SENIOR 19 N1 ADV Drago

Approx diofantea

Lemma (Dirichlet): $\forall \alpha$ irrazionale $\exists$ infiniti $p, q \in \mathbb{Z}$

tali che $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{q^2}$

Dirichlet ++: $\alpha_1, \dots, \alpha_K \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ $\exists n, p_1, \dots, p_K \in \mathbb{Z}$

$|n\alpha_i - p_i| < \varepsilon$

dim: $N > \frac{1}{\varepsilon}$ $\quad M = N^K + 1$

$\forall i = 1, \dots, M$ $\quad \{i\alpha_j\} \in \left[\frac{a_{ij}}{N}, \frac{a_{ij}+1}{N}\right]$

$\exists\, i, j \leq M$ t.c. $\{i\alpha_h\}$ e $\{j\alpha_h\}$ stanno negli stessi intervallini, $\forall h$, cioè $|\{i\alpha_h\} - \{j\alpha_h\}| \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$

$m = i - j$

$x_1, \dots, x_{2n+1} \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall i$ posso dividere gli x_j, $j \neq i$ in due gruppi da n elementi con la stessa somma

Dimostra che tutti i numeri sono uguali.

Sol: se sono interi/razionali è facile

Fissato ε $\exists\, q, p_1, \dots, p_{2n+1}$ t.c. $|qx_i - p_i| < \varepsilon$

fissiamo i $\exists a_{ij}$ $\sum_{j=1}^{2n+1} x_j a_{ij} = 0$

$$\left|\sum a_{ij} p_j\right| = \left|\sum a_{ij} p_j - q x_j a_{ij} + q x_j a_{ij}\right| \leq \sum |a_{ij} p_j - q x_j a_{ij}| + \sum q x_j a_{ij}$$

$$\sum |a_{ij}| \, |q x_j - p_j| \leq (2n)\varepsilon \quad \text{per } \varepsilon < \frac{1}{2n},$$

$$\underbrace{\left|\sum a_{ij} p_j\right|}_{\in \mathbb{Z}} < 1 \Rightarrow \sum a_{ij} p_j = 0 \Rightarrow p_i = P$$

$$|Q x_j - P| < \varepsilon \quad \text{con } \varepsilon \text{ arbitrario!}$$

$$|Q(x_i - x_j)| \leq |Q x_j - P| + |Q x_i - P| \leq 2\varepsilon$$

$$\max |x_i - x_j| \leq \frac{2\varepsilon}{Q} \to 0 \Rightarrow x_i = x_j$$

$\{n\alpha\}$ α irrazionale

è densa in $[0,1]$, cioè $\forall x \in [0,1]$

$\exists$ successione a_n t.c. $|\{\alpha \cdot a_n\} - x| < \frac{1}{n}$

mi basta che $\{n\alpha\}$ si avvicini arbitrariamente a 0

e questo lo faccio con Dirichlet

$a_n = \lfloor n \cdot \sqrt{2019} \rfloor$ contiene progressioni geom arbitrarie

Sol: se p è la ragione, vorrei $\lfloor p^k n \sqrt{2019} \rfloor = p^k \lfloor n\sqrt{2019} \rfloor$

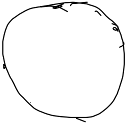
per $k \leq M$

$$\lfloor p^k(\lfloor\ \rfloor + \{\ \}) \rfloor = p^k \lfloor\ \rfloor + \lfloor p^k \{\ \} \rfloor$$

$\iff p^k \{n\sqrt{2019}\} \leq 1$ TROVO n_0 t.c. $\{n_0\sqrt{2019}\} \leq \frac{1}{p^M}$

$a_n \in [0,1]$ è equidistribuita

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\#\{i \le n \mid a \le a_i \le b\}}{n} = b - a$$



Teorema: a_n è equidistribuita $\iff$

$\forall r \ge 1$ intero vale $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i r a_j} = 0$

$\iff \displaystyle \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum f(a_j) = \int_0^1 f(x)\,dx$ $\quad \forall f$ continua

Corollario: $\{\alpha m\}$ è equidistribuita

$$\frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} e^{2\pi i r \alpha m} = \left(\frac{e^{\cdots} - 1}{e^{2\pi i r \alpha} - 1}\right) \frac{1}{n} \to 0$$

"quante sono" le potenze di 2 che cominciano per 2019?

$$2019\cdot 10^n \le 2^k < 2020\cdot 10^n$$

$$n\log_{10}10 + \log_{10}2019 \le k\log_{10}2 < \log_{10}2020 + n\log_{10}10$$

$$\{k\log_{10}2\} \in [\log_{10}2019, \log_{10}2020]$$

$$\log\frac{2020}{2019} \qquad \log\frac{M+1}{M}$$

$\{\alpha^n\}$ è equidistribuita? $\qquad \varphi^n + \underbrace{(1-\varphi)^n}_{\downarrow\, 0} \in \mathbb{Z}$

Fatto: $f\in\mathbb{R}[x]$ con termine di testa irrazionale $\Rightarrow \{f(n)\}$ è equidist.

sequenze di Beatty

r, s irrazionale con $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$

allora $\lfloor nr \rfloor$ e $\lfloor ns \rfloor$ partizionano $\mathbb{N}$

- collisioni?

$$K \leq nr < K+1 \qquad \frac{K}{r} \leq n < \frac{K+1}{r}$$

$$K \leq ms < K+1 \qquad \frac{K}{s} \leq m < \frac{K+1}{s} \quad \oplus \quad K \leq m+n < K+1$$

- $nr < K \quad K+1 < (n+1)r$

$ms < K \quad K+1 < (m+1)s$

es: $a, b, c \in \mathbb{R}$ $\mathbb{N}$ NON PUÒ essere partizionato in $\lfloor na \rfloor, \lfloor nb \rfloor, \lfloor nc \rfloor$