POLINOMI

fatto: $f, g \in \mathbb{Z}[x]$ t.c. $f(n) \mid g(n)$ per infiniti $n \in \mathbb{Z}$
allora $g/f \in \mathbb{Q}[x]$

dim: $g(x) = q(x)f(x) + r(x)$ $\deg r < \deg f$

$$\frac{g(x)}{f(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{f(x)}$$; a_n è la succ. t.c. $f(a_n) \mid g(a_n)$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{g(a_n)}{f(a_n)} = \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{q(a_n)}} + \frac{r(a_n)}{f(a_n)} \implies \frac{r(a_n)}{f(a_n)} \in \mathbb{Z}$$

dato che $a_n \to \infty$ e $\deg r < \deg f$ $\left|\frac{r(a_n)}{f(a_n)}\right| < 1$

$\implies r(a_n) = 0$ per $n \geq N \implies r(x) \equiv 0$.

fatto: $f \in \mathbb{Z}[x]$ $\sqrt[k]{f(n)} \in \mathbb{Q}$ $\forall n \implies \exists g \in \mathbb{Q}[x]$ t.c. $f = g^k$

fatto: $f \in \mathbb{Z}[x]$. Allora $f(0), f(1), f(2), \dots$ ha infiniti divisori primi.

esercizio: $f, g \in \mathbb{Z}[x]$
- non costanti
- monic
- irriducibili

$f(n)$ e $g(n)$ hanno definitivamente gli stessi fattori primi. Allora $f = g$

sol: $\exists a, b \in \mathbb{Q}[x]$ t.c. $af + bg = 1$

$a, b \in \mathbb{Z}[x]$ $af + bg = N$

$f, g \in \mathbb{Z}[x, y]$ $\exists a, b \in \mathbb{Z}[x, y]$ $af + bg \in \mathbb{Z}[x]$

Teorema: a_n succ. di naturali con $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} = \infty$

Allora esistono infiniti primi che dividono $\{a_n\}$.

dim: per assurdo, ogni a_n è prodotto di $p_1, \dots, p_r$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \leq \sum_{x_1 \dots x_r \in \mathbb{N}} \frac{1}{p_1^{x_1} \cdots p_r^{x_r}} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 + \frac{1}{p_i} + \frac{1}{p_i^2} + \dots\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{1-\frac{1}{p_i}}\right) < \infty$$

corollario: se $a_n \leq f(n)$ allora $\{a_n\}$ è divisa da infiniti primi

dim: $\exists K = \frac{1}{2 \deg f}$ $\quad \sum \frac{1}{a_n^K} \to \infty$

fatto: $b \in \mathbb{N}$ $s < b$. $S = \{ n \in \mathbb{N} \mid n$ scritto in base b NON ha la cifra $s \}$

Allora $\sum_{s \in S} \frac{1}{s} < \infty$

dim: fissiamo n = lunghezza della scrittura in base b

$b^{n-1} \leq s < b^n$. $\quad \frac{1}{s} \leq \frac{1}{b^{n-1}}$ $\quad$ il # di s senza cifre s è $(b-1)^n$

$$\sum_{s \in S} \frac{1}{s} \leq \sum_{n=1}^{\infty} b \frac{(b-1)^n}{b^n} < \infty$$

---

fatto: $\exists$ infiniti interi n tali che $\pi(n) \mid n$.

lemma incredibile: se a_n è succ. crescente di interi con $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = 0$, allora $\frac{n}{a_n}$ contiene TUTTI i naturali

dim: fissiamo m. $A = \{ n \geq 1 \mid a_{mn} \geq n \}$ $\quad \frac{a_{mn}}{mn} \geq \frac{1}{m}$

$1 \in A$ $\quad \exists k \in A$ massimo. $\boxed{\frac{a_{mk}}{mk} = \frac{1}{m}}$

se fosse $a_{mk} \geq k+1$ $\quad a_{m(k+1)} \geq a_{mk} \geq k+1 \Rightarrow k+1 \in A$

$\frac{mk}{a_{mk}} = m$.

serve controllare che $\frac{\pi(n)}{n} \to 0$ $\quad \pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$

$\prod_{p \leq n} p \leq 4^n$ $\quad \sum \log p \leq n \log 4$

$$\sum_{p \leq k} \log p + \sum_{n \geq p > k} \log p \geq (\pi(n) - \pi(k)) \log k$$

$\pi(n) \leq \frac{n \log 4}{\log k} + \pi(k)$ vera $\forall\, n \geq k$

fissiamo k, dividiamo per n $\quad \frac{\pi(n)}{n} \leq \frac{\log 4}{\log k} + \frac{\pi(k)}{n}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{\pi(n)}{n} \leq \frac{\log 4}{\log k}$ $\quad$ adesso anche $k \to \infty$ e otteniamo $\lim \frac{\pi(n)}{n} = 0$

es: $f(n) = an^2 + bn + c$. Se $f(n)$ è quadrato $\forall n \Rightarrow f = g^2$ con $g \in \mathbb{Z}[x]$

sol: $f(n) = x_n^2$ $\quad x_n \in \mathbb{Z} \quad x_n \sim n \cdot \sqrt{a}$

$$y_n = x_n - n\sqrt{a} = \frac{(x_n - n\sqrt{a})(x_n + n\sqrt{a})}{x_n + n\sqrt{a}} = \frac{x_n^2 - n^2 a}{x_n + n\sqrt{a}} = \frac{bn + c}{n\sqrt{a} + x_n} \longrightarrow z \in \mathbb{R}$$

$$\frac{b + \frac{c}{n}}{\sqrt{a} + \sqrt{a + \frac{b}{n} + \frac{c}{n^2}}} \longrightarrow \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

ma allora $\quad y_{n+1} - y_n \longrightarrow 0 \qquad x_{n+1} - (n+1)\sqrt{a} - (x_n + n\sqrt{a}) \longrightarrow 0$

$$x_{n+1} - x_n - \sqrt{a}$$

$$\underbrace{x_{n+1} - x_n}_{\in \mathbb{Z}} \longrightarrow \sqrt{a}$$

$\sqrt{a} \in \mathbb{Z}$, cioè $a = A^2 \qquad x_{n+1} - x_n = A$ per $n \geq N$

$$x_{N+n}^2 = (x_N + nA)^2$$

$$ax^2 + bx + c$$

$$x \equiv -c/b \mod p$$

$$ax^2 \equiv t^2 \mod p$$

a residuo quadratico

$$\left(\frac{a}{p}\right) = 1 \qquad \left(\frac{ab}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) \cdot \left(\frac{b}{p}\right)$$

$p, q \qquad \left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}$

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdots p_n^{\alpha_n} \qquad q_1, q_2 \dots q_k$$

$$1 = \left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{q_1}{p}\right)\left(\frac{q_2}{p}\right)\left(\frac{q_3}{p}\right) \cdots \left(\frac{q_k}{p}\right) \qquad \text{se } p \equiv 1\ [4]$$

$$= \left(\frac{p}{q_1}\right)\cdot\left(\frac{p}{q_2}\right)\cdot\left(\frac{p}{q_3}\right)\cdots\left(\frac{p}{q_k}\right)$$

$p \equiv 1 \mod q_1, q_2 \dots q_{k-1}$

p non residuo mod q_k

$\Rightarrow$ $q_1 \dots q_k$ non esistono

$\Rightarrow$ tutti gli esponenti pari

$\downarrow$

$d = A^2$

$f \in \mathbb{Z}[x]$ monico t.c. $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists\, x_n$ t.c. $P(x_n) = 2^n$. $\deg f = 1$:

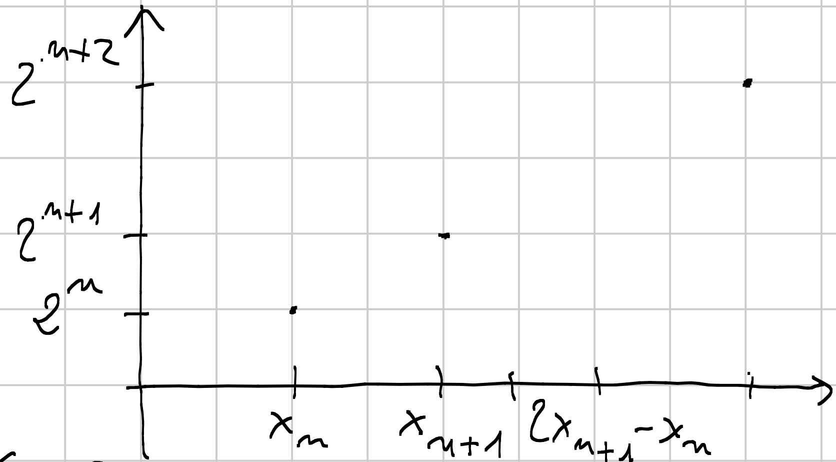
$\{x_n\}$ è definitivamente crescente.

$x_{n+1} - x_n \mid 2^n$, $2^{a_n} = x_{n+1} - x_n$

$\deg f \geq 2$, f_n è definitivamente convessa

$x_{n+2} - x_n \mid 3 \cdot 2^n$

$2^{a_n} + 2^{a_{n+1}} \mid 3 \cdot 2^n \Rightarrow |a_{n+1} - a_n| \leq 1$.



$\{a_n\}$ è definitivamente debolmente decrescente

$a = x_n$, $d = x_{n+1} - x_n$

$P(a+2d) - P(a+d) \geq 2[P(a+d) - P(a)]$

$$a2^n + b = x_n^2$$

$a \neq 0$

$$x_{n+2} - 2x_n = \sqrt{a2^{n+2}+b} - \sqrt{a2^{n+2}+4b}$$

tende a 0

n suff. grande

$$x_{n+2} = 2x_n$$

$$a2^{n+2} + b = a2^{n+2} + 4b \Rightarrow b = 0$$

$$a2^n = x_n^2$$

ASSURDO

$a = 0$