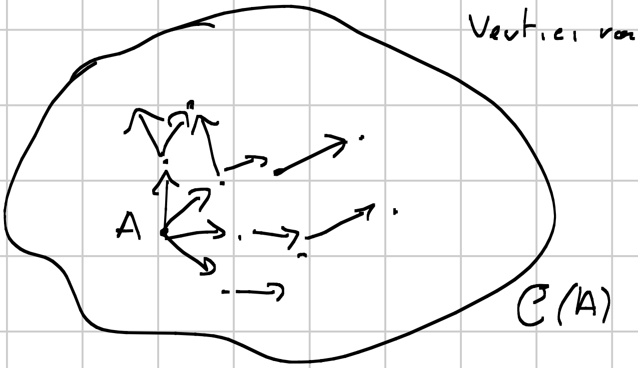
# C2 Advanced

② Grafo orientato k-regolare ($\forall$ vert. k entranti e k uscenti) connesso (trascurando l'orientazione) $\Rightarrow$ è fortemente connesso ($\forall A, B$ $\exists$ camm. orientato da A a B).



Vertici raggiungibili da A con cammino orientato.

i) Non ci sono frecce uscenti da C(A)

ii) Ci sono frecce entranti in C(A)? Se no, abbiamo vinto perché allora $C(A) = G \ni B$

$|C(A)| = m$

Quante frecce escono dai $v \in C(A)$ in totale? $m \cdot k$

Ma queste sono $m \cdot k$ frecce che arrivano sui $v \in C(A)$ che è il numero totale di frecce entranti sui $v \in C(A)$

$\Rightarrow$ non ci possono essere altre frecce entranti da fuori. ☐

③ Versione facile: $\overset{|A|=n}{A}$ $A_1 \dots A_{n+1}$ non vuoti allora esistono $I, J$ disg. $\subset \{1, \dots, n+1\}$ t.c. $\bigcup A_i = \bigcup A_j$

Trasf. con l'algebra lineare: $\chi_{A_i}$ funz. caratteristica di $A_i$. (= vettore di 0 e 1). Ma ci sono $n+1$ vettori quindi in $\mathbb{R}^n$ sono lin. dipendenti, cioè $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$ non tutti nulli t.c. $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i \cdot \chi_{A_i} = (0, \dots 0)$. Ma allora ci sono alcuni $\lambda_i > 0$ alcuni $\lambda_i = 0$ e alcuni $\lambda_i < 0$. Tolgo i $\lambda_i = 0$ e separo quelli positivi da quelli negativi:

$$\sum_{i | \lambda_i > 0} \lambda_i \chi_{A_i} = \sum_{i | \lambda_i < 0} (-\lambda_i) \chi_{A_i}$$

Ma allora le posizioni

in cui il valore è >0 a sinistra e a destra sono le stesse e, poiché tutti i coeff. sono positivi, sono $\bigcup_{i|\lambda_i>0} A_i$ e $\bigcup_{i|\lambda_i<0} A_i$. $I=\{i|\lambda_i>0\}$ $J=\{i|\lambda_i<0\}$ funzionano

E il problema originale?

$$A_i \longmapsto v_{A_i} = (\chi_{A_i}, \overset{\text{complementare di } A_i.}{\chi_{A_i^c}}) \subseteq \mathbb{R}^{2n}$$

Sia W lo spazio più piccolo che contiene $v_{A_1}, \dots v_{A_{n+2}}$ (sottosp. vettoriale generato da $v_{A_1} \dots v_{A_{n+2}}$)

dim W?    dim sp. generato da $\chi_{A_i} \leq n$.

ma $\chi_{A_i} + \chi_{A_i^c} = (1,1,\dots,1)$. Da questo discende che dim $W \leq$ (dim. sp. generata da $\chi_{A_i}$) $+1. \leq n+1$

Ma allora $v_{A_1} \dots v_{A_{n+2}}$ sono $n+2$ vettori in uno sp. vett. di dim. $n+1$ $\Rightarrow$ esiste una relazione $\sum \lambda_i v_{A_i} = 0$. Ora separo, e considero per segni $\lambda_i$ le parti sinistre e destre e ottengo

$$\bigcup_I A_i = \bigcup_J A_j \quad e \quad \bigcap_I A_i = \bigcap_J A_j.$$

□

④ Matrice $2n \times m$ di $\overset{M}{\text{ragazzi}}$ e $\overset{F}{\text{ragazze}}$. Per ogni 2 colonne $i,j$ il numero di righe in cui il genere è diverso è $\geq$ al numero di righe per cui il genere è uguale. Stima per $\# M$?

$$2n \text{ righe} \quad i\cdot\begin{pmatrix} \cdots\cdots\cdots \\ \\ \\ \end{pmatrix} \quad M_i \text{ maschi}, \; m - M_i \text{ femmine.}$$

$N =$ tot. delle diff. di genere $\geq \binom{m}{2} \cdot n$

$$\overset{\displaystyle N}{\|} \; \sum_{i=1}^{2n} M_i(m-M_i) \qquad \sum M_i = M \qquad x(m-x) \text{ è concava}$$

$$\frac{1}{\cancel{2n}}\sum_{i=1}^{2n} M_i(m-M_i) \le \frac{M}{\cancel{2n}}\left(m-\frac{M}{2n}\right)$$

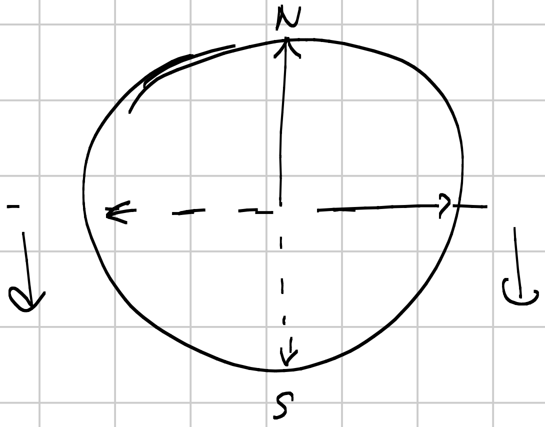
$$2Mm-\frac{M^2}{\cancel{2}n} \geq \frac{nm(m-1)}{\cancel{2}} \qquad M^2-2nmM+n^2m(m-1)\le 0.$$

Quindi $nm-n\sqrt{m} \le M \le nm+n\sqrt{m}$

Oss. se $F=+1$ $M=-1$ diff. genere $\geq$ uguaglianze di genere

$\iff$ $C_i \cdot C_j \le 0.$

Teo. in $\mathbb{R}^n$ non ci possono essere più di $2n$ vettori con angoli a due a due $\geq \frac{\pi}{2}$.



⑤ Numero disp. di classi, con num. disp. di studenti ciascuna. Si sceglie 1 studente da ciascuna. TFAE:

1) Ci sono più modi di scegliere # disp. di maschi che un # disp. di femmine

2) Le classi con più maschi che femmine sono un # dispari

<u>Soluzione</u> $p(x)=\prod_{i=1}^{k}(M_ix+F_i)$

$p(-1)<0 \iff$ vale 2)

Il conto mostra che è anche vero $p(-1)\le 0 \iff$ vale 1)

sviluppando il prodotto si ottiene la sommatoria che determina se vale 1).

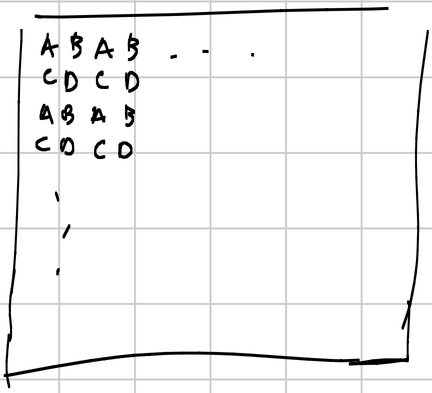
⑥ La torre zoppa è una torre che muove di 1. C'è una torre zoppa su una scacchiera 999 × 999. Due mosse successive devono essere ortogonali. Quanto è lungo il più lungo percorso semplice ciclico che la torre può fare?

Coloriamo con 4 colori

A sono 500 × 500

B, C sono 499×500

D sono "solo" 499×499.



Oss. Un percorso semplice ciclico tocca lo stesso numero di caselle dei 4 colori: ogni 2 mosse $A \to D$ o $D \to A$.
$B \to C$ o $C \to B$

Ora max $\leq 4 \cdot 499^2$. Però le D sono un num. disp. e le posso colorare a loro volta a scacchiera e dimostro che ogni 4 devo cambiare colore $D_1 - D_2$ o $D_2 - D_1$ $\Rightarrow$ toccherò un num. pari di D $\to$ max $\leq 4 \cdot (499^2 - 1)$

Una costruzione mostra che questo numero è effettivamente raggiungibile.