Stage Senior 2019 – Livello Advanced

Stampato integrale delle lezioni

Autori vari

Indice

A1-advanced – scambret

Titolo nota 07/09/2019

1) x, y, z reali positivi $xyz = 1$

$$\Rightarrow \sum \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \geq 1$$

2) $a_1, \ldots, a_n$ e $b_1, \ldots, b_n$ reali

$$\sum a_i^2 = 1, \quad \sum b_i^2 = 1, \quad \sum a_i b_i = 0$$

$$\Rightarrow \left(\sum a_i\right)^2 + \left(\sum b_i\right)^2 \leq n$$

3) Trovare una costante C tale che $\forall n$ e per ogni n-upla di interi positivi $a_1, \ldots, a_n$ vale

$$\sum H(a_i) \leq C \sqrt{\sum i a_i}$$

dove $H(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

4) Trovare la più piccola costante k tale che

$$\sum \left(\frac{2a}{a-b}\right)^2 + k \geq 4 \sum \left(\frac{2a}{a-b}\right)$$

5) Trovare il miglior $\boxed{k \in \mathbb{N}}$ t.c. $\forall a, b, c$ $abc = 1$ vale

$$\left(\sum \frac{1}{a}\right) + \frac{k}{a+b+c+1} \geq 3 + \frac{k}{4}$$

---

1) $\sum \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \geq 1$ $\quad xyz = 1$

$$\left(\frac{x-1}{x}\right)^{-1} = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-1} \qquad 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$a = \frac{x}{x-1} \Rightarrow 1 - \frac{1}{a} = \frac{1}{x}$$

$$\sum a^2 \geq 1 \qquad \left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\left(1 - \frac{1}{c}\right) = 1$$

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc$$

$$\Rightarrow \boxed{ab + bc + ca = a + b + c - 1} \qquad a + b + c = S$$

$$\sum ab = \frac{S^2 - \sum a^2}{2}$$

$$\Rightarrow S^2 - \sum a^2 = 2S - 2$$

$$S^2 - 2S + 2 = \sum a^2$$

$$\Rightarrow (S-1)^2 + 1 = \sum a^2 \geq 1$$

Correzione

4) Trovare k migliore t.c.

$$\sum \left(\frac{2a}{a-b}\right)^2 + k \geq 4 \sum \frac{2a}{a-b}$$

$$x = \frac{2a}{a-b} \qquad \frac{2}{x} = \qquad \frac{a-b}{a} = \left(1 - \frac{b}{a}\right)$$

$$\frac{b}{a} = 1 - \frac{2}{x} \implies 1 = \prod\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$

$$\implies \sum xy = 2\sum x - 4$$

$$\boxed{\left(\sum x^2\right) + k \geq 4\sum x}$$ Testo

$$\implies \text{(Vincolo)} \qquad \sum xy = \frac{\left(\sum x\right)^2 - \sum x^2}{2}$$

$$\implies \boxed{\left(\sum x\right)^2 - \sum x^2 = 4\sum x - 8}$$ Vincolo

$$\left(\sum x\right)^2 - 4\sum x + 8 + k \geq 4\sum x$$

$$\implies \left(\sum x - 4\right)^2 + k - 8 \geq 0 \implies k \geq 8$$

2) $a_1, \dots, a_n$
$b_1, \dots, b_n$ reali

$\sum a_i^2 = 1 \qquad \sum b_i^2 = 1 \qquad \overset{(3)}{\sum a_i b_i = 0}$

$\rightarrow (\sum a_i)^2 + (\sum b_i)^2 \leq n$

$\vec{a}, \vec{b} \qquad \|\vec{a}\| = 1$
$\qquad\qquad \|\vec{b}\| = 1$
$\qquad\qquad \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = 0$

$\sum a_i = \langle \vec{a}, \vec{1} \rangle$

$\underline{\langle \vec{a}, \vec{1} \rangle^2} + \langle \vec{b}, \vec{1} \rangle^2 \leq \langle \vec{1}, \vec{1} \rangle$

$\vec{1} = \mu_1 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} + \vec{r}$

$\langle \vec{a}, \vec{1} \rangle = \mu_1 + \mu_2 \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}_{0} + \underbrace{\langle \vec{a}, \vec{r} \rangle}_{0}$

$\langle \vec{a}, \vec{1} \rangle = \mu_1$

$\vec{1} = \langle \vec{a}, \vec{1} \rangle \vec{a} + \langle \vec{b}, \vec{1} \rangle \vec{b} + \vec{r}$

$\langle \vec{a}, \vec{1} \rangle = \mu_1 \qquad \langle \vec{b}, \vec{1} \rangle = \mu_2$

$\langle \vec{1}, \vec{1} \rangle = \langle \mu_1 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} + \vec{r}, \mu_1 \vec{a} + \mu_2 \vec{b} + \vec{r} \rangle$

$$= \mu_1^2 + \mu_2^2 + \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle$$

$$\langle \vec{a}, \vec{1} \rangle^2 + \langle \vec{b}, \vec{1} \rangle^2 \leq \langle \vec{1}, \vec{1} \rangle$$

$$\cancel{\mu_1^2} + \cancel{\mu_2^2} \leq \cancel{\mu_1^2} + \cancel{\mu_2^2} + \langle \vec{r}, \vec{r} \rangle$$

3) $\sum H(a_i) \leq C \sqrt{\sum i a_i}$ $\qquad H(x) = \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{k}$

$$\sum_i \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k} = \sum_k \sum_i$$

$$H(x) \leq 1 + \ln x$$

$$\sum H(a_i) \leq n + \sum \ln a_i = \left(n + \ln\left(\prod a_i\right)\right)$$

$$C \sqrt{\sum i a_i} \geq \qquad \frac{a_1 + 2a_2 + 3a_3 + \ldots + n a_n}{n} \geq \sqrt[n]{n!\, a_1 \cdots a_n}$$

$$\left[C \sqrt{\sum i a_i}\right]^2 \geq C^2\, n \sqrt[n]{n!\, a_1 a_2 \ldots a_n} \geq C^2\, n \sqrt[n]{\prod a_i}\, \frac{n}{e}$$

- $n! \geq \left(\frac{n}{e}\right)^n \alpha$

$m = n$

$$C^2 \frac{n^2}{e} \sqrt[n]{\underline{\prod a_i}} \geq \left(\cancel{} + \underline{\ln\left(\prod a_i\right)}\right)^2$$

$$e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

$$e^x = \left(\underline{e^{\frac{x}{2}}}\right)^2 \geq \left(\underline{1 + \frac{x}{2}}\right)^2 \Leftarrow$$

$$C = 2\sqrt{e}$$

5) $a, b, c \qquad abc = 1$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{k}{a+b+c+1} \geq 3 + \frac{k}{4}$$

Sol: $k = 13$

$$\left(t, t, \frac{1}{t^2}\right) \qquad \frac{1}{t}, \frac{1}{t}, t^2$$

$$k \leq \frac{4(t+2)(2t^3+t^2+1)}{t(2t+1)} \qquad \underline{t = \frac{2}{3}}$$

$$= 4\left(t^2 + 2t + \frac{2}{t} - \frac{3}{2t+1}\right)$$

Lezione conti :)

$k \geq 13$

$x = \frac{\alpha}{\beta}$

$x = \frac{\alpha^2}{\beta\gamma}$

$xyz = 1$

$$\frac{\left(\sum \alpha^3\beta^3 - 3\alpha^2\beta^2\gamma^2\right)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} \geq \frac{13}{4} \frac{\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma\right)}{\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\alpha\beta\gamma}$$

$$12\left(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3\right) \geq 13\gamma^2(\alpha+\beta)+\alpha\beta\gamma$$

γ sia il massimo

$$\left(\sum \alpha\beta\right)^2 \geq 3\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)$$

A2 - advanced - scambret

Titolo nota 08/09/2019

1) Trovare tutti i valori possibili di $f(2007)$

$$f:\mathbb{N}_+\longrightarrow\mathbb{N}_+ \quad f(m+n)\geq f(m)+f(f(n))-1$$

2) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+ \quad f(x+f(y))=f(x+y)+f(y)$

3) Trovare tutti i possibili valori di $P(0)$ tale che per ogni $x,y\in\mathbb{R}$ $|y^2-P(x)|\leq 2|x| \iff |x^2-P(y)|\leq 2|y|$ dove $P(\cdot)$ è un polinomio a coefficienti reali

4) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

- $a+b+c\geq 0 \qquad f(a^3)+f(b^3)+f(c^3)\geq 3f(abc)$
- $a+b+c\leq 0 \qquad f(a^3)+f(b^3)+f(c^3)\leq 3f(abc)$

1) Trovare tutti i valori possibili di $f(2007)$

$$f: \mathbb{N}_+ \to \mathbb{N}_+ \quad f(\underline{m+n}) \geq f(\underline{m}) + f(\underline{f(n)}) - 1$$

1) f è non decrescente $\quad f(m+n) \geq f(m) \quad \forall m,n$

2) $f(n) > n+1$ NON VA

3) Trovo $f(2007) = 1, 2, \dots, 2008$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(n) = 1 & \forall n \leq 2006 \\ f(2007) = k & \\ f(n) = n & \forall n \geq 2008 \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(n) = n & 2007 \nmid n \\ f(n) = n+1 & 2007 \mid n \end{array}}$$

4) $f(n) \leq n+1$

Per assurdo $f(k) = \underline{k+c}$ con $c > 1$

$$f(ak) = \underline{ak} + \underline{a(c-1)+1}$$

$m = ak$, $n = k$

$$f(q) - q \geq k$$

$m = f(q) - q \quad n = q$

$$\cancel{f(f(q))} \geq f(f(q) - q) + \cancel{f(f(q))} - 1$$

$$1 \geq f(k) = k + c \qquad \underline{NO}$$

$m + n = n$ NO

$m + n = f(n) \to m = f(n) - n$

2) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ $\quad f(x+f(y)) = f(x+y)+f(y)$

1) $x+f(y) \neq x+y \implies f(y)=0$ NO

2) $x+f(y) \neq y \implies f(x+y)=0$ NO

3) $f(y)>y$

$$h(y) = f(y)-2y$$
$$g(y) = f(y)-y$$

$$g(x+g(y)+y) + \cancel{x} + g(y) + \cancel{y} = g(x+y) + \cancel{x} + \cancel{y} + \cancel{g(y)} + y$$

$$g(\underline{x}+g(y)+\underline{y}) = g(x+y)+y \qquad \forall x,y>0$$

$g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$

$$\boxed{g(x+g(y)) = g(x)+y \qquad \forall x>y>0}$$

g e' iniettiva

$x \to x+g(z)$

$$\begin{aligned} g(x+g(y)+g(z)) &= g(x+g(z))+y \qquad y,z>0 \\ &= g(x)+y+z \qquad x \text{ grande} \\ &= g(x+g(y+z)) \end{aligned}$$

$$g(y)+g(z) = g(y+z) \qquad \forall y,z>0$$

3) Trovare tutti i possibili valori di $P(0)$ tale che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ $|y^2 - P(x)| \leq 2|x| \iff |x^2 - P(y)| \leq 2|y|$ dove $P(\cdot)$ è un polinomio a coefficienti reali

Risposta: $g(0) < 0$ o $g(0) = 1$

Step 1 $P(x) = -x^2 - \alpha$

$$y^2 + x^2 + \alpha > 2|x| \Rightarrow y^2 + (|x| - 1)^2 + \alpha - 1 > 0$$
$$x^2 + y^2 + \alpha > 2|y|$$

$$P(x) = -kx^2 - \alpha$$
$$= -\frac{2}{\varepsilon}x^2 - \varepsilon \qquad P(0) = -\varepsilon$$

$$y^2 + \frac{2}{\varepsilon}x^2 + \varepsilon - 2|x| > 0$$
$$\Rightarrow y^2 + \underbrace{\frac{2}{\varepsilon}\cancel{x^2} + \frac{\varepsilon}{2}}\,+\frac{\varepsilon}{2} - \cancel{2|x|} > 0 \qquad \phi = \phi$$

$$\Rightarrow P(0) < 0$$

Step 3 $P(x) = ax^2 + bx + 1 \qquad x^2 + 1 \qquad P(0) = 1$

Step 4 Se $P(x)$ ha coefficiente di testa positivo
$$\Rightarrow \deg P \leq 2$$

$$|x^2 - P(y)| \leq 2|y|$$
$$\iff |y^2 - P(x)| \leq 2|x|$$

Se $P(x) > 0$ $\quad \left|\underline{x^2 - P(\sqrt{P(x)})}\right| \leq 2\sqrt{P(x)}$

se $\deg P > 2$ $\qquad \frac{n}{2}^2 < \frac{n}{2}$

Step 5 Se $P(x)$ ha coefficiente di testa negativo

$$P(M) < -2M \quad \text{e} \quad M^2 > P(0)$$

$$|y^2 - P(M)| > 2M \quad \forall y$$

$$\Rightarrow |M^2 - P(y)| > 2|y| \quad \forall y$$

$$\deg P \leq 1$$

4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

•) $a+b+c \geq 0 \qquad f(a^3)+f(b^3)+f(c^3) \geq 3f(abc)$

•) $a+b+c \leq 0 \qquad f(a^3)+f(b^3)+f(c^3) \leq 3f(abc)$

⊗ $f(0) = 0$ wlog

$a+b+c=0 \qquad f(a^3)+f(b^3)+f(c^3) = 3f(abc) \qquad Q(a,b,c)$

f manda $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+_0$ e $\mathbb{R}^- \to \mathbb{R}^-_0$

⊗ f dispari

$c=-a-b \qquad f(a^3)+f(b^3)+\underline{\underline{3f(ab(a+b))}} = f((a+b)^3) \qquad R(a,b)$

$$\underline{f((a+b+c)^3)} = f(a^3)+\underline{f((b+c)^3)} + 3f(a(b+c)(a+b+c))$$
$$= f(a^3)+f(b^3)+f(c^3)+3f(\underline{bc(b+c)})$$
$$+ 3f(\underline{a(b+c)(a+b+c)})$$

$$f(\underline{\underline{bc(b+c)}}) + f(a(b+c)(a+b+c)) = f(\underline{\underline{ac(a+c)}}) + f(b(a+c)(a+b+c))$$

$S(a,b,c)$

$$I = \begin{cases} ac(a+c) = b(a+c)(a+b+c) = y \\ bc(b+c) = x \\ a(b+c)(a+b+c) = 2y-x \Leftarrow \end{cases}$$

$$f(x)+f(2y-x) = 2f(y) \qquad \forall x,y \in I$$

$b = \mu a \qquad c = \lambda a \qquad \lambda = \dfrac{\mu^2+\mu}{1-\mu}$

$$\frac{x}{y} = \frac{bc(b+c)}{ac(a+c)} = \frac{\mu(\mu+1)}{\lambda(\lambda+1)} = \frac{(\mu-1)^2}{1+\mu^2}$$

$$\mu \in [0,1] \Rightarrow \frac{x}{y} \in [0,1] \qquad x<y$$

$$f(x) + f(2y-x) = 2f(y) \qquad 0<x<y$$

<u>Lemma</u> $\quad f(x)+f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot 2 \qquad 0<x<y$

$$f(x) = ax$$

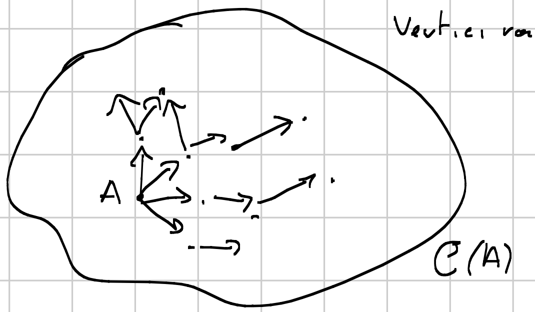
$$x = \frac{p}{2^q}$$

C2 Advanced

Titolo nota 07/09/2019

(2) Grafo orientato k-regolare ($\forall$ vert. k entranti e k uscenti) connesso (trascurando l'orientazione) $\Rightarrow$ è fortemente connesso ($\forall A, B$ $\exists$ camm. orientato da A a B).

Vertici raggiungibili da A con cammino orientato.



i) Non ci sono frecce uscenti da $C(A)$

ii) Ci sono frecce entranti in $C(A)$? Se no, abbiamo vinto perché allora $C(A) = G \ni B$

$|C(A)| = m$

Quante frecce escono dai $v \in C(A)$ in totale? $m \cdot k$

Ma queste sono $m \cdot k$ frecce che arrivano sui $v \in C(A)$ che è il numero totale di frecce entranti sui $v \in C(A)$

$\Rightarrow$ non ci possono essere altre frecce entranti da fuori. $\square$

(3) Versione facile: A ($|A| = n$) $A_1 \dots A_{n+1}$ non vuoti allora esistono I, J disg. $\subset \{1, \dots, n+1\}$ t.c. $\bigcup A_i = \bigcup A_j$

Trasf. con l'algebra lineare: χ_{A_i} funz. caratteristica di A_i. (= vettore di 0 e 1). Ma ci sono $n+1$ vettori quindi in $\mathbb{R}^n$ sono lin. dipendenti, cioè $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ non tutti nulli t.c. $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \chi_{A_i} = (0, \dots 0)$. Ma allora ci sono alcuni $\lambda_i > 0$ alcuni $\lambda_i = 0$ e alcuni $\lambda_i < 0$. Tolgo i $\lambda_i = 0$ e separo quelli positivi da quelli negativi:

$$\sum_{i \mid \lambda_i > 0} \lambda_i \chi_{A_i} = \sum_{i \mid \lambda_i < 0} (-\lambda_i) \chi_{A_i}$$

Ma allora le posizioni

in cui il valore è >0 a sinistra e a destra sono le stesse e, poiché tutti i coeff. sono positivi, sono $\bigcup_{i|\lambda_i>0} A_i$ e $\bigcup_{i|\lambda_i<0} A_i$. $I = \{i \mid \lambda_i > 0\}$ $J = \{i \mid \lambda_i < 0\}$ funzionano

E il problema originale?

$$A_i \longmapsto v_{A_i} = (\chi_{A_i}, \chi_{A_i^c}) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

complementare di A_i.

Sia W lo spazio più piccolo che contiene $v_{A_1}, \dots v_{A_{n+2}}$ (sottosp. vettoriale generato da $v_{A_1} \dots v_{A_{n+2}}$)

$\dim W$? $\quad$ dim sp. generato da $\chi_{A_i} \leq n$.

Ma $\chi_{A_i} + \chi_{A_i^c} = (1, 1, \dots, 1)$. Da questo discende che $\dim W \leq \left(\text{dim. sp. generato da } \chi_{A_i}\right) + 1. \leq n+1$

Ma allora $v_{A_1} \dots v_{A_{n+2}}$ sono $n+2$ vettori in uno sp. vett. di dim. $n+1$ $\Rightarrow$ esiste una relazione $\sum \lambda_i v_{A_i} = 0$. Ora separo, e considero per segno λ_i le parti sinistre e destre e ottengo

$$\bigcup_I A_i = \bigcup_J A_j \quad \text{e} \quad \bigcap_I A_i = \bigcap_J A_j.$$

$\square$

④ Matrice $2n \times m$ di ragazzi e ragazze. Per ogni 2 colonne i, j il numero di righe in cui il genere è diverso è $\geq$ al numero di righe per cui il genere è uguale. Stima per $\# M$?

$$2n \text{ righe} \quad \begin{pmatrix} i: & \dots & \dots \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \quad M_i \text{ maschi}, m - M_i \text{ femmine}.$$

$$N = \text{tot. delle diff. di genere} \geq \binom{m}{2} \cdot n$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i=1}^{2n} M_i (m - M_i) \qquad \sum M_i = M \qquad x(m-x) \text{ è concava}$$

$$\frac{1}{\cancel{2n}} \sum_{i=1}^{2n} M_i (m - M_i) \le \frac{M}{\cancel{2n}}\left(m - \frac{M}{2n}\right)$$

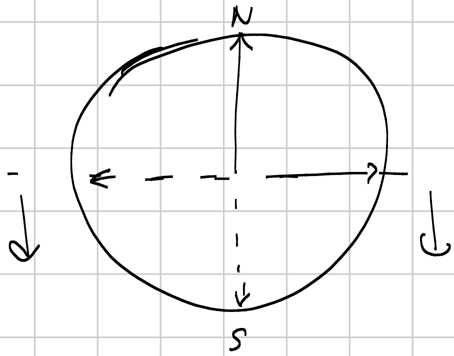
$$2Mm - \frac{M^2}{\cancel{2}n} \ge \frac{nm(m-1)}{\cancel{2}} \qquad M^2 - 2nmM + n^2 m(m-1) \le 0.$$

Quindi $nm - n\sqrt{m} \le M \le nm + n\sqrt{m}$

Oss. se $F = +1$, $M = -1$ diff. genere $\ge$ uguaglianze di genere

$\iff$ $C_i \cdot C_j \le 0$.

Teo. in $\mathbb{R}^n$ non ci possono essere più di $2n$ vettori con angoli a due a due $\ge \frac{\pi}{2}$.



⑤ Numero disp. di classi, con num. disp. di studenti ciascuna. Si sceglie 1 studente da ciascuna. TFAE:

1) Ci sono più modi di scegliere # disp. di maschi che un # disp. di femmine
2) Le classi con più maschi che femmine sono un # dispari

<u>Soluzione</u> $p(x) = \prod_{i=1}^{k} (M_i x + F_i)$ — $p(-1) < 0 \iff$ vale 2)

— Il conto mostra che è anche vero $p(-1) < 0 \iff$ vale 1)

sviluppando il prodotto si ottiene la sommatoria che determina se vale 1).

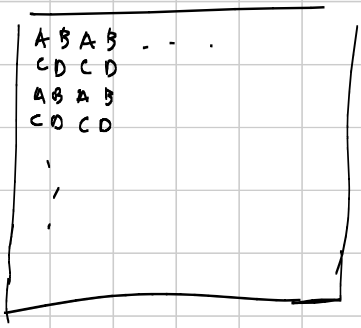
(6) La torrezoppa è una torre che muove di 1. C'è una torre zoppa su una scacchiera 999×999. Due mosse successive devono essere ortogonali. Quanto è lungo il più lungo percorso semplice ciclico che la torre può fare?

Coloriamo con 4 colori

A sono 500×500

B, C sono 499×500

D sono "solo" 499×499.



Oss. Un percorso semplice ciclico tocca lo stesso numero di caselle dei 4 colori: ogni 2 mosse $A \to D$ o $D \to A$, $B \to C$ o $C \to B$.

Ora $\max \leq 4 \cdot 499^2$. Però le D sono un num. disp. e le posso colorare a loro volta a scacchiera e dimostro che ogni 4 devo cambiare colore $D_1 - D_2$ o $D_2 - D_1$ $\Rightarrow$ toccherò un num. pari di D $\to$ $\max \leq 4 \cdot (499^2 - 1)$

Una costruzione mostra che questo numero è effettivamente raggiungibile.

SENIOR 2019 – CN3 ADVANCED

Titolo nota 09/09/2019

Problemi proposti:

1) Russia 2019, Grade 11, P3
2) ELMO Shortlist 2019, C3
3) IMO Shortlist 2013, C5
4) Romania TST 2008, P3
5) Turkey TST 2012, P9
6) IMO Shortlist 2014, N7

A? – Advanced (??) Sam

Titolo nota 10/09/2019

Generating functions

$$(a_n)_{n\geq 0} \longmapsto f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$$

FUNZ. GENERATRICE (ORDINARIA) di $(a_n)_{n\geq 0}$.

Es: $a_n = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\hookrightarrow f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \left[= \dfrac{1}{1-x}\right]$ (avrebbe senso solo per $|x|<1$)

Derivate "formale"

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n x^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big) = \frac{d}{dx} f(x) + \frac{d}{dx} g(x)$$

"passo al limite"

Es: $\dfrac{d}{dx}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \dots\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$

Es 2: $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = -\dfrac{1}{(1-x)^2}(-1) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

Es F: $\begin{cases} F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \\ F_1 = 1 \\ F_0 = 0 \end{cases}$ Fibonacci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n = 0 + x + x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + \dots$$

$$F_0 + F_1 x + F_2 x^2 + F_3 x^3 + F_4 x^4 + \dots \quad -$$

$$0 + F_0 x + F_1 x^2 + F_2 x^3 + F_3 x^4 + \dots \quad -$$

$$0 + 0 + F_0 x^2 + F_1 x^3 + F_2 x^4 + \cdots \quad =$$

$$\overline{F_0 + (F_1 - F_0)x + 0 + 0 + 0 + \cdots}$$

$$f(x) - x f(x) - x^2 f(x) = F_0 + (F_1 - F_0)x = x$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x}{1-x-x^2} = \frac{A}{P(x)} + \frac{B}{Q(x)} \qquad \deg P, Q = 1$$

$$A, B \in \mathbb{C}$$

$$x^2 + x - 1 = \left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

$$AQ(x) + BP(x) = x$$

$$A\left(x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -x$$

$$(A+B)x + \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}\sqrt{5} = -x$$

$$\begin{cases} A+B = -1 \\ \dfrac{A+B}{2} = \dfrac{A-B}{2}\sqrt{5} \end{cases} \qquad \begin{cases} A+B = -1 \\ A-B = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$A = \frac{-1-\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} \qquad B = \frac{-1+\frac{1}{\sqrt{5}}}{2}$$

$$= -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \qquad = \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

$$f(x) = -\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \frac{1}{x + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}} + \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{1}{x + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}} =$$

$$= -\frac{\cancel{\sqrt{5}+1}}{\cancel{2}\sqrt{5}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{1+\sqrt{5}}} \frac{1}{1-\left(-\frac{2x}{1+\sqrt{5}}\right)} + \frac{\cancel{1-\sqrt{5}}}{\cancel{2}\sqrt{5}} \frac{\cancel{2}}{\cancel{(1-\sqrt{5})}} \frac{1}{1-\frac{2x}{\sqrt{5}-1}} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2x}{1+\sqrt{5}}\right)^n + \frac{1}{\sqrt{5}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2x}{\sqrt{5}-1}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \left(\frac{2^n}{(\sqrt{5}-1)^n} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{(-2)^n}{(1+\sqrt{5})^n} \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$\Rightarrow F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}-1} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{-2}{1+\sqrt{5}} \right)^n$$

<u>Oss</u>: $$\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{A}{1-x} + \frac{d}{dx}\left(\frac{B}{1-x}\right)$$

<u>Es</u>: $$\sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k+1}$$

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{k}, \dots \qquad (a_k)_{k \geq 0}$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k = (1+x)^n$$

$$f(1) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

$$f(-1) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{n}{k} = (1-1)^n = 0.$$

Somma dei binom. di posto pari $=$ Somma dei binom di posto disp. $= 2^{n-1}$

Per sommare uno ogni 4, mi serve "qualcosa" le cui potenze abbiano periodo 4.

$$f(i) = \binom{n}{0} + i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} - i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} + i\binom{n}{5} - \binom{n}{6} \dots$$

$$f(-i) = \binom{n}{0} - i\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + i\binom{n}{3} + \binom{n}{4} - i\binom{n}{5} - \binom{n}{6} \dots$$

$$f(i) - f(-i) = 2i\left(\binom{n}{1} + \binom{n}{5} + \binom{n}{8} \dots\right) - 2i\left(\binom{n}{3} + \binom{n}{7} + \binom{n}{11} + \dots\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \binom{4n}{4k+1} = \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + \frac{f(i) - f(-i)}{2i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(2^{n-1} + \frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{2i}\right) = \dots$$

<u>Caso generale</u>: $(a_n)_{n \geq 0}$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} a_{m \cdot k} = ?$ $\quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Allora $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_{m\cdot k} = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} f(\xi^{l})$

ξ radice primitiva m-esima di 1.

<u>Es</u>: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k} = \sum_{\substack{k+l=n\\ k,l\geq 0}}\binom{a}{k}\binom{b}{l}$

$a(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

$b(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n$

$a(x)\cdot b(x) = a_0b_0 + (a_0b_1 + b_0a_1)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \dots + \Big(\displaystyle\sum_{k+l=m} a_kb_l\Big)x^m$.

$\Rightarrow \displaystyle\sum_{k+l=n}\binom{a}{k}\binom{b}{l}$ è il coeff. di x^n in $\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}x^k\Big)\cdot\Big(\sum_{l=0}^{\infty}\binom{b}{l}x^l\Big) =$

$= (1+x)^a(1+x)^b = (1+x)^{a+b}$

$\Rightarrow$ è $\dbinom{a+b}{n}$

<u>IDEE IMPORTANTI</u>

1) Saper riconoscere le serie.

2) Saper interpretare in termini di funzioni le operazioni sulle successioni.

1) $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{4!} + \dots$

$\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{4!} - \dots$

$\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{5!} + \dots$

$\dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

$\dfrac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$

<u>Es</u>: $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots = 1 + \dfrac{x}{(1-x)^2}$

Es: $(a_k)_{k\geq 0}$ $\quad b_k = k\cdot a_k$

$$f(x)=\sum a_k x^k \qquad g(x)=\sum b_k x^k \qquad g(x)=x\cdot\frac{d}{dx}(f(x))$$

Es (numeri di CATALAN)

$C_n =$ n-esimo num. di Catalan.

$$C_n = C_0C_{n-1}+C_1C_{n-2}+\dots+C_{n-1}C_0 \qquad C_0=1,\ C_1=1$$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

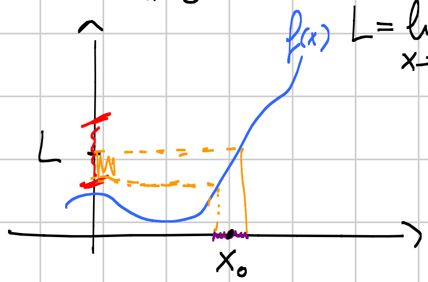
Sol:
$$(f(x))^2=\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n\right)=\sum_{k=0}^{\infty} x^k\sum_{j=0}^{k} C_jC_{k-j}=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+1}x^k=\frac{f(x)-C_0}{x}=\frac{f(x)-1}{x}$$

$$x(f(x))^2-f(x)+1=0$$

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x} \qquad C_0=\lim_{x\to 0} f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x}=-\infty$$



$L=\lim_{x\to x_0} f(x)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=1 \implies f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

$$\sqrt{1+x}=(1+x)^{\frac12}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac12}{n}x^n=$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\frac12\left(-\frac12\right)\left(-\frac32\right)\cdots\left(-\frac{2n-3}{2}\right)}{n!}x^n$$

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$$

Teo: $(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$

Usando questo in $f(x)$ si trova che

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Oss: $\binom{\frac{1}{2}}{n} = (-1)^{n-1} \frac{(2n-3)!!}{2^n n!}$

Problema 1: Trovare il num. di modi in cui si possono pagare n euro usando solo monete da 1 o 2 euro, a meno dell'ordine

Problema 2: Trovare il num. dei polinomi $P(x)$ con coeff in $\{0,1,2,3\}$ tali che $P(2)=n$.

Problema 3: $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ è una successione crescente di interi non negativi tale che ogni intero non negativo si può scrivere in maniera unica come $a_i + 2a_j + 4a_k$ dove i,j,k non sono necessariamente distinti. Determinare a_{2019}.

$\boxed{P1}$ $a_n = \#$ modi di scrivere n come somma di 1 e 2

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $\qquad n = h+2k \quad h,k \in \mathbb{N}$.

il coeff di x^n in $\left(\sum_{h=0}^{\infty} x^h\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}\right)$ è proprio $a_n \Rightarrow f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^h \cdot \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} =$

$$= \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{(1-x)^2}\right) = \frac{1}{2}\left[(1+x^2+x^4+x^6 \dots) + (1+2x+3x^2+\dots)\right]$$

$$= 1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \dots \qquad a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

$\boxed{P2}$ $a_n = \#$ polinomi che fanno quello che voglio.

$f(x) = \sum a_n x^n$

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k \qquad P(2) = n$$

$$c_0 + 2c_1 + 4c_2 + \dots + 2^k c_k = n \qquad c_j \in \{0,1,2,3\}$$

$$x^{c_0} \cdot x^{2c_1} \cdot x^{4c_2} \cdot \dots \cdot x^{2^k c_k} = x^n$$

$$2^j c_j \in \{0, 2^j, 2^{j+1}, 3 \cdot 2^j\}$$

$$f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)(1 + x^2 + x^4 + x^6) \cdots =$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^j} + x^{2^{j+1}} + x^{3 \cdot 2^j}\right) = \qquad 1 + t + t^2 + t^3 = \frac{1-t^4}{1-t}$$

$$= \prod_{j=0}^{\infty} \left(1 + x^{2^j} + (x^{2^j})^2 + (x^{2^j})^3\right) =$$

$$= \frac{\cancel{1-x^4}}{1-x} \cdot \frac{\cancel{1-x^8}}{1-x^2} \cdot \frac{\cancel{1-x^{16}}}{\cancel{1-x^4}} \cdot \frac{\cancel{1-x^{32}}}{\cancel{1-x^8}} \cdots = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2}$$

$$a_n = \left[\frac{n}{2}\right] + 1$$

$\boxed{P3}$ ogni intero non neg. è scritto <u>in maniera unica</u> come $a_i + 2a_j + 4a_k$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{a_n} \qquad f(x) f(x^2) f(x^4) = \frac{1}{1-x}$$

$$f(x^2) f(x^4) f(x^8) = \frac{1}{1-x^2}$$

$$f(x) = (1+x) f(x^8)$$

$$f(x) = (1+x)(1+x^8)(1+x^{8^2})(1+x^{8^3}) \cdots$$

$(a_n)_{n \geq 0}$ sono i num. che si possono scrivere con cifre $0, 1$ in base 8

$$2019 = 2^0 + 2^1 + 2^5 + 2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10}$$

$$a_{2019} = 1 + 8 + 8^5 + 8^6 + 8^7 + 8^8 + 8^9 + 8^{10}$$

IMO '95 p = primo dispari

Quanti sono i sottoinsiemi A di $\{1,2,\ldots,2p\}$ t.c.

(i) $|A|=p$

(ii) la somma degli elementi di A è divisibile per p ?

Sol: $$f(x,y)=(1+xy)(1+x^2y)(1+x^3y)\cdot\ldots\cdot(1+x^{2p}y)=\sum_{h,k} c_{h,k}x^hy^k=$$

$$=1+\sum_{k=1}^{2p}\sum_{h=1}^{\infty}c_{h,k}x^hy^k$$

$$C=c_{p,p}+c_{2p,p}+c_{3p,p}+\ldots$$

il coeff di y^p: $\sum_{h=1}^{\infty}c_{h,p}x^h$ $\qquad$ ζ rad. prim. p-esima di 1

$$\underbrace{\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{h=1}^{\infty}c_{h,p}\zeta^{h\cdot j}}_{\text{il coeff di } y^p \text{ in } \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}f(\zeta^j,y)}=C$$

$$\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}f(\zeta^j,y)=\frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p-1}(1+\zeta^jy)(1+\zeta^{2j}y)\cdots(1+\zeta^{2pj}y)=$$

$$j=0 \longrightarrow (1+y)^{2p}$$
$$1\le j\le p-1 \longrightarrow (1+y^p)^2$$

$$=\frac{1}{p}\left((1+y)^{2p}+(p-1)(1+y^p)^2\right)$$

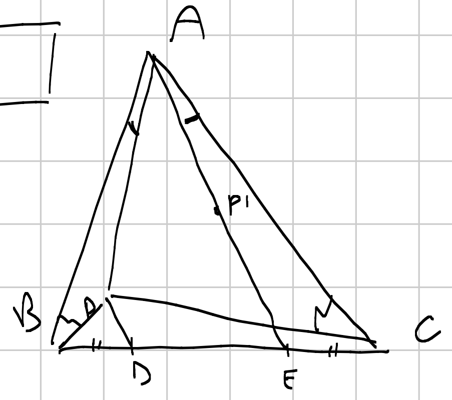
$$C=\frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p}+2(p-1)\right)$$

$\boxed{\text{IMO 2008-5}}$

Senior 2019 - G1 Advanced

Titolo nota 06/09/2019

ELMO 2012



$AB \times AC$

Tesi: $\angle PBA = \angle ACP$

$\angle CBP' = \angle PBA$, $\angle P'CB = \angle PCA$

$\Rightarrow$ Tesi, P' sta sull'asse di BC

$D = [0, m, n]$ $E = [0, n, m]$, $n + m = 1$

Parallelismo di PD e AE $\rightarrow$ $[PDE] = [PDA]$

$P = [\alpha, \beta, \gamma]$

$$\frac{[PDE]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & m & n \\ 0 & n & m \end{vmatrix} = \alpha(m^2 - n^2)$$

$$\frac{[PDA]}{[ABC]} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ 0 & m & n \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \beta n - \gamma m$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha(m^2 - n^2) = \beta n - \gamma m}$$

AE: $-ym + zn = 0$

$Q \in AE$, $Q = [\text{qualcosa}, n, m] = \left[\frac{a^2}{t}, n, m\right]$

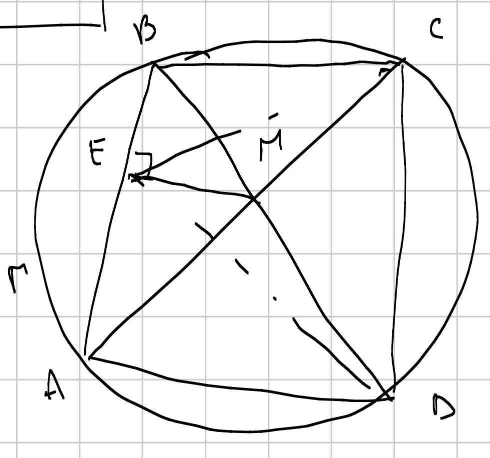
$$P' = \left[\frac{a^2}{t}, u, w\right] \Rightarrow P = \left[t, \frac{b^2}{u}, \frac{c^2}{w}\right]$$

$$t(w^2 - u^2) = b^2 - c^2$$
$$t(w+u)(w-u) = b^2 - c^2$$
$$w + u = 1 \Rightarrow t = \frac{b^2 - c^2}{w - u}$$

$$P = \left[\frac{b^2 - c^2}{w-u}, \frac{b^2}{u}, \frac{c^2}{w}\right]$$

$$P' = \left[\frac{a^2(w-u)}{b^2 - c^2}, u, w\right]$$

$\boxed{\text{BMO 2018-1}}$



$\angle DEM = \angle MEC$

Tesi: AB diametro di Γ

$AB > CD$ $\quad AB$ no parallelo CD

$$E = [1, 0, 0], \quad C = [0, 1, 0], \quad D = [0, 0, 1]$$
$$A = [\lambda, -b, c] \qquad B = [\mu, -b, c]$$

$$M = [\lambda\mu, -\lambda b, c\mu]$$

Imponiamo $\quad -\dfrac{\lambda b}{c\mu} = \dfrac{b}{c} \Rightarrow \lambda = -\mu$

$$B = [-\lambda, -b, c]$$

Equazione di Γ - $a^2yz + b^2xz + c^2xy - (x+y+z)(ux+vy+cz) = 0$

$C \in \Gamma \Rightarrow v = 0$

$D \in \Gamma \Rightarrow w = 0$

$A \in \Gamma \Rightarrow u = \dfrac{-a^2bc + \lambda b^2c - \lambda bc^2}{(\lambda - b + c)\lambda}$ (1)

$B \in \Gamma \Rightarrow u = \dfrac{a^2bc + \lambda b^2c - \lambda bc^2}{\lambda(-\lambda - b + c)}$ (2)

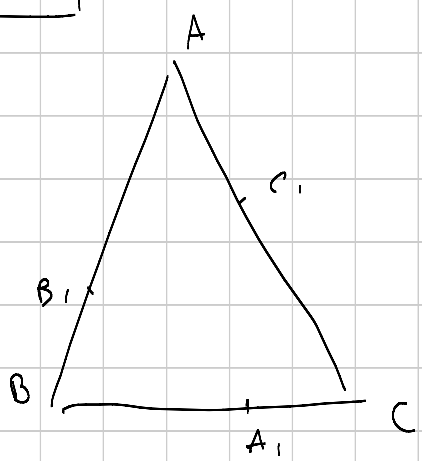
Imponiamo: RHS di (1) e (2) uguali

$$(b-c)(a-\lambda)(a+\lambda) = 0$$

$b \neq c \Rightarrow \lambda = a$ o $\lambda = -a$

A, B excentri di ΔCED, chiude.

IMO 2013 - 3

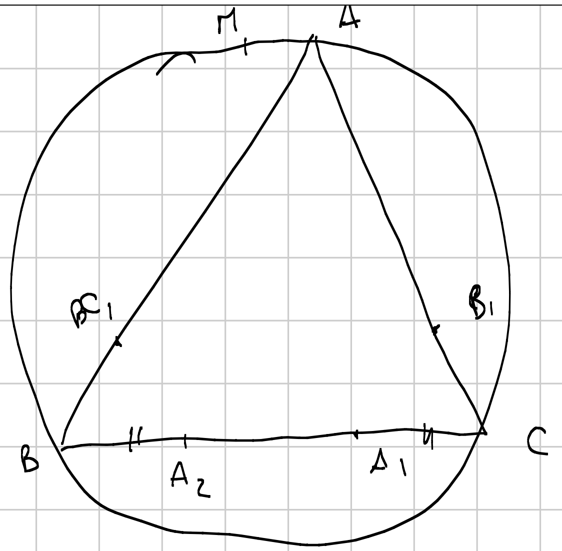


circocentro di $\Delta A_1B_1C_1$ sta su $\odot ABC$

Tesi: ΔABC rettangolo

O_1 è circocentro di $\Delta A_1B_1C_1$

$\Delta A_1B_1C_1$ è ottusangolo. $\angle B_1A_1C_1 > 90°$



$BM = CM$, $\angle C_1BM = \angle B_1CM$

A_2 pto di tangenza dell' inscritta

$C_1B = BA_2 = CA_1 = CB_1$

$\Rightarrow \Delta BC_1M = \Delta CB_1M$ $\quad M \in B_1C_1 \Rightarrow M \equiv O_1$!

M sta sull' asse di $A_1A_2 \Rightarrow A_1M = A_2M$

$A_2 \in \odot A_1B_1C_1$

Baricentriche su ΔABC !

$$A_1 = [0, a+c-b, a+b-c]$$
$$A_2 = [0, a+b-c, a+c-b]$$
$$B_1 = [b+c-a, 0, b+a-c]$$
$$C_1 = [b+c-a, c+a-b, 0]$$

$$\sum a^2xy = (x+y+z)(ux+vy+wz)$$

Passaggio di A_1 e A_2

$$v(a+c-b) + w(a+b-c) = v(a+b-c) + w(a+c-b)$$

Se $b \neq c$ $\Rightarrow$ $v = w$

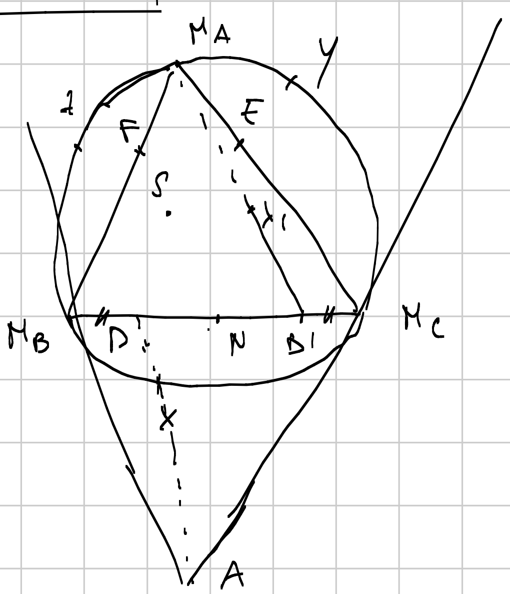
$$v = w = \frac{(a+c-b)(a+b-c)}{4}$$

B_1 : $$b^2 (b+c-a)(a+b-c) = 2b\left[c(b+c-a) + \frac{(a+b-c)^2(a+c-b)}{4}\right]$$

$$(b-c)(b^2+c^2-a^2) = 0 \Rightarrow a^2 = b^2+c^2 \Rightarrow \text{Ten}$$

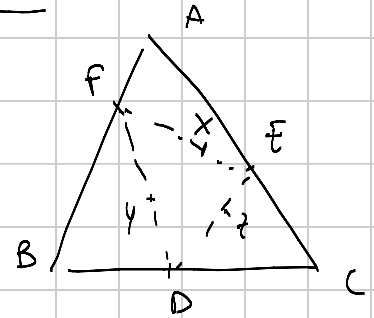
Se $b = c$ invece $M \equiv A$ e si conclude

USA TST 2015 - 6



Tesi: AX, BY, CZ concorrono

Teorema (Cevian Nest):



Due qualsiasi delle seguenti implicano la terza

i) AD, BE, CF concorrono

ii) DX, EY, FZ concorrono

iii) AX, BY, CZ concorrono

Quindi per il Cevian Nest la nostra tesi è equivalente alla concorrenza di $M_A D$, $M_B E$, $M_C F$

La tesi è equivalente a:

$M_A X'$, $M_B Y'$, $M_C Z'$ concorrono

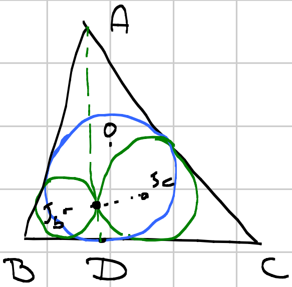
Baricentriche su $\Delta M_A M_B M_C$

$$S = (a^2 S_A + t,\ b^2 S_B + t,\ c^2 S_C + t)$$

G2 - Advanced

Titolo nota 09/09/2019

$\boxed{\text{Es } 0}$ ABC triangolo, D pt di tg. tra inscritta e BC.
J_b, J_c incentri di $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$. Allora il circocentro di AJ_bJ_c giace sulla bisettrice uscente da A. [RMM'15/4]



Sol: O = circocentro di AJ_bJ_c

$AB - BD = AC - CD$

$AB + AD - BD = AC + AD - CD$

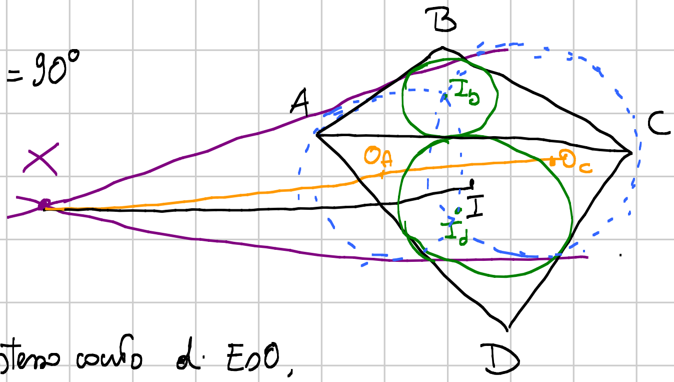
$\Rightarrow$ le circonf. inscr. sono tg a AD nello stesso punto $\Rightarrow$ tg tra di loro

$\Rightarrow AD \perp J_bJ_c$ ovvero AD è altezza in AJ_bJ_c.

$\Rightarrow$ AO simm. di AD risp. alla bisett. di $J_b\hat{A}J_c$

$$B\hat{A}O = B\hat{A}J_b + J_b\hat{A}O = B\hat{A}J_b + D\hat{A}J_c = J_b\hat{A}D + D\hat{A}J_c = \frac{1}{2}B\hat{A}C.$$

$\boxed{\text{Es } 4}$ Th: $X\hat{I}Y = 90°$

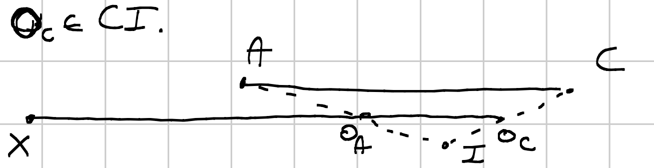


Sol: Con lo stesso conto di Es0,
ottengo che le circonf. inscr. hanno AC come tangente comune
$\Rightarrow I_bI_d \perp AC$
e se chiamo O_A e O_C i circocentri di AI_bI_d e CI_bI_d, allora
$\Rightarrow O_AO_C \parallel AC$.

$$B\hat{A}O_A = B\hat{A}I_b + I_b\hat{A}O_A = I_b\hat{A}C + C\hat{A}I_d = \frac{1}{2}B\hat{A}D \Rightarrow O_A \in AI$$

Analogamente $O_c \in CI$.

RMM'15/4



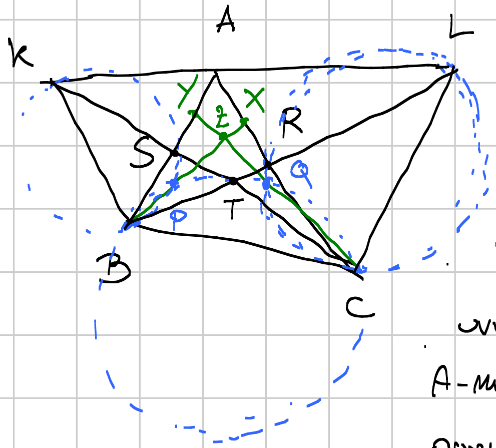
$$\frac{XO_A}{XO_c} = \frac{R_A}{R_c} = \frac{O_AA}{O_cC} = \frac{O_AI}{O_cI}$$

$\Rightarrow$ X è piede della bisett. esterna di $A\hat{I}C$

ovvero della bisett. interna di $B\hat{I}D$.

Idem per Y ⇒ ho finito.

$\boxed{\text{Es 1}}$



Il centro radicale di (BSK), (CLR), (BTC) sta sulla mediana da A.

Voglio dim che Z è mediana per A ovvero che

A-mediana, BX, CY concorrono

ovvero che (per Ceva)

$$\frac{AX}{AC} = \frac{AY}{AB}$$

$SX // BR \Leftrightarrow$

$X\hat{S}C = R\hat{T}C = \pi - B\hat{T}C =$

$= \pi - B\hat{P}C = X\hat{P}C$

$\Leftrightarrow XSPC$ ciclico.

Hope: $SX // BR$

da qui: $\frac{AX}{AR} = \frac{AS}{AB}$

$$\frac{AX}{AC} = \frac{AS}{AB} \cdot \frac{AR}{AC}$$ → è "simmetrica" ⇒ fine.

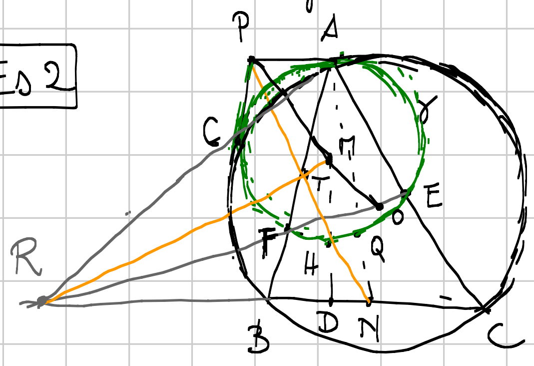
Mi basta dim $XSPC$ ciclico (e $BQRY$)

$B\hat{K}C = K\hat{C}A$

$B\hat{K}C = \pi - B\hat{P}S = S\hat{P}X$ ⟶ $S\hat{C}X = K\hat{C}A = S\hat{P}X$ ⇒ $XSPC$ ciclico

e ho finito.

$\boxed{\text{Es 2}}$



$(GNQ) \cap (BMC) \ni T$ che sta su PN

E, F piedi delle altezze.

Assi radicali ⇒ AG, EF, BC concorrono in R.

PA è tg. alla cf. verde in A $\quad (P\hat{A}H = 90°)$ $\quad (PA // BC)$

⇒ $P = \mathrm{pol}_\gamma(AG)$ $\quad N = \mathrm{pol}_\gamma(EF)$ ↑ Feuerbach

⇒ $PN = \mathrm{pol}_\gamma(R)$ ⇒ inverso di R risp. a γ sta su PN ed è $PN \cap RM = T$

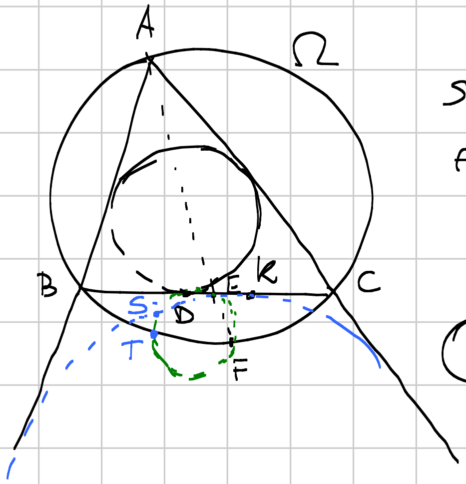
⇒ $RT \perp PN$. $\quad R\hat{T}N = 90°$

G, H, N allineati ⇒ H ortocentro di ARN.

La circ. di diam RN passa per G, T, Q $\Rightarrow$ $RT \cdot RM = RE \cdot RF = RB \cdot RC$

$\Rightarrow T \in (MBC)$

$\boxed{\text{Es 3}}$



$S \in AT$

$AT \cap \omega_A \in (DEF)$

↑ l'intersez. interna al segmento AT.

(I) $S = AT \cap \omega_A$ come sopra..

$\Rightarrow T =$ pt. di tangenza dell'incerchio mistilineo opposto ad A.

$K =$ tg di ω_A su BC

$\Rightarrow$ inv di raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$ + sim manda T in K.

$\Rightarrow AS = AK$

$AS \cdot AT = AK \cdot AT = AB \cdot AC = AE \cdot AF \Rightarrow STEF$ è ciclico.

$\Rightarrow S \in$ circ. per D, E, F.

(II) le circ. (DEF) e (EFK) sono congruenti.

$\Rightarrow$ se rifletto K in EF, ottengo $S' \in (DEF)$

$I_A \in EF$, $K \in \omega_A \Rightarrow S' \in \omega_A$

$S' \in AT$ perché AT e AK sono coniug. isog $\Rightarrow$ fine

SENIOR 19 N1 ADV Drago

Approx diofantea

lemma (Dirichlet): $\forall \alpha$ irrazionale $\exists$ infiniti $p, q \in \mathbb{Z}$ tali che $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$

Dirichlet++: $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ $\exists n, p_1, \dots, p_k \in \mathbb{Z}$

$|n\alpha_i - p_i| < \varepsilon$

dim: $N > \frac{1}{\varepsilon}$ $M = N^k + 1$

$\forall i = 1, \dots, M$ $\{i\alpha_j\} \in \left[\frac{a_{ij}}{N}, \frac{a_{ij}+1}{N}\right]$

$\exists i, j \leq M$ t.c. $\{i\alpha_h\}$ e $\{j\alpha_h\}$ stanno negli stessi intervallini, $\forall h$ cioè $|\{i\alpha_h\} - \{j\alpha_h\}| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

$n = i - j$

$x_1, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall i$ posso dividere gli x_j, $j \neq i$ in due gruppi da n elementi con la stessa somma

Dimostra che tutti i numeri sono uguali.

Sol: se sono interi/razionali è facile

Fissato ε $\exists q, p_1, \dots, p_{2n+1}$ t.c. $|qx_i - p_i| < \varepsilon$

fissiamo i $\exists a_{ij}$ $\sum_{j=1}^{2n+1} x_j a_{ij} = 0$

$\left|\sum a_{ij} p_j\right| = \left|\sum a_{ij} p_j - q x_j a_{ij} + q x_j a_{ij}\right| \leq \sum |a_{ij} p_j - q x_j a_{ij}| + \sum q x_j a_{ij}$

$\sum |a_{ij}| |qx_j - p_j| \leq (2n\ )\varepsilon$ per $\varepsilon < \frac{1}{2n}$,

$|\sum a_{ij} p_j| < 1 \Rightarrow \sum a_{ij} p_j = 0 \Rightarrow p_i = P$

$\overset{n}{\mathbb{Z}}$

$|Qx_j - P| < \varepsilon$ con ε arbitrario!

$|Q(x_i - x_j)| \leq |Qx_j - P| + |Qx_i - P| \leq 2\varepsilon$

$\max |x_i - x_j| \leq \frac{2\varepsilon}{Q} \to 0 \Rightarrow x_i = x_j$

$\{n\alpha\}$ α irrazionale

è densa in $[0,1]$, cioè $\forall x \in [0,1]$

$\exists$ successione a_n t.c. $|\{\alpha \cdot a_n\} - x| < \frac{1}{n}$

mi basta che $\{n\alpha\}$ si avvicini arbitrariamente a 0

e questo lo faccio con Dirichlet

$a_n = \lfloor n \cdot \sqrt{2019} \rfloor$ contiene progressioni geom arbitrarie

Sol: se p è la ragione, vorrei $\lfloor p^k n\sqrt{2019} \rfloor = p^k \lfloor n\sqrt{2019} \rfloor$

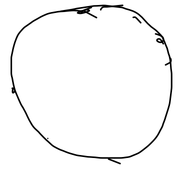
per $k \leq M$

$\lfloor p^k(\lfloor\ \rfloor + \{\ \}) \rfloor = p^k \lfloor\ \rfloor + \lfloor p^k \{\ \} \rfloor$

$\Longleftrightarrow p^k \{n\sqrt{2019}\} \leq 1$: TROVO n_0 t.c. $\{n_0\sqrt{2019}\} \leq \frac{1}{p^M}$

$a_n \in [0,1]$ è equidistribuita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i\le n \mid a \le a_i \le b\}}{n} = b-a$$



Teorema: a_n è equidistribuita $\iff$

$\forall r\geq 1$ intero vale $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i r a_j} = 0$

$\iff \displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum f(a_j)=\int_0^1 f(x)\,dx$ $\quad\forall f$ continua

Corollario: $\{\alpha m\}$ è equidistribuita

$$\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{n} e^{2\pi i r\alpha m} = \left(\frac{e^{\cdots}-1}{e^{2\pi i r\alpha}-1}\right)\frac{1}{n} \to 0$$

"quante sono" le potenze di 2 che cominciano per 2019?

$$2019\cdot 10^n \le 2^k < 2020\cdot 10^n$$

$$n\log_{10}10 + \log_{10}2019 \le k\log_{10}2 < \log_{10}2020 + n\log_{10}10$$

$$\{k\log_{10}2\}\in[\log_{10}2019, \log_{10}2020]$$

$$\log\frac{2020}{2019} \qquad \log\frac{M+1}{M}$$

$\{\alpha^n\}$ è equidistribuita? $\qquad \varphi^n + \underset{\downarrow\\ 0}{(1-\varphi)^n} \in \mathbb{Z}$

Fatto: $f\in\mathbb{R}[x]$ con termine di testa irrazionale $\Rightarrow \{f(n)\}$ è equidist.

sequenze di Beatty

r, s irrazionale con $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$

allora $\lfloor nr \rfloor$ e $\lfloor ns \rfloor$ partizionano $\mathbb{N}$

- collisioni?

$$K \leq nr < K+1 \qquad \frac{K}{r} \leq n < \frac{K+1}{r}$$

$$K \leq ms < K+1 \qquad \frac{K}{s} \leq m < \frac{K+1}{s} \qquad \oplus \quad K \leq m+n < K+1$$

- $nr < K \quad K+1 < (n+1)r$

$ms < K \quad K+1 < (m+1)s$

es: $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\mathbb{N}$ NON PUÒ essere partizionato in $\lfloor na \rfloor, \lfloor nb \rfloor, \lfloor nc \rfloor$

SENIOR 19 N2 ADVANCED Drago

Titolo nota 08/09/2019

Polinomi

fatto: $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ t.c. $f(n) \mid g(n)$ per infiniti $n \in \mathbb{Z}$
allora $g/f \in \mathbb{Q}[x]$

dim: $g(x) = q(x) f(x) + r(x)$ $\deg r < \deg f$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$$; a_n è la succ. t.c. $f(a_n) \mid g(a_n)$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{g(a_n)}{f(a_n)} = \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\uparrow}{q(a_n)}} + \frac{r(a_n)}{f(a_n)} \Rightarrow \frac{r(a_n)}{f(a_n)} \in \mathbb{Z}$$

dato che $a_n \to \infty$ e $\deg r < \deg f$ $\left|\frac{r(a_n)}{f(a_n)}\right| < 1$

$\Rightarrow r(a_n) = 0$ per $n \geq N$ $\Rightarrow r(x) \equiv 0$.

fatto: $f \in \mathbb{Z}[x]$ $\sqrt[k]{f(n)} \in \mathbb{Q}$ $\forall n \Rightarrow \exists g \in \mathbb{Q}[x]$ t.c. $f = g^k$

fatto: $f \in \mathbb{Z}[x]$. Allora $f(0), f(1), f(2), \dots$ ha infiniti divisori primi.

esercizio: $f, g \in \mathbb{Z}[x]$
- non costanti
- monici
- irriducibili

$f(n)$ e $g(n)$ hanno definitivamente gli stessi fattori primi. Allora $f = g$

sol: $\exists a, b \in \mathbb{Q}[x]$ t.c. $af + bg = 1$

$a, b \in \mathbb{Z}[x]$ $af + bg = N$

$f, g \in \mathbb{Z}[x,y]$ $\exists a, b \in \mathbb{Z}[x,y]$ $af + bg \in \mathbb{Z}[x]$

Teorema: a_n succ. di naturali con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

Allora esistono infiniti primi che dividono $\{a_n\}$.

dim: per assurdo, ogni a_n è prodotto di $p_1, \dots, p_r$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leq \sum_{\substack{x_1 \dots x_r \\ \in \mathbb{N}}} \frac{1}{p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r}} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right) < \infty$$

corollario: se $a_n < f(n)$ allora $\{a_n\}$ è divisa da infiniti primi

dim: $\exists K = \frac{1}{2\deg f}$ $\quad \sum \frac{1}{a_n^K} \to \infty$

fatto: $b \in \mathbb{N}$ $s < b$. $S = \{n \in \mathbb{N} \mid n$ scritto in base b NON ha la cifra $s\}$

Allora $\sum_{s \in S} \frac{1}{s} < \infty$

dim: fissiamo n = lunghezza della scrittura in base b

$b^{n-1} \leq s < b^n$ $\quad \frac{1}{s} \leq \frac{1}{b^{n-1}}$ $\quad$ il # di s senza cifre s è $(b-1)^n$

$$\sum_{s \in S} \frac{1}{s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} b \frac{(b-1)^n}{b^n} < \infty$$

fatto: $\exists$ infiniti interi n tali che $\pi(n) \mid n$.

lemma incredibile: se a_n è succ. crescente di interi con $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$, allora $\frac{n}{a_n}$ contiene TUTTI i naturali

dim: fissiamo m. $A = \{ n \geq 1 \mid a_{mn} \geq n \}$ $\quad \frac{a_{mn}}{mn} \geq \frac{1}{m}$

$1 \in A$ $\quad \exists k \in A$ massimo. $\boxed{\frac{a_{mk}}{mk} = \frac{1}{m}}$

se fosse $a_{mk} \geq k+1$ $\quad a_{m(k+1)} \geq a_{mk} \geq k+1 \implies k+1 \in A$

$\frac{mk}{a_{mk}} = m$.

serve controllare che $\frac{\pi(n)}{n} \to 0$ $\quad \pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$

$$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n \qquad \sum \log p \leq n \log 4$$

$$\sum_{p \leq k} \log p + \sum_{n \geq p > k} \log p \geq (\pi(n) - \pi(k)) \log k$$

$$\pi(n) \leq \frac{n \log 4}{\log k} + \pi(k) \quad \text{vera } \forall\, n \geq k$$

fissiamo k, dividiamo per n $\quad \frac{\pi(n)}{n} \leq \frac{\log 4}{\log k} + \frac{\pi(k)}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} \leq \frac{\log 4}{\log k}$ $\quad$ adesso anche $k \to \infty$ e otteniamo $\lim \frac{\pi(n)}{n} = 0$

es: $f(n) = an^2 + bn + c$. Se $f(n)$ è quadrato $\forall n \Rightarrow f = g^2$ con $g \in \mathbb{Z}[x]$

sol: $f(n) = x_n^2$ $\quad x_n \in \mathbb{Z} \quad x_n \sim n \cdot \sqrt{a}$

$$y_n = x_n - n\sqrt{a} = \frac{(x_n - n\sqrt{a})(x_n + n\sqrt{a})}{x_n + n\sqrt{a}} = \frac{x_n^2 - n^2 a}{x_n + n\sqrt{a}} = \frac{bn + c}{n\sqrt{a} + x_n} \longrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\frac{b + \frac{c}{n}}{\sqrt{a} + \sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}} \longrightarrow \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

ma allora $y_{n+1} - y_n \longrightarrow 0 \qquad x_{n+1} - (n+1)\sqrt{a} - (x_n + n\sqrt{a}) \longrightarrow 0$

$$x_{n+1} - x_n \overset{\shortparallel}{-} \sqrt{a}$$

$x_{n+1} - x_n \longrightarrow \sqrt{a}$

$\cap \mathbb{Z}$ $\qquad \sqrt{a} \in \mathbb{Z}$, cioè $a = A^2 \qquad x_{n+1} - x_n = A$ per $n \geq N$

$$x_{N+m}^2 = (x_N + mA)^2$$

$$ax^2 + bx + c$$

$$x \equiv -c/b \mod p$$

$$ax^2 \equiv t^2 \mod p$$

a residuo quadratico.

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \qquad \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$$

$$p, q \qquad \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_n^{\alpha_n} \qquad q_1, q_2 \ldots q_k$$

$$1 = \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right)\left(\frac{q_3}{p}\right) \cdots \left(\frac{q_k}{p}\right) \qquad \text{Se } p \equiv 1\ [4]$$

$$= \left(\frac{p}{q_1}\right)\cdot\left(\frac{p}{q_2}\right)\cdot\left(\frac{p}{q_3}\right)\cdots\left(\frac{p}{q_k}\right)$$

$p \equiv 1 \mod q_1, q_2 \ldots q_{k-1}$

p non residuo mod q_k

$\Rightarrow$ $q_1 \ldots q_k$ non esistono

$\Rightarrow$ tutti gli esponenti pari

$\Downarrow$

$D = A^2$

$f \in \mathbb{Z}[x]$ monico t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n$ t.c. $P(x_n) = 2^n$. $\deg f = 1$:

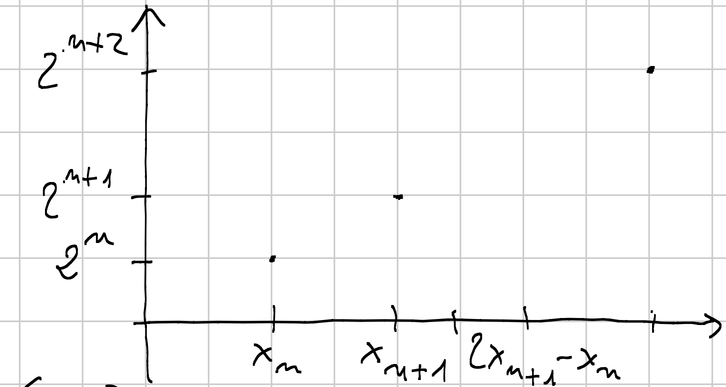
$\{x_n\}$ è definitivamente crescente.

$x_{n+1} - x_n \mid 2^n$, $2^{a_n} = x_{n+1} - x_n$

$\deg f \geq 2$, f_n è definitivamente convessa

$x_{n+2} - x_n \mid 3 \cdot 2^n$

$2^{a_n} + 2^{a_{n+1}} \mid 3 \cdot 2^n \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| \leq 1.$



$\{a_n\}$ è definitivamente debolmente decrescente

$a = x_n$, $d = x_{n+1} - x_n$

$P(a+2d) - P(a+d) \geq 2[P(a+d) - P(a)]$

$a 2^n + b = x_n^2$

$a \neq 0$

$x_{n+2} - 2x_n = \sqrt{a 2^{n+2} + b} - \sqrt{a 2^{n+2} + 4b}$

tende a 0

n suf. grande

$x_{n+2} = 2x_n$

$a 2^{n+2} + b = a 2^{n+2} + 4b \Rightarrow b = 0$

$a 2^n = x_n^2$

ASSURDO

$a = 0$