P - MEDIUM

Titolo nota 02/09/2018

kuzminkirill.math@gmail.com

kirill

In un grafo ad albero

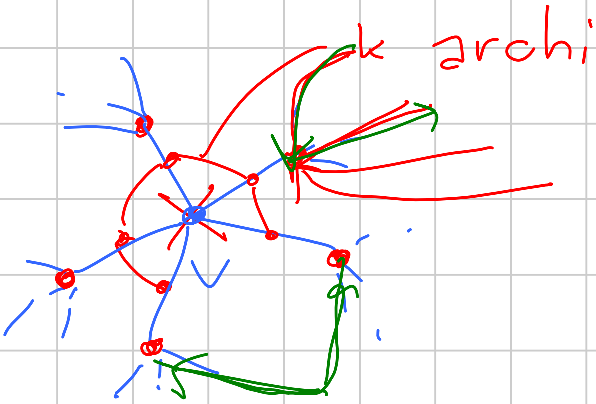
$$V = e + 1$$

edges

"numero di vertici": quantità su cui indurre

No: partire da struttura piccola ed "accrescere".

Sì: partire dal caso "grande" che volete dimostrare, togliere per ricondursi al caso minore per il quale vale l'ipotesi induttiva



No cicli: ok

connessi: ok

disgiunti: ok

k sottografi: sono alberi

Loro: k vertici in più rispetto agli archi

Inoltre avevo: k archi + 1 vertice tolto

Alla fine: 1 vertice in più rispetto agli archi

Sylvester - Gallai

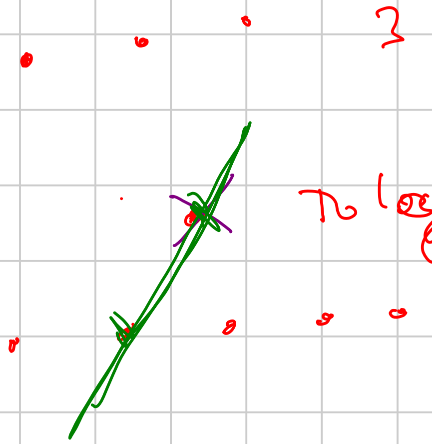
Insieme finito con almeno 3 punti nel piano tale che:

Ogni retta passante per due dei punti passa per il terzo *

Allora sono allineati

Dimostrazione ERRATA:

3 pti: ok



Tolgo un punto cattivo

altri allineati per ip induttiva

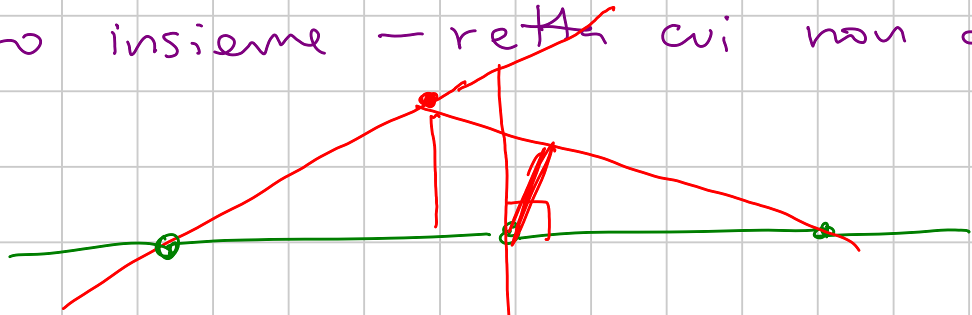
ERRORE * vale per tutti i punti e non è detto che valga per i sottoinsiemi

---

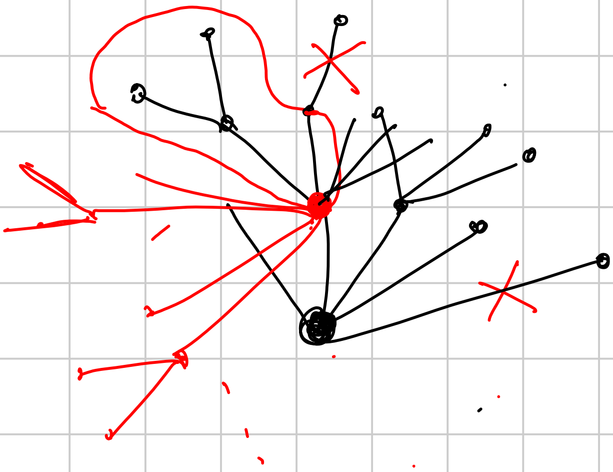
Idea giusta

Prendo le (finite) rette passanti per coppie di punti dell'insieme

Prendo il minimo delle distanze p.to insieme – retta cui non appartiene



Trovate una distanza più piccola; assurdo



Dimostrare che Ercole riesce a battere l'idra in un numero finito di passi;

Sia A un insieme <u>totalmente</u> ordinato

A si dice ben ordinato

se ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo

$(\mathbb{N}, <)$ è ben ordinato

$(\mathbb{N}, <)$	Insiemi ben ordinati "generici"

Ogni sottoinsieme non vuoto ha minimo

Discesa infinita (non esistono successioni infinite strettamente decrescenti)

Se $P(0)$ e $\forall n$ riuscite, usando come ipotesi $\forall i<n\ P(i)$, a dimostrare $P(n)$, allora P vale per ogni naturale	Se $P(\min A)$ e $\forall a \in A$ riuscite, usando come ipotesi $\forall b<a\ P(b)$, a dimostrare $P(a)$, allora P vale per ogni elemento di A
Induzione classica	Induzione transfinita (NON LA FAREMO)

Esempi: $(\mathbb{N}, <)$ ω

$n = \{0 < 1 < \dots < n-1\}$

$0 = \emptyset$

A e B ordinati sono isomorfi se $\exists f : A \to B$ biiezione tale che $a_1 < a_2$ se e solo se $f(a_1) < f(a_2)$

A e B insiemi ordinati

$A + B$ è $A \sqcup B$

unione disgiunta

Ogni elemento di A è più piccolo di ogni elemento di B

All'interno di A e B preserviamo l'ordine precedente

$A \cdot B$ $\qquad$ $A \times B$

(a_1, b_1) $\qquad$ (a_2, b_2)

se $b_1 < b_2$ allora $(a_1, b_1) < (a_2, b_2)$

se $b_1 > b_2$ —— $(a_1, b_1) > (a_2, b_2)$

se $b_1 = b_2$, confronto a_1 con a_2

„antilessicografico"

Associatività: SÌ

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

Commutatività: NO

Se partite da insiemi ben ordinati, ottenete insiemi ben ordinati

$(a_i, b_i)_{i \in I}$ elementi di $A \cdot B$

ben ordinati

Siccome B è ben ordinato, esiste b_0 minimo tra i possibili b_i

$(a_j, b_0)_{j \in J}$ Siccome A è ben ordinato, $\exists\, a_0$ minimo degli a_j

Quindi (a_0, b_0) è il minimo

$$1 + \omega \neq \omega + 1$$

$$\underbrace{\bullet}_{1} < \underbrace{\bullet < \bullet < \bullet < \bullet < \bullet < \dots}_{\omega}$$

$$1 + \omega = \omega$$

$$\underbrace{\bullet < \bullet < \bullet < \dots < \bullet <}_{\omega} < \underbrace{\boxed{\bullet}}_{1}$$

ha massimo (l'1)

e quindi non è ω

$$A + A = A \cdot 2 \qquad 2 = \{0 < 1\}$$

$$\underbrace{0 \quad 0 \quad 0 \quad 0}_{A} \;\Big|\; \underbrace{1 \quad 1 \quad 1 \quad 1}_{A}$$

$$(a, 0) < (a, 1) \qquad a \in A$$

$$(a, 0) < (b, 1)$$

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq 2 \cdot \omega$$

$$\underbrace{0 < 1 < 2 < \dots}_{\omega} \;\Big|\; \underbrace{0 < 1 < \dots}_{\omega}$$

$$\omega + \omega$$

$$2 \cdot \omega = \{(0, n), (1, m)\} = \omega$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$0,0 < 1,0 < 0,1 < 1,1 < 0,2 < 1,2 < 0,3 < 1,3$$

$$(0, n) \longmapsto 2n$$

$$(1, m) \longmapsto 2m + 1$$

$$\omega \cdot 2 = \omega + \omega \neq 2 \cdot \omega = \omega$$

0 ha infiniti elementi più piccoli di lui

qui gli elementi più piccoli di un fissato

$\omega \neq \omega + 1 \leftarrow$ ha max

$\neq$

$\omega + \omega \leftarrow$ non ha max

Sono sempre finiti

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots A}_{n \text{ volte}}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} \cdot \boxed{\frac{2n+1}{3}}$$

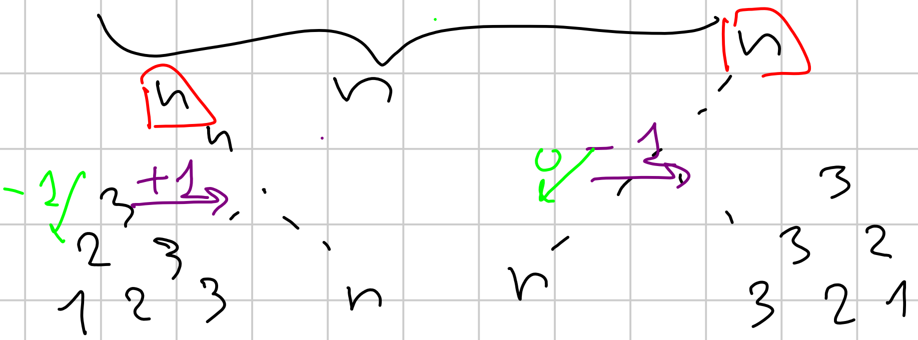
1

2 2

3 3 3

⋮

$\underbrace{n \; n \; \ldots \; n}_{n}$



(r, c) $\quad \boxed{c \le r \le n}$

con ordine lessicografico (confronto partendo da sx)

$\omega \cdot \omega$

Un sottoinsieme di un ben ordinato è ben ordinato

Vogliamo dimostrare, per induzione estesa, P che $\forall (r, c)$ la somma nel posto (r, c) è $2n+1$

$P(1,1)$ è vera $(1+n+n)$

(r,c). Se $c \geq 2$, andiamo a sx $(r, c-1)$

$$(r, c-1) < (r, c)$$

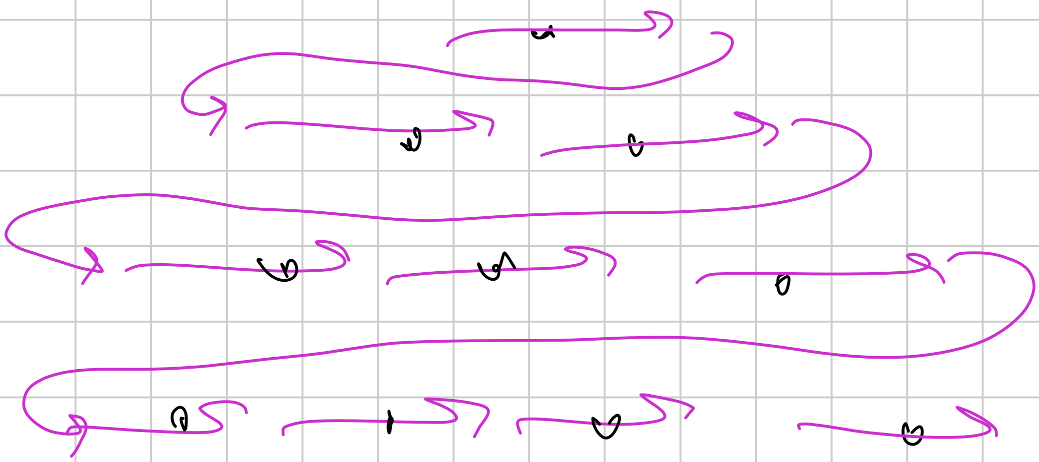
Per ipotesi induttiva, nel posto $(r, c-1)$ la somma è $2n+1$

La variazione della somma passando da $(r, c-1)$ a (r,c) è $0+1-1=0$

Se $c=1$ $\quad (r,1) > (r-1,1)$

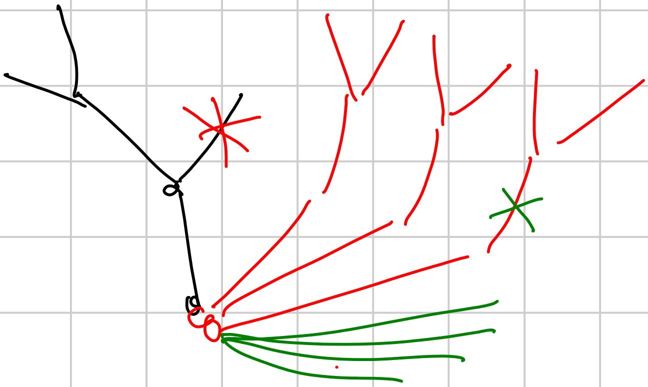
Si conclude analogamente

In realtà questo insieme era $\frac{n(n+1)}{2}$



Idea per l'idra: usare la discesa infinita

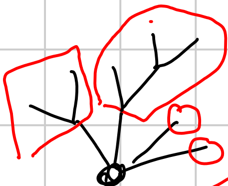
Cosa ci serve: un ordine totale su tutte le possibili idre che sia un buon ordine e tale che un'azione di taglio + ricrescita produca un'idra strettamente più piccola



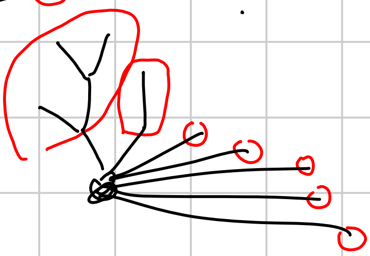
Proviamo a Definire l'ordine per ricorsione

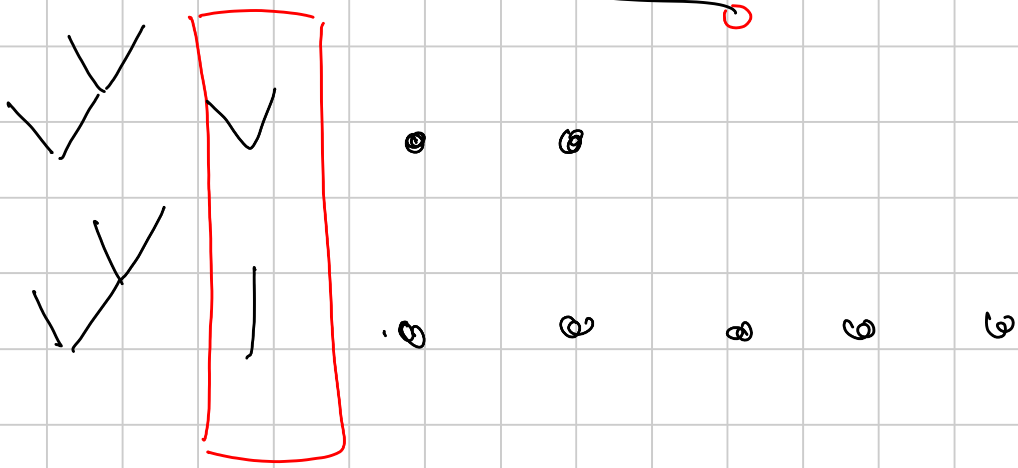
$\emptyset < \bullet <$ Qualunque altra idra

Idra 1



Idra 2



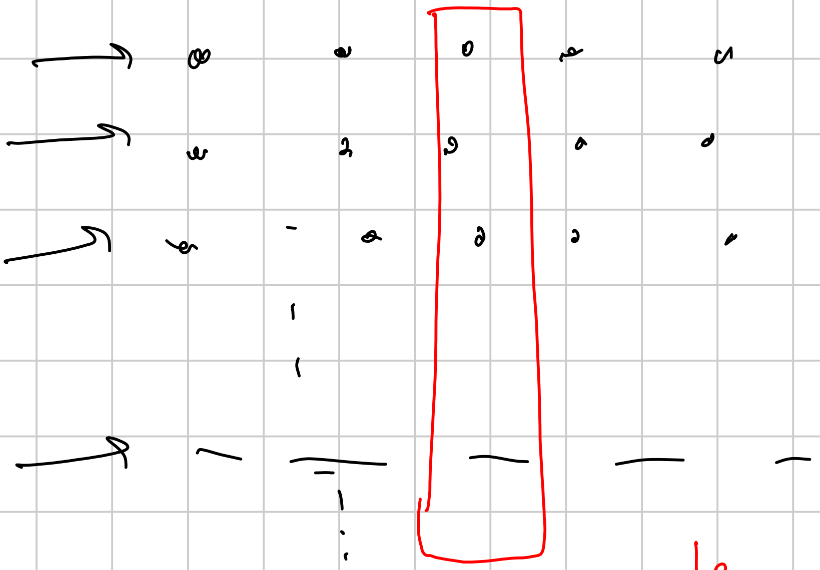


Ordiniamo le sottoidre in maniera decrescente

Andiamo a vedere il primo posto in cui le due successioni differiscono. L'idra maggiore è quella che ha la sottoidra maggiore nel primo posto in cui le successioni di sottoidre differiscono (sappiamo confrontare le sottoidre perché sono più basse)

È un ordine: Esercizio
(Attenzione: Definizione ricorsiva, le dimostrazioni vanno fatte per induzione)

È un buon ordine



Difficoltà: le altezze potrebbero non essere limitate. Idea per superarla: Un'idra più alta è sempre maggiore di un'idra più bassa

Per induzione sull'altezza dell'idra più alta

$\ldots < O$ ok

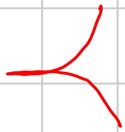
$O < 1$ $\qquad \emptyset < \bullet <$ Altre idra

OK

Idra 1 Idra 2

$m < n$

Per ipotesi induttiva, la sottoidra più alta della prima ha altezza $m-1$



Idra 1 $* \; \vdots \}\, m-1$

Idra 2 $** \; \vdots \}\, n-1$

Siccome $m-1 < n-1 < n$

Allora $* < **$

Attenzione: non potevamo fare induzione sull'altezza dell'idra più bassa!

$\bullet <$ Altra Idra

Idra 1 Idra 2

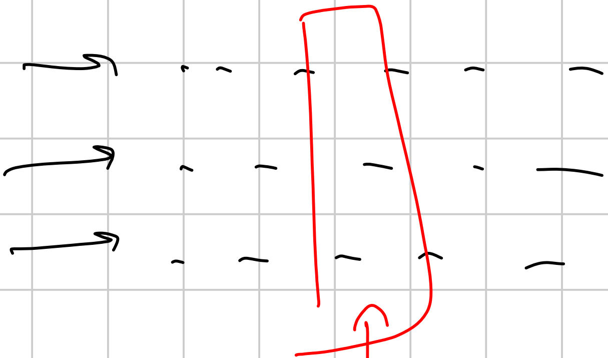
$n < m$

la sottoidra maggiore è alta $n-1$

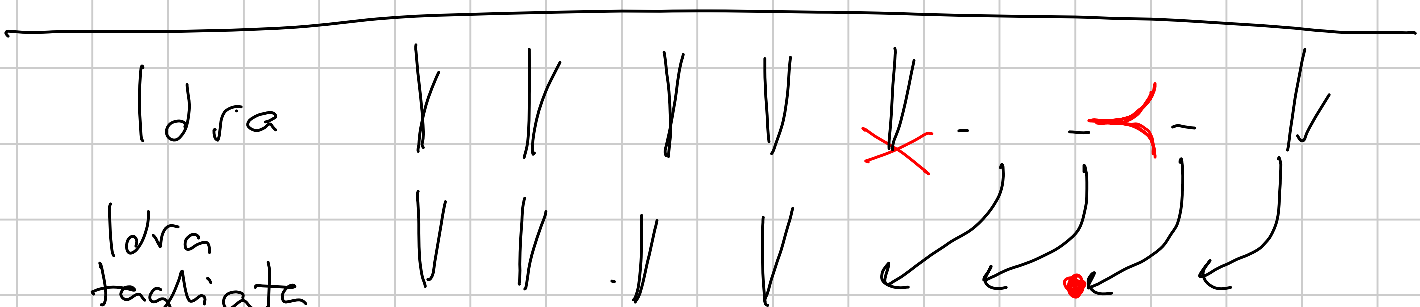
NON SAPPIAMO DIRE L'ALTEZZA DELLA SOTTOIDRA PIÙ ALTA!

Adesso possiamo completare la dim del buon ordine, perché sappiamo che l'idra minore va cercata tra quelle di altezza minima.

La cosa precisa da mostrare è: P(n)
ogni insieme di idre alte $\leq n$ ha minimo



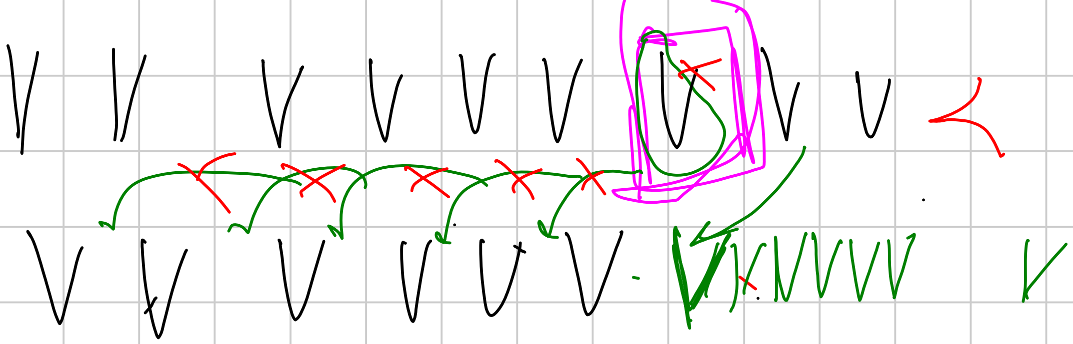
sono tutte di alt $\leq n-1$
Quindi sappiamo che ce n'è una minima per ip induttiva



OK
in questo posto
(il primo in cui ho
$<$ stretto tra sottoidre)
faccio il confronto

Idra

Idra tagliata e ricresciuta

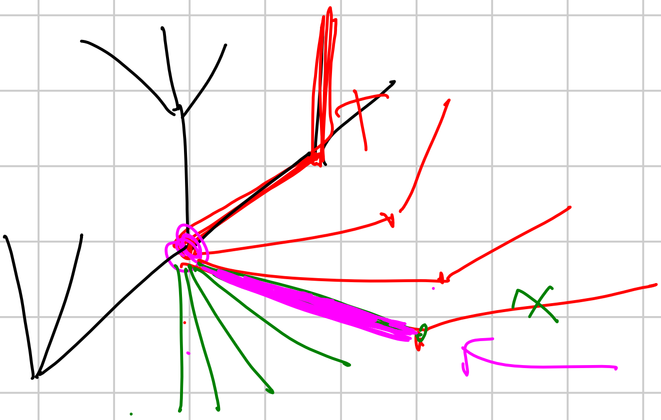


Si crea almeno una sottoidra corrispondente al taglio + ricrescita della sottoidra

Per ip induttiva, la struttura che si crea è $\leq$ originale, quindi va a finire dopo nella successione delle sottoidre

Esercizio: formalizzare.

La tesi segue per discesa infinita.



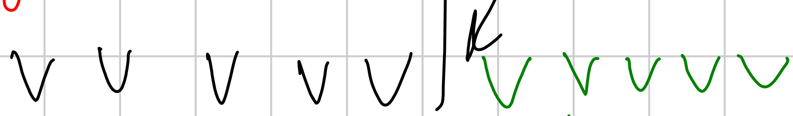
Ricrescono copie della sottoidra rimanente (una sola)

Idra

Idra tagliata

Taglio ad alt ≥ 3: cambio sotto idra

Taglio alt 2 : cambio e moltiplica



Questa è $\prec$ orig per ip induttiva