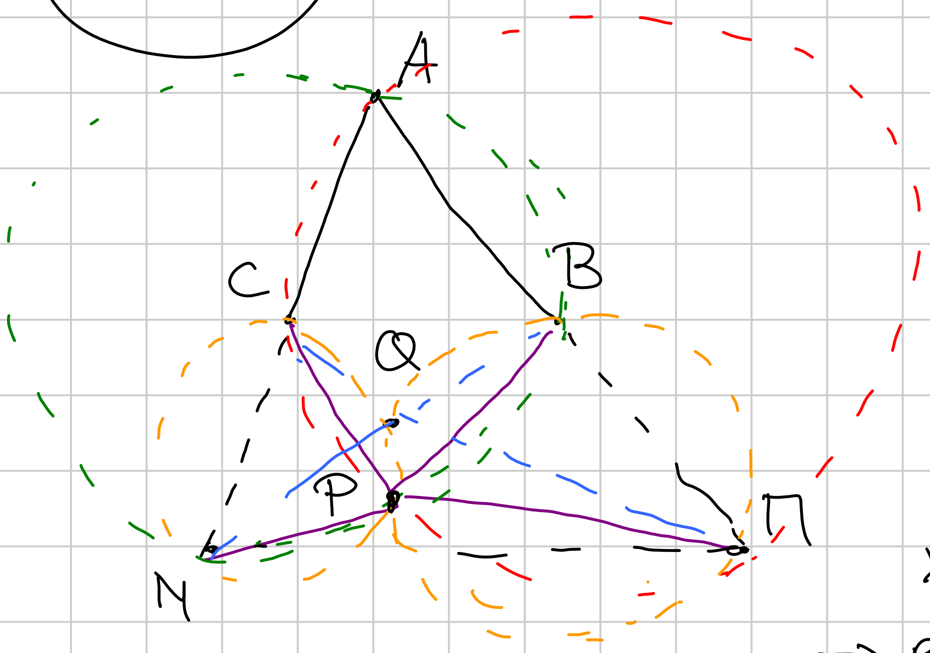
Sol 1: $Q \in (ABN)$
$Q \in (AMC)$ etc...

Sol 2: inv $\sqrt{bc}$ + simmetria



$OAB \sim OB'A'$

+ simmetria $\Rightarrow OAB \sim OA'B'$



P = seconda intersez tra (ABN) e (ACM)

$\Rightarrow$ è il pt di Miquel di BM, CN, BN, CM

$X = BN \cap CM$

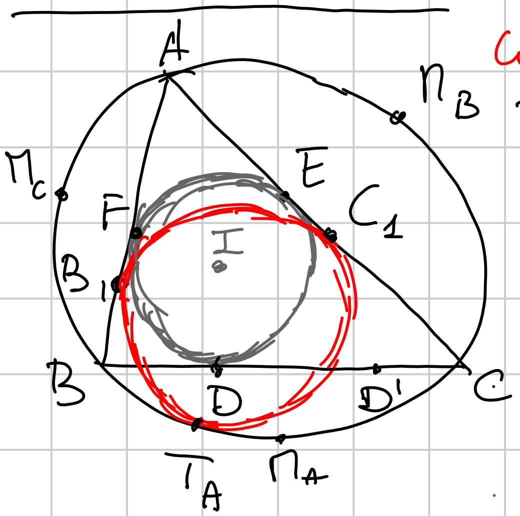
$\Rightarrow P \in (BXM)$
$P \in (CXN)$

$\Rightarrow X = (BPM) \cap (CPN)$ e non P

$\Rightarrow$ AP e AQ simmetriche.
(la config. finale e quella iniziale sono omotetiche)

Alternativa: AP è mediana (Ceva)
$\Rightarrow$ devo dim che AQ è simmediana

Roba Mistilineo



ω_A - incerchio mistilineo opposto A

Γ - circoscritto

ω - inscritto

I - incentro

AT_A, AD' simmetriche in AM_A

0) T_A, B_1, M_C allineati ✓

T_A, C_1, M_B allineati

1) B_1, I, C_1 sono allineati

$B_1 = AB \cap M_C T_A$

$C_1 = AC \cap M_B T_A$

$I = BM_B \cap CM_C$

Pascal su

$T_A M_B B A C M_C$ (inscritto in Γ)

$\Downarrow$

B_1, I, C_1 allineati.

2) $B_1 I = I C_1$ (AB_1C_1 isoscele $\Rightarrow$ bisettrice = mediana)

3) raggio di ω_A (mi basta calcolare AB_1)

inversione + simmetria manda B_1 nel punto in cui la A-exinscritta tocca AB (sia B_2)

AB_2 è noto

$$\Rightarrow \quad AB_1 = \frac{AB \cdot AC}{AB_2}$$

$$r_A = \frac{r}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}}$$

4) $T_A I$ biseca $\widehat{BT_AC}$ (per casa)

5) BC, B_1C_1, T_AM_A concorrono.

Pascal su $BCM_C T_A M_A A \Rightarrow BC \cap T_AM_A$, $\underset{\displaystyle I}{\underbrace{CM_C \cap M_AA}}$, $\underset{\displaystyle B_1}{\underbrace{M_CT_A \cap AB}}$

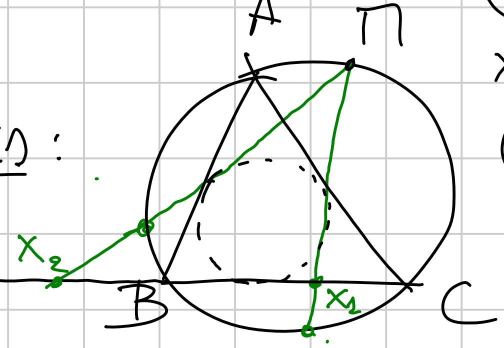
⇒ ok.

6) BB_1IT_A, CC_1IT_A ciclici

7) T_AA simmediana in $T_AB_1C_1$ ⇒ $T_AI \cap \Gamma = \{T_A, M_A\}$

M_A = diam. opposto a Π_A

Es:



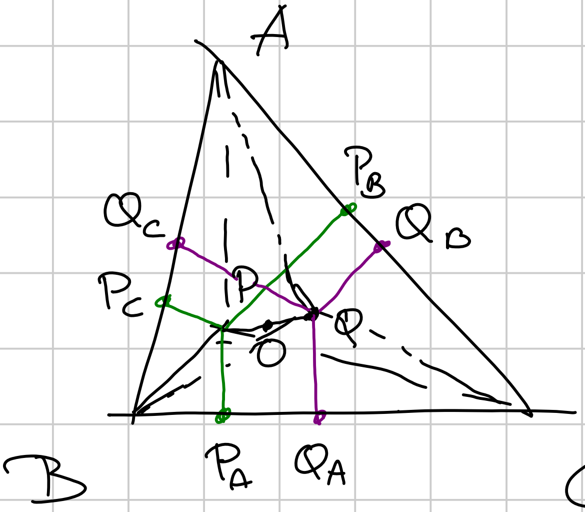
X_1, X_2 = intersez. delle tg da Π a ω con BC

$(\Pi X_1 X_2)$ incontra Γ in Π e T

⇒ T è T_A

(TST Taiwan 2014)

Extra: P, Q coniugati isogonali ⇒ i tri. pedali di P e Q hanno la stessa circoscritta.



dim

$$BP_C \cdot BQ_C = BP \cdot \cos P\hat{B}P_C \cdot BQ \cdot \cos Q\hat{B}Q_C = BP \cdot \cos Q\hat{B}Q_A \cdot BQ \cdot \cos P\hat{B}P_A = BP_A \cdot BQ_A$$

e così $P_AP_CQ_AQ_C$ conciclici.

Asse rad tra $(P_AP_CQ_AQ_C)$ e $(P_AP_BQ_AQ_B)$ è BC e gli altri due sono ~~AC~~ e BA. Assurdo, a meno che le 3 circonf. non coincidano.