Stage Senior 2018 N2 Medium

Titolo nota 06/09/2018

- Ballo

ARGOMENTI:

- VALUTAZIONI p-ADICHE E LTE;
- DISCESA INFINITA E VIÉTA JUMPING;
- APPROSSIMAZIONE DIOFANTEA ED EQUAZIONI DI PELL;
- (SE C'È TEMPO...) STIME.

VALUTAZIONI p-ADICHE

SE $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ESISTE UN UNICO MODO DI SCRIVERE n COME PRODOTTO DI PRIMI, A MENO DEL SEGNO:

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k} \cdot (-1)^{\delta} \qquad \delta \in \{0, 1\}$$

GLI p_i E α_i SONO UNIVOCAMENTE DETERMINATI.

LA $v_p(n)$ (VALUTAZIONE p-ADICA DI n) È L'ESPONENTE CON CUI p COMPARE NELLA FATTORIZZAZIONE DI n.

$v_{p_1}(n) = \alpha_1, \quad v_{p_2}(n) = \alpha_2, \ldots$

$v_3(18) = 2$ PERCHÉ $18 = 2 \cdot 3^2$.

COME CALCOLARE $v_p(n!)$?

$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$

1: QUANTI MULTIPLI DI p CI SONO TRA 1 ED n?

$$\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$$

2: QUANTI MULTIPLI DI p^2 CI SONO TRA 1 ED n?

$$\left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor$$

...

I MULTIPLI DI p CONTRIBUISCONO DI UN FATTORE 1.

I MULTIPLI DI p^2 CONTRIBUISCONO DI UN FATTORE 2.

$$\cancel{v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} i \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor}$$

No!

$p=2$ $\qquad n=5$ $\qquad v_2(120)=3$

$1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$

2^1 $\qquad 2 \qquad 4 \to 1,2$

2^2 $\qquad\qquad 4 \to 2,1$

$$\boxed{v_p(n!)=\sum_{i=1}^{+\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^i}\right\rfloor}$$ ✓

PERCHÉ QUANDO CONSIDERO I MULTIPLI DI p^2 (CHE VALGONO 2) LI HO GIÀ CONSIDERATI UNA VOLTA TRA I MULTIPLI DI p.

FACCIAMO UNA STIMA!

$$v_p(n!)< C_{p,n}$$

$$\sum_{i=1}^{+\infty}\left\lfloor \frac{n}{p^i}\right\rfloor < C_{p,n}$$

STIMA BRUTALE: $\lfloor x \rfloor \le x$ (PER DEFINIZIONE)

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \le \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n}{p^i} = n \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p^i}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p^i} = \frac{p}{p-1} \qquad \left(1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{p}}\right)$$

SPENDIAMOCI UNA PAROLA:

$$1 + x + x^2 + x^3 + \dots = L$$

$$xL = x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$L - xL = 1 \rightarrow L = \frac{1}{1-x}$$

IN REALTÀ CI SONO DEI PROBLEMI DI CONVERGENZA

SE $x = 2$

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots = \frac{1}{1-2} = -1 \quad ?????$$

PERÒ SE $-1 < x < 1$ TUTTO FILA LISCIO

$$n \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{p^i} = n \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p^i} \cdot p^{-1} \right) = \frac{n}{p-1}$$

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{p^i} \to \frac{p}{p-1}$$

ABBIAMO

$$v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{n}{p^i}$$

VA BENE IL $<$

PERCHÉ SE $p^i > n$: $\left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor = 0$

MA $\frac{n}{p^i} > 0$ E VISTO CHE DI $p^i > n$

NE HO (E NE HO PURE TANTI), POTEVAMO

METTERE IL $<$

$$v_p(n!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^i} \right\rfloor < \frac{n}{p-1}$$

ESERCIZIO PER CASA

TROVARE GLI n E I p t.c.

$$v_p(n!) = \frac{n-1}{p-1}$$

LTE

LIFTING THE EXPONENT

SIA n UN INTERO POSITIVO >1 E SIANO a E b INTERI TALI CHE $a > |b| > 0$. SIA p UN NUMERO PRIMO TALE CHE:

- $p \mid a-b$, $p \nmid a$, $p \nmid b$;
- SE $p = 2$, $4 \mid a-b$ (SE $p=2$, $k \geq 2$)

($a > 0$, MA b PUÒ ANCHE ESSERE NEGATIVO)

$\underline{\text{Th}}$. $v_p(a^n - b^n) = v_p(n) + v_p(a-b)$

$\underline{\text{DIM}}$.: CHIAMIAMO $\alpha = v_p(a-b)$

$a = b + K \cdot p^{\alpha}$ CON $(K,p) = 1$

(I.E. SE $p | K \to v_p(a-b) > \alpha$)

$v_p(a^n - b^n)$: $a^n - b^n =$

$(b + Kp^{\alpha})^n - b^n =$

$$\sum_{i=0}^{n} (Kp^{\alpha})^i \cdot b^{n-i} \cdot \binom{n}{i} \underbrace{- b^n}_{\text{LEVA } i=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (Kp^{\alpha})^i \cdot b^{n-i} \binom{n}{i} =$$

ISOLIAMO $i = n$ E $i = 1$

$$= (Kp^w)^n + \sum_{i=2}^{n-1} (Kp^w)^i \cdot b^{n-i} \cdot \binom{n}{i} +$$

$$Kp^w \cdot b^{n-1} \cdot n$$

$v_p > v_p$

$v_p(a) > v_p(b)$

$\rightarrow v_p(a+b) = v_p(b)$

GUARDIAMO LA v_p:

- $i = 1$: $v_p(\cancel{K} \cdot p^w \cdot \cancel{b^{n-1}} \cdot n) =$

$$w + v_p(n)$$

- $i = n$: $v_p((\cancel{K}p^w)^n) = nw$

CI VERREBBE DA DIRE CHE:

$$nw > w + v_p(n)$$

$$\Updownarrow$$

$$(n-1)w > v_p(n)$$

(SE USASSIMO SOLO $v_p(n) < n$, ALLORA CON $w = 1$ È $v_p(n) = n-1$ SAREMMO FREGATI)

$$\boxed{v_p(n) \leq \log_p n}$$

$$\log_p n = \log_p J + v_p(n)$$

$$n = J \cdot p^{v_p(n)}$$

VORREMMO:

$$(n-1)k > \log_p n$$

$$\Updownarrow$$

$$p^{(n-1)\cdot k} > n$$

- $p=2$: $\boxed{p^{(n-1)k} \geq 2^{(n-1)k}}$ $\quad \boxed{2^b \geq b+1}$

$$2^{(n-1)k} \overset{?}{>} n$$

$$(1+1)^b = 1+b+\cancel{\binom{b}{2}+\dots}$$

$$2^{(n-1)k} \geq 1+(n-1)k \overset{?}{>} n$$

$$\Updownarrow$$

$$k>1$$

(VEDI HP. 4 ($a-b$))

- $p \geq 3$: $p^{(n-1)k} \geq 3^{(n-1)k}$

$$3^{(n-1)k} \overset{?}{>} n$$

$$\text{IV}$$

$$3^{n-1} > n \quad \forall n \geq 2$$

n	3^{n-1}
2	3
3	9
4	27

...

QUINDI:

- $i=1$: $\quad v_p = k + v_p(n)$

$$\wedge$$

- $i=n$: $\quad v_p = kn$

- $2 \leq i \leq n-1$: $\quad v_p\left(\binom{n}{i} \cdot (\cancel{k} \cdot p^{k})^i \cdot \cancel{b^{n-i}}\right) =$

$$v_p(p^{ki}) + v_p\left(\binom{n}{i}\right) = ik + v_p\left(\binom{n}{i}\right)$$

COME STIMARE DAL BASSO $v_p\left(\binom{n}{i}\right)$?

IO VORREI DIMOSTRARE CHE:

$$ik + v_p\left(\binom{n}{i}\right) > k + v_p(n)$$

$$\binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!} \cdot \frac{1}{i!} \qquad 2 \leq i \leq n-1$$

$$v_p\left(\frac{n!}{(n-i)!}\right) = v_p(n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-i+1))$$

$$\geq v_p(n)$$

$$v_p\left(\frac{n!}{(n-i)!}\right) \geq v_p(n)$$

$$v_p\left(\frac{1}{i!}\right) > TOT$$

$$\Updownarrow$$

$$v_p(i!) < TOT_2$$

MA CE L'ABBIAMO!

$$v_p(i!) < \frac{i}{p-1}$$

$$v_p\left(\binom{n}{i}\right) = v_p\left(\frac{n!}{(n-i)!}\right) + v_p\left(\frac{1}{i!}\right) =$$

$$= v_p\left(\frac{n!}{(n-i)!}\right) - v_p(i!) > v_p(n) - \frac{i}{p-1}$$

☆ È IMPLICATA DA:

$$i\omega + v_p\left(\binom{n}{i}\right) > i\omega + \cancel{v_p(n)} - \frac{i}{p-1} \overset{?}{\geq} \omega + \cancel{v_p(n)}$$

CI RESTA:

$$\omega(i-1) \geq \frac{i}{p-1}$$

$$\alpha(p-1)(i-1) \geq i \qquad \forall\, n-1 \geq i \geq 2$$

$$\Updownarrow$$

$$\alpha(p-1) \geq \frac{i}{i-1}$$

- $2 \geq \frac{i}{i-1}$ PERCHÉ $i \geq 2$
- $\alpha(p-1) \geq 2$
  - $p = 2 \rightarrow \alpha \geq 2$ (CFR. $4 \mid a-b$)
  - $p \geq 3$ ✓

$$v_p(a^n - b^n) = v_p(\ \ ) = v_p = \alpha + v_p(n)$$

$$= v_p(a-b) + v_p(n)$$

$\square$

LEMMA DEL GUADAGNO DI UN PRIMO

SIA a, b INTERI COPRIMI T.C.
$a > |b| > 0$ E n UN INTERO POSITIVO DISPARI > 1

$\exists\, p$ PRIMO T.C. $p \mid a^n - b^n$ MA $p \nmid a - b$

(A PARTE UN'ECCEZIONE...)

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ n = 3 \\ a - b = 3 \\ a^3 - b^3 = 9 \end{cases}$$

SUPPONIAMO PER ASSURDO CHE $\forall p$ T.C.
$p \mid a^n - b^n \rightarrow p \mid a - b$

- $p = 2$: a E b SONO ENTRAMBI DISPARI

$$v_2(a^n - b^n) = v_2(a - b)$$

$$\underbrace{\frac{a^n - b^n}{a - b}}_{\text{DISPARI}} = \overbrace{a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 + \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}}^{n \text{ ADDENDI DISPARI}}$$

$\rightarrow$ DISPARI

- $p \geq 3$: $\quad \nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(n) + \nu_p(a-b)$

$| a^n - b^n$

QUINDI $\forall p$ ABBIAMO:

$$\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(n) + \nu_p(a-b)$$

- $p \mid a-b$, $p \nmid a^n - b^n$ IMPOSSIBILE PERCHÉ $a-b \mid a^n - b^n$
- $p \mid a-b$, $p \mid a^n - b^n$ VERO PER LTE E PER $p=2$ VERO PER
- $p \nmid a-b$, $p \mid a^n - b^n$ È LA TESI (QUINDI CONTRO L'IPOTESI DI ASSURDO)

PER OGNI $p \mid a^n - b^n$ ABBIAMO

$$\nu_p(a^n - b^n) = \nu_p(n) + \nu_p(a-b) = \\ = \nu_p(n(a-b))$$

VORREMMO $a^n - b^n = n(a-b)$, MA NON È DETTO! PERCHÉ POTREBBE ESISTERE q PRIMO t.c. $q \mid a-b$, $q \nmid a^n - b^n$ ma $q \mid n$. È PER QUESTO CHE HO SALTATO • $p \nmid a-b$, $p \nmid a^n - b^n$

(I.E.: $a=2, b=1, n=3,$
$a^3 - b^3 = 7$, $a-b=1$ MA $v_3(7) \neq v_3(3) + v_3(1)$)

SE HO x, y t.c. $\forall p \mid x$

$v_p(x) \leq v_p(y) \longleftrightarrow x \mid y$

$$a^n - b^n \mid n(a-b)$$

$$\downarrow$$

$$a^n - b^n \leq n(a-b)$$

$$\downarrow$$

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} \leq n \qquad n = 2k+1, \quad k \geq 1$$

$$\frac{a^{2k+1} - b^{2k+1}}{a-b} \overset{?}{\leq} 2k+1$$

$$a^{2k} + a^{2k-1}b + \dots + ab^{2k-1} + b^{2k} \overset{?}{\leq} 2k+1$$

(COSA VORREMMO FARE:

$a^{2k} \geq 1$, $\cancel{a^{2k-1}b \geq 1}$, ..., $b^{2k} \geq 1$ HO $2k+1$

TERMINI, QUINDI DEVONO ESSERE TUTTI 1)

b PUÒ ESSERE NEGATIVO!

$$(a+b) \cdot a \cdot (\underbrace{a^{2k-2}}_{\geq 1} + \underbrace{a^{2k-4}b^2}_{\geq 1} + \dots + \underbrace{a^2 b^{2k-4}}_{\geq 1} + \underbrace{b^{2k-2}}_{\geq 1}) + b^{2k} \overset{?}{\leq} 2k+1$$

$b^{2k} \geq 1$

$(a+b) \geq 1$

$a \geq 2$

$a^{2k-2} + \dots + b^{2k-2} \geq k$

DEVONO ESSERE UGUAGLIANZE

$$2k+1 \geq \underbrace{(a+b)}_{\geq 1} \cdot \underbrace{a}_{\geq 2} \underbrace{(a^{2k} + \dots + b^{2k})}_{\geq k} + \underbrace{b^{2k}}_{\geq 1} \geq 2k+1$$

$a = 2$

$a + b = 1$

$\to a = 2, b = -1$

$$2^{2k-2} + \dots + 1 = k$$

$$\sum_{i=0}^{K-1} 4^i = K \;\longrightarrow\; 4+1+\sum_{i=2}^{K-1} 4^i \;\to\; \geq K+3$$

$$\sum_{i=2}^{K-1} 4^i \geq K-2 \quad \text{SE } K \geq 2$$

$K=1 \to n = 2K+1 = 3$

$$(2,-1,3)$$

$2-(-1)=3 \qquad 2^3-(-1)^3=9 \quad \checkmark$

ECCEZIONE!

ESERCIZIO

ESISTONO INFINITI INTERI POSITIVI n t.c.

$$n^2 \mid 3^n + 2^n$$

$n=1$ FUNZIONA $\quad 1^2 \mid 3^1+2^1=5$

$n=5$ FUNZIONA $\quad 5^2 \mid 3^5+2^5 = 275 = 11 \cdot 5^2$

PROVIAMO $n=275$ $\quad$ LTE: $a=3$, $b=-2$

$$v_5\left(3^{275}+2^{275}\right) = v_5(3+2) + v_5(275) = 3$$

MA $v_5(275^2) = 4$!

$$v_{11}\left(3^{275}+2^{275}\right) = v_{11}\left((3^5)^{55}-(-2^5)^{55}\right) =$$

$a = 3^5 \quad b = -2^5$

$n = 55$

$$= v_{11}\left(3^5+2^5\right) + v_{11}(55) = 2$$

VEDIAMO CON $n=55$:

$v_5(55^2) = 2$

$v_{11}(55^2) = 2$

$$v_5\left(2^{55}+3^{55}\right) = v_5(5) + v_5(55) = 2 \quad \checkmark$$

$$v_{11}\left(3^{55}+2^{55}\right) = v_{11}\left(3^5+2^5\right) + v_{11}(11) = 2 \quad \checkmark$$

$n = 1 \quad \rightarrow \quad 2^1 + 3^1 = 5$

$n = 5 \quad \rightarrow \quad 2^5 + 3^5 = 5^2 \cdot 11$

$n = 5 \cdot 11 \quad \rightarrow \quad 2^{55} + 3^{55} = \dots$ BOH

COSTRUIAMO UNA SUCCESSIONE $(a_n)_{n\geq 0}$ DI INTERI POSITIVI T.C. $a_0 = 1$ E DI NUMERI PRIMI $(p_n)_{n\geq 1}$ T.C.:

- $a_n^2 \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$;
- $p_n \mid 3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}}$;
- $a_n = p_n \cdot a_{n-1}$;
- VORREMMO $p_n \nmid a_{n-1}$;

$\left(a_n \mid 3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}} \right)$ CONDIZIONE PIÙ FORTE

PASSO BASE: $\underset{n=0}{1^2 \mid 3^1 + 2^1}$, $\underset{n=1}{5^2 \mid 3^5 + 2^5}$

PASSO INDUTTIVO: ABBIAMO LA SEQUENZA CHE RISPETTA LE IPOTESI FINO A n

$a_0, \dots, a_n$ E $p_1, \dots, p_n$

VOGLIAMO p_{n+1} CHE:

1 — $p_{n+1} \nmid a_n$;

2 — $p_{n+1} \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$;

— $a_{n+1} = p_{n+1} \cdot a_n$ (DEFINIZIONE DI a_{n+1});

3 — $a_{n+1}^2 \mid 3^{a_{n+1}} + 2^{a_{n+1}}$.

LA 1 E LA 2 CI DEFINISCONO p_{n+1} (SE ESISTE)

IO VOGLIO UN PRIMO CHE DIVIDA $3^{a_n} + 2^{a_n}$, MA NON DIVIDA a_n.

VORREMO CHE $a_n \mid 3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}}$.

SE $a_n \mid 3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}}$, HO AUTOMATICAMENTE UN PRIMO $p_{n+1} \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$ MA NON $3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}}$ (LEMMA DEL GUADAGNO DI UN PRIMO, POICHÉ $a_{n-1} \mid a_n$, $a_{n-1} < a_n$) E

QUINDI $p_{n+1} \nmid a_n \mid 3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}}$

LE NOSTRE IPOTESI SONO:

1 - $a_{n+1} = p_{n+1} a_n$;

2 - $a_{n+1}^2 \mid 3^{a_{n+1}} + 2^{a_{n+1}}$;

3 - $a_{n+1} \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$;

4 - $p_{n+1} \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$;

5 - $p_{n+1} \nmid 3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}}$. (PER IP. INDUTTIVA) $\longrightarrow p_{n+1} \nmid a_n$

LA SEQUENZA ESISTE FINO AD a_n E p_n.

SCELGO $p_{n+1} \nmid 3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}}$ (5) MA DIVIDA $3^{a_n} + 2^{a_n}$ (4) PER IL LEMMA PREC

GUADAGNO DI UN PRIMO E PONGO

$a_{n+1} = p_{n+1} a_n$. (1)

RESTANO (2) E (3):

$a_{n+1} \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$

$\Updownarrow$

POICHÉ $p_{n+1} \nmid a_n$:

$a_n \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$ E $p_{n+1} \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$ ✓ (3) ✓

PERCHÉ $a_n \mid 3^{a_{n-1}} + 2^{a_{n-1}} \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$

$$a_{n+1}^2 \mid 3^{a_{n+1}} + 2^{a_{n+1}}$$

② √

$$\Updownarrow$$

$$a_n^2 \mid 3^{a_{n+1}} + 2^{a_{n+1}}$$ VERO PERCHÉ $$a_n^2 \mid 3^{a_n} + 2^{a_n} \mid 3^{a_{n+1}} + 2^{a_{n+1}}$$

E

$$p_{n+1}^2 \mid 3^{a_{n+1}} + 2^{a_{n+1}}$$

$$v_{p_{n+1}}\left(3^{a_{n+1}} + 2^{a_{n+1}}\right) = \underbrace{v_{p_{n+1}}\left(3^{a_n} + 2^{a_n}\right)}_{\geq 1} + \underbrace{v_{p_{n+1}}(p_{n+1})}_{=1}$$

PERCHÉ $p_{n+1} \mid 3^{a_n} + 2^{a_n}$

DISCESA INFINITA

O, VOLGARMENTE, IL PRINCIPIO DEL MINIMO.

RISOLVERE NEGLI INTERI

$$x^3 + 3y^3 = 9z^3$$

i) $3 \mid x \to x = 3\tilde{x}$

$$27\tilde{x}^3 + 3y^3 = 9z^3$$

$$\downarrow$$

$$9\tilde{x}^3 + y^3 = 3z^3$$

ii) $3 \mid y \to y = 3\tilde{y}$

$$9\tilde{x}^3 + 27\tilde{y}^3 = 3z^3$$

$$\downarrow$$

$$3\tilde{x}^3 + 9\tilde{y}^3 = z^3$$

iii) $3 \mid z \to z = 3\tilde{z}$

$$3\tilde{x}^3 + 9\tilde{y}^3 = 27\tilde{z}^3$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{x}^3 + 3\tilde{y}^3 = 9\tilde{z}^3$$

CON

$x = 3\tilde{x}$

$y = 3\tilde{y}$

$z = 3\tilde{z}$

QUALSIASI TERNA PUÒ ESSERE DIVISA PER 3 INFINITE VOLTE. L'UNICA SOLUZIONE È $(0,0,0)$.

USANDO IL PRINCIPIO DEL MINIMO: SIA (a,b,c) UNA SOLUZIONE TALE $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ E $a^2+b^2+c^2$ MINIMO (PRINCIPIO DEL MINIMO: OGNI SOTTOINSIEME DI $\mathbb{N}$ HA UN MINIMO).

(a,b,c) SOLUZIONE $\Rightarrow$ $(\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c})$ SOLUZIONE

CON $\tilde{a}^2+\tilde{b}^2+\tilde{c}^2=\frac{1}{9}(a^2+b^2+c^2)<a^2+b^2+c^2$

SE $a^2+b^2+c^2\neq 0$

VIÉTA JUMPING

PROBLEM

DETERMINARE I POSSIBILI VALORI INTERI DI

$$\frac{a^2+b^2+1}{ab}$$

CON a,b INTERI POSITIVI

SOLUZIONE

(a, b, k) LE TERNE DI INTERI POSITIVI t.c.

$$a^2+b^2+1=kab$$

$$a^2-(kb)a+b^2+1$$

$$p(x) = x^2-kbx+b^2+1$$

RADICI: x_1, x_2 t.c.

$$x_1+x_2=kb$$

$$x_1 \cdot x_2 = b^2+1$$

a È GIÀ UNA RADICE DI $p(x)$

(x_1, b, k) È SOLUZIONE $\downarrow$ (x_2, b, k) È SOLUZIONE

$x_1=a$ $\downarrow$ $x_2=kb-a$

INTERO!!!!!

(a, b, k) SOLUZIONE

$\downarrow$

$(bk-a, b, k)$ SOLUZIONE

(a, b, k) SOLUZIONE $\rightarrow$ (b, a, k) SOLUZIONE

$a > b$: (a, b, k) SOLUZIONE $\quad \dfrac{a^2+b^2+1}{ab} = k$

$(bk-a, b, k)$ SOLUZIONE: LO È PER COME ABBIAMO SCELTO $bk-a$

(SE NON VI FIDATE, FATE IL CONTO)

$$\boxed{\underset{>0}{a}\,(\underset{\geq 0}{bk-a}) = \underset{>0}{b^2+1}}$$

- $bk - a > 0$:

$$\cancel{b} \cdot \frac{a^2+b^2+1}{a\cancel{b}} - a > 0$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2 + 1 > 0 \quad \checkmark$$

- $bk - a < b$: ω

$$\cancel{b} \cdot \frac{a^2+b^2+1}{a\cancel{b}} < a + b$$

$$\Updownarrow$$

$$a^2 + b^2 + 1 < a^2 + ab$$

$$\Updownarrow$$

$$b^2 + 1 < ab$$

$$\Updownarrow$$

$$1 \times (a-b) \cdot b \qquad a > b > 0$$

$$\Updownarrow$$

(2A NEGAZIONE DI $a=2, b=1$) $\quad b \neq 1 \lor a > b+1$

$(a, b, k) \qquad a > b > 0$

$$\downarrow$$

$(b, bk-a, k) \qquad b > bk - a > 0$

A MENO CHE $a=2, b=1$.

CASI RESTANTI:

$\star_1$ $a=b$: $\quad \dfrac{a^2+b^2+1}{ab} = \dfrac{2a^2+1}{a^2} \rightarrow a=1,\ b=1,\ k=3$

$$\dfrac{2a^2+1}{a^2} = 2 + \dfrac{1}{a^2}$$

$\star_2$ $b=1$: $\quad \dfrac{a^2+2}{a} = a + \dfrac{2}{a} \rightarrow a=1,\ b=1,\ k=3 \qquad a=2,\ b=1,\ k=3$

VOGLIAMO TROVARE TUTTI I VALORI DI k.

SUPPONIAMO CHE (a, b, k) SIA SOLUZIONE.

SE $a=b \to K=3$. ☆$_1$

SE $a \neq b$, POICHÉ (a,b,K) SOL. $\to (b,a,K)$ SOL.

SUPPONIAMO $a>b$.

FISSATO UN CERTO K, SIA $(\tilde{a},\tilde{b},K)$ LA SOLUZIONE CON $\tilde{a}>\tilde{b}>0$ CON $\tilde{a}+\tilde{b}$ MINIMO.

DAL RAGIONAMENTO DI PRIMA:

- $\tilde{b}=1 \to K=3$ ☆$_2$
- $\tilde{b}>1 \to (\tilde{b}, K\tilde{b}-\tilde{a}, K)$ È SOLUZIONE

CON $\tilde{b} > K\tilde{b}-\tilde{a}>0$ E CON

$$\tilde{b}+(K\tilde{b}-\tilde{a})<\tilde{a}+\tilde{b}$$

PERCHÉ $\tilde{b}<\tilde{a}$, $K\tilde{b}-\tilde{a}<\tilde{b}$ PER QUANTO VISTO PRIMA.

QUINDI $(\tilde{a},\tilde{b},K)$ <u>NON</u> ERA LA SOLUZIONE CON $\tilde{a}+\tilde{b}$ MINIMALE.

PERCIÒ $K=3$ SEMPRE.

I.E.: $(a,b)=1$ FUNZIONA

$$(a_n, a_{n-1}, 3) \qquad a_n > a_{n-1} > 0$$

$$\downarrow$$

$$(a_{n-1}, \overbrace{3a_{n-1} - a_n}^{a_{n-2}}, 3)$$

$$\downarrow$$

$$(a_{n-2}, \overbrace{3a_{n-2} - a_{n-1}}^{a_{n-3}}, 3)$$

$$\downarrow \ldots$$

$$\downarrow$$

$$(a_1, \underbrace{a_0}_{1}, 3)$$

$$\downarrow$$

2 o 1

(*) CI DICE CHE (a, b, k) NON PRODUCE $(b, kb-a, k)$ CON $b = kb - a$ A MENO CHE $b=1$; QUINDI PRIMA SI ARRIVA A 1.

$$a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 \rightarrow a_2 = 2 \rightarrow a_3 = 5$$

$$a_0 = 1 \qquad a_1 = 2 \rightarrow a_2 = 5$$

IN REALTÀ È UNA SOLA SHIFTATA

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 1, \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n$$

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \to x_1, x_2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = \left(\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right)^2 = (\varphi_1, \varphi_2)^2$$

MORALE DELLA FAVOLA! LE SOLUZIONI SONO TUTTE E SOLO DELLA FORMA

$(F_{2n+1}, F_{2n-1}, 3)$ CON $n \in \mathbb{N}$

E F_i L'i-ESIMO NUMERO DI FIBONACCI.

PELL IN PILLS

LE EQUAZIONI DI PELL SONO EQUAZIONI DEL TIPO

$$x^2 - dy^2 = 1$$

CON d FISSATO E NON UN QUADRATO.

(SE $d = t^2 \to x^2 - t^2y^2 = 1 \Rightarrow$

$(x - ty)(x + ty) = 1 \to \begin{matrix} x = 1, y = 0 \\ x = -1, y = 0 \end{matrix}$)

IN GENERALE $x^2 - dy^2 = 1$ SE $d \neq \square$

HA INFINITE SOLUZIONI.

LEMMA DI DIRICHLET

SIA $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ IRRAZIONALE > 0. ALLORA ESISTONO INFINITI INTERI POSITIVI COPRIMI (p, q) t.c.

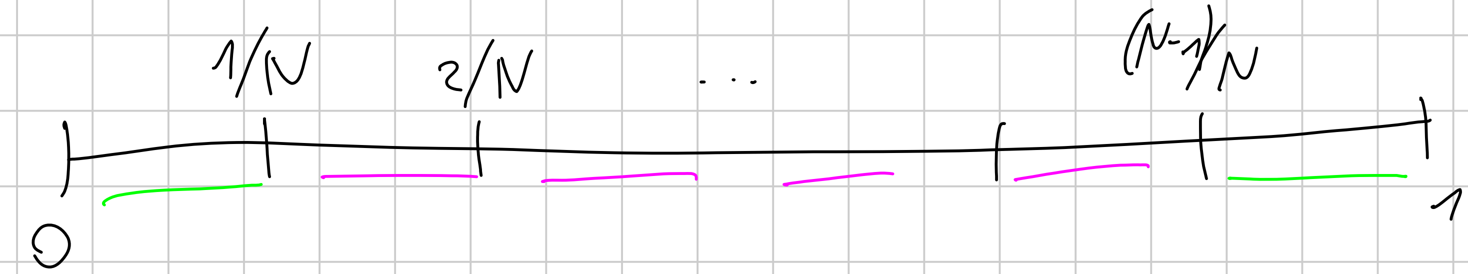
$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

(È UN $\Leftrightarrow$: SE α È RAZIONALE NE ESISTONO UN NUMERO FINITO).

FISSIAMO UN INTERO POSITIVO N E PRENDIAMO I NUMERI $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \dots, N\alpha$. PRENDIAMO LE LORO PARTI FRAZIONARIE.

$(\{\pi\} = 0{,}14\dots)$

LE N PARTI FRAZIONARIE $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{N\alpha\}$
SONO IN $(0,1)$



DUE POSSIBILITÀ:

- SE $\exists\, m \le N$ t.c. $\{m\alpha\} \in (0, 1/N)$ o $\in ((N-1)/N, 1) \rightarrow \exists\, n$ t.c.
$$|m\alpha - n| < \frac{1}{N}$$
- SE $\nexists\, m \le N$ CON QUELLA PROPRIETÀ, HO N NUMERI $(\{\alpha\}, \dots, \{N\alpha\})$ DISTRIBUITI IN N-2 INTERVALLI $\left(\left(\frac{1}{N}, \frac{2}{N}\right), \left(\frac{2}{N}, \frac{3}{N}\right), \dots, \left(\frac{N-2}{N}, \frac{N-1}{N}\right)\right)$

PER PIGEON HOLE $\exists\, a < b \le N$ t.c.
$\{a\alpha\}, \{b\alpha\}$ STANNO NELLO STESSO INTERVALLO.

$$\rightarrow \left|\{b\alpha\} - \{a\alpha\}\right| < \frac{1}{N} \rightarrow$$

$$\Big|\underbrace{(b-a)}_{\text{INTERO POSITIVO}}\alpha - (\lfloor b\alpha \rfloor - \lfloor a\alpha \rfloor)\Big| < \frac{1}{N}$$

$\to \exists \overset{b-a}{\underset{||}{c}} \leq N$ d intero t.c. $|ca-d| < \frac{1}{N}$

Unendo i due punti:

$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $N > 0$, esistono m, n con $m \leq N$ t.c.

$$|m\alpha - n| < \frac{1}{N}$$

- Divido per m: $\left|\alpha - \frac{n}{m}\right| < \frac{1}{Nm} \leq \frac{1}{m^2}$ ✓ Una soluzione

- Per averne infinite, suppongo esistano un numero finito di p_i, q_i funzionanti e prendo N t.c. $\frac{1}{N} < \min |\alpha p_i - q_i|$

Sto facendo il minimo di un # finito di cose > 0 (α è irrazionale)

$\exists\, n, m$ t.c.

$$|m\alpha - n| < \frac{1}{N} < \min |\alpha p_i - q_i|$$

Anche m, n sono funzionanti: Assurdo! $\square$

$x^2 - dy^2 = 1$

APPLICHIAMO IL LEMMA DI DIRICHLET
A $\sqrt{d}$

$\exists \infty$ p, q COPRIMI t.c.

$$\boxed{\left|\sqrt{d} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^2}}$$

$\cdot q$

$$(p - \sqrt{d} \cdot q)(p + \sqrt{d} \cdot q) = p^2 - d \cdot q^2$$

$$|\quad| < \frac{1}{q} \qquad < \frac{1}{q} + 2\sqrt{d} \cdot q$$

$$p + q\sqrt{d} = (p - q\sqrt{d}) + 2q\sqrt{d} < \frac{1}{q} + 2q\sqrt{d}$$

$\exists \infty$ p, q COPRIMI t.c.

$$|p^2 - q^2 d| < \frac{1}{q}\left(\frac{1}{q} + 2q\sqrt{d}\right) < 2\sqrt{d} + 1$$

$\forall d \neq \square \to \exists \infty$ p, q t.c. $|p^2 - dq^2| < 2\sqrt{d} + 1$