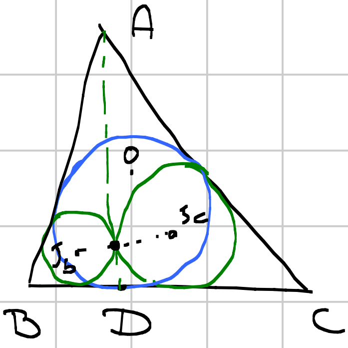
G2 - Advanced

Titolo nota — 09/09/2019

Es 0 ABC triangolo, D pt di tg. tra inscritta e BC.
J_b, J_c incentri di $A\hat{B}D$ e $A\hat{C}D$. Allora il circocentro di AJ_bJ_c giace sulla bisettrice uscente da A. [RMM '15/4]



Sol: O = circocentro di AJ_bJ_c

$AB - BD = AC - CD$

$AB + AD - BD = AC + AD - CD$

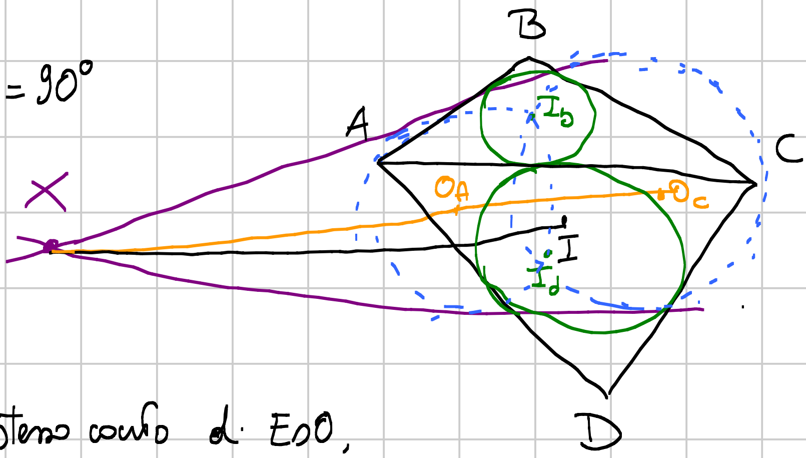
$\Rightarrow$ le circonf. verdi sono tg a AD nello stesso punto $\Rightarrow$ tg tra di loro

$\Rightarrow AD \perp J_bJ_c$ ovvero AD è altezza in AJ_bJ_c.

$\Rightarrow$ AO simm. di AD risp. alla bisett. di $J_b\hat{A}J_c$

$$B\hat{A}O = B\hat{A}J_b + J_b\hat{A}O = B\hat{A}J_b + D\hat{A}J_c = J_b\hat{A}D + D\hat{A}J_c = \frac{1}{2}B\hat{A}C.$$

Es 4 Th: $X\hat{I}Y = 90°$



Sol: Con lo stesso conto di Es0, ottengo che le circonf. verdi hanno AC come tangente comune

$\Rightarrow I_bI_d \perp AC$

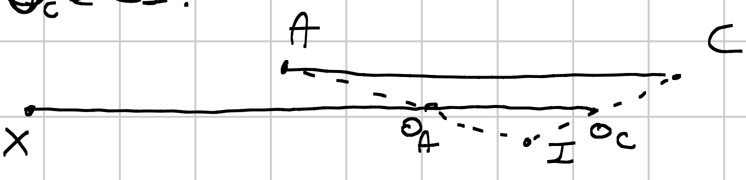
e se chiamo O_A e O_C i circocentri di AI_bI_d e CI_bI_d, allora

$\Rightarrow O_AO_C \parallel AC$.

RMM '15/4

$$B\hat{A}O_A = B\hat{A}I_b + I_b\hat{A}O_A = I_b\hat{A}C + C\hat{A}I_d = \frac{1}{2}B\hat{A}D \Rightarrow O_A \in AI$$

analogamente $O_C \in CI$.



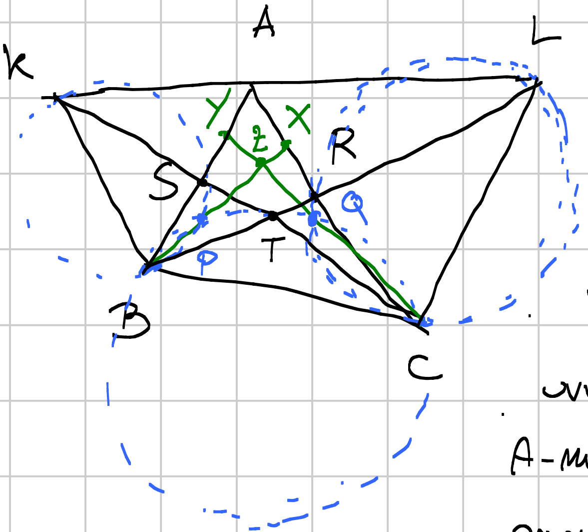
$$\frac{XO_A}{XO_C} = \frac{R_A}{R_C} = \frac{O_AA}{O_CC} = \frac{O_AI}{O_CI}$$

$\Rightarrow$ X è piede della bisett. esterna di $A\hat{I}C$

ovvero della bisett interna di $B\hat{I}D$.

Idem per Y $\Rightarrow$ ho finito.

Es 1



Il centro radicale di (BSK), (CLR), (BTC) sta sulla mediana da A.

Voglio dim che $\mathcal{L} \in$ mediana per A ovvero che

A-mediana, BX, CY concorrono

ovvero che (per Ceva)

$$\frac{AX}{AC} = \frac{AY}{AB}$$

$SX \parallel BR \iff$
$X\hat{S}C = R\hat{T}C = \pi - B\hat{T}C =$
$= \pi - B\hat{P}C = X\hat{P}C$
$\iff XSPC$ ciclico.

Hope: $SX \parallel BR$

da qui: $\frac{AX}{AR} = \frac{AS}{AB}$

$$\frac{AX}{AC} = \frac{AS}{AB}\cdot\frac{AR}{AC} \to \text{è "simmetrica"} \Rightarrow \text{fine.}$$

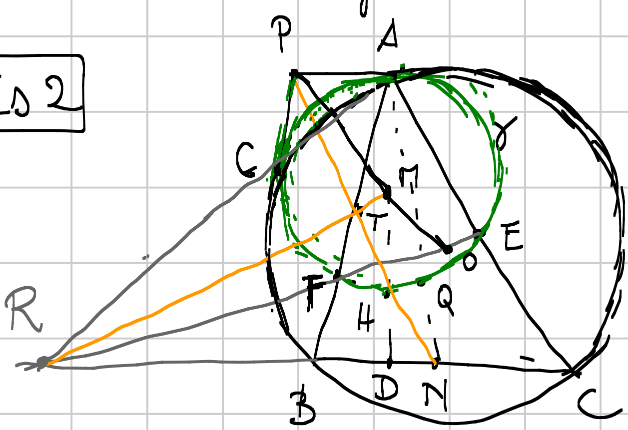
Mi basta dim $XSPC$ ciclico (e $BQRY$)

$B\hat{K}C = K\hat{C}A$

$B\hat{K}C = \pi - B\hat{P}S = S\hat{P}X \longrightarrow S\hat{C}X = K\hat{C}A = S\hat{P}X \Rightarrow XSPC$ ciclico

e ho finito.

Es 2



$(GNQ) \cap (BMC) \ni T$ che sta su PN

E, F piedi delle altezze.

Assi radicali $\Rightarrow AG, EF, BC$ concorrono in R.

PA è tg. alla cf. verde in A $(P\hat{A}H = 90^\circ)$ $(PA \parallel BC)$

$\Rightarrow P = pol_\gamma(AG)$ $N = pol_\gamma(EF)$ $\leftarrow$ Feuerbach

$\Rightarrow PN = pol_\gamma(R) \longrightarrow$ inverso di R risp. a γ sta su PN ed è $PN \cap RM = T$

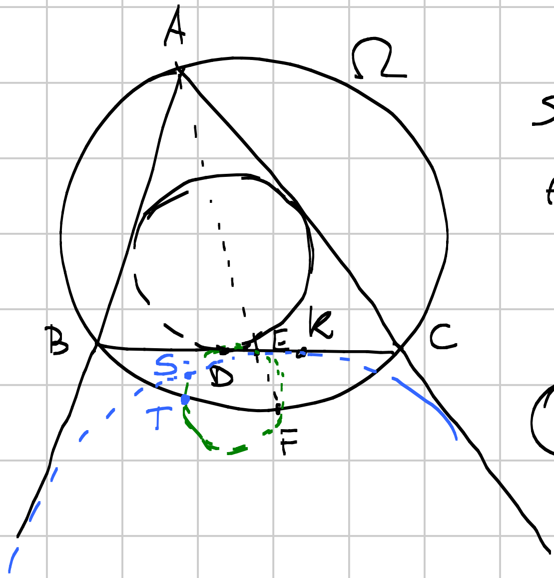
$\Rightarrow RT \perp PN$. $R\hat{T}N = 90^\circ$

G, H, N allineati $\Rightarrow H$ ortocentro di ARN.

La cfr. di diam RN passa per G, T, Q $\Rightarrow$ $RT \cdot RM = RE \cdot RF = RB \cdot RC$

$\Rightarrow T \in (MBC)$

$\boxed{\text{Es 3}}$



$S \in AT$

$AT \cap \omega_A \in (DEF)$

l'interse. interna al segmento AT.

(I) $S = AT \cap \omega_A$ come sopra..

$\Rightarrow T =$ pt. di tangenza dell'inscritto mistilinea opposto ad A.

$K =$ tg di ω_A su BC

$\Rightarrow$ INV di raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$ + simm manda T in K.

$\Rightarrow AS = AK$

$AS \cdot AT = AK \cdot AT = AB \cdot AC = AE \cdot AF$ $\Rightarrow$ STEF è ciclico.

$\Rightarrow S \in$ cfr. per D, E, F.

(II) le cfr. (DEF) e (EFK) sono congruenti.

$\Rightarrow$ se rifletto K in EF, ottengo $S' \in (DEF)$

$I_A \in EF$, $K \in \omega_A$ $\Rightarrow S' \in \omega_A$

$S' \in AT$ perché AT e AK sono coniug. isog $\Rightarrow$ fine