Stage Senior 2019 – Livello Basic

Stampato integrale delle lezioni

Autori vari

Indice

ALGEBRA 1

Poly: $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, \dots)$

$\Updownarrow$

$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$

TERMINE NOTO

$\deg P = \max\{k \mid a_k \neq 0\}$

$a_{\deg P}$: LEADING COEF. / COEF. DIRETTI VO

PROB 1: Trova tutti i polys $P(x)$, $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ t.c.

insieme dei polys a coef. reali

$$\underline{P(Q(x)^2)} = \underline{P(x) \cdot Q(x)^2}$$

Sol:

OSS 1: Siano $A(x) = a_n x^n + \dots + a_0$
$B(x) = b_m x^m + \dots + b_0$
Polys, $a_n, b_m \neq 0$

$$\deg A(B(x)) = \deg A \cdot \deg B$$
$$\deg [A(x) \cdot B(x)] = \deg A + \deg B$$

$$\deg[A(x)+B(x)] \leq \max\{\deg A, \deg B\}$$

$\deg P = p \quad , \deg Q = q$

$\Rightarrow \deg Q^2 = 2q$,
$\deg P(Q(x)^2) = 2pq$
$\deg [P(x)\, Q(x)^2] = p + 2q$

$p + 2q = 2pq$

$\Leftrightarrow \quad \underline{(p-1)}\,\underline{(2q-1)} = 1$

- Soluzioni costanti (ESERCIZIO)
- Sol. non cost. $p = 2$, $q = 1$

- Se P, Q sono soluz $\Rightarrow \lambda P, Q$ sono soluzioni, $\lambda \in \mathbb{R}$

WLOG P mònico (coef diretivo 1)

- Sia q_0 il coef. dir. di Q

$$q_e^4 = q_0^2 \implies q_0 = \pm 1$$

- $Q(x) = x - t$ oppure $Q(x) = t - x$

$$\underline{Q(x)^2 = (x-t)^2}$$

$$P(Q^2(x)) = P(x) \cdot Q^2(x)$$

$$x = t \implies \underset{\substack{\parallel \\ \text{termine noto di } P}}{P(0)} = 0$$

$$P(x) = x^2 + ax = x(x+a)$$

$$\cancel{(x-t)^2}\left[(x-t)^2 + a\right] = x(x+a)\cancel{(x-t)^2}$$

PROB 2 : $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0 \in \mathbb{R}[x]$

$, n \geq 1 \qquad |P(0)| = P(1)$

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ le radice e comprese tra 0 e 1 $(\alpha_i \in [0,1])$

Dimostrare che

$$\alpha_1 \cdots \alpha_m \leq \frac{1}{2^m}$$

Th di Ruffini: $P(x)$ Poly

$(x-\alpha) \mid P(x)$ se e solo se $P(\alpha) = 0$.

In particolare $P(x) = (x-\alpha) \cdot Q(x)$ per qualche polinomio Q

OSS: Supponiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ radici di P

$$P(\alpha_1) = 0 \implies P(x) = (x-\alpha_1) \cdot Q_1(x)$$
$$P(\alpha_2) = 0 \implies Q_1(\alpha_2) = 0$$
$$\implies Q_1(x) = (x-\alpha_2) Q_2(x)$$

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) Q_2(x) = \dots$$
$$= (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_k) Q_k(x)$$

$$\deg Q_k = \deg P - k$$

Sol.

$$\deg Q_m = 0 \implies Q_m(x) \equiv C$$

$$P(x) = \cancel{c}\,(x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_m)$$

$$|P(0)| = P(1) \implies$$

$$|(-\alpha_1)\cdots(-\alpha_m)| = (1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_m)$$

$$\underset{\displaystyle \alpha_1 \cdots \alpha_m}{\shortparallel}$$

Se $\alpha \in [0,1]$ allora

$$\alpha(1-\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \alpha - \alpha^2 = \frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\leq \frac{1}{4}$$

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_m)^2 = \alpha_1 \cdots \alpha_m \cdot (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_m)$$

$$= [\alpha_1(1-\alpha_1)] \cdots [\alpha_m(1-\alpha_m)] \leq$$

$$\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{4} = \frac{1}{4^m} = \frac{1}{2^{2m}}$$

$$\implies \alpha_1 \cdots \alpha_m \leq \frac{1}{2^m}$$

PROB 3 $\quad P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$

insieme dei polys a coef. interi

a, b, c distinti. Dimostrare che non può succedere

$$\begin{cases} P(a) = b \\ P(b) = c \\ P(c) = a \end{cases}$$

Th: Sia $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a, b \in \mathbb{Z}$ $(a \neq b)$

allora $a - b \mid P(a) - P(b)$

Dim: $T(x) = P(x) - P(y)$, $y \in \mathbb{Z}$

y è radice di T

$$P(x) - P(y) = T(x) = (x-y)\,Q(x)$$

Considera $y = b$, $x = a$

$$P(a) - P(b) = (a-b)\,Q(a)$$

Basta dim. che $Q \in \mathbb{Z}[x]$

Questo è vero perché Q è ottenuto dalla divisione di un poly a coef interi per un poly monico $\square$

Sol: Per assurdo sia P t.c.

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a$$

$$a - b \mid P(a) - P(b) = b - c$$
$$b - c \mid c - a$$
$$c - a \mid a - b$$

$$a - b \mid b - c \mid c - a \mid a - b$$

Se n, m interi pos. e $n \mid m$ allora $n \leq m$

- Caso 1 $a > b > c$

$$a - b \mid b - c \mid a - c \mid a - b$$

$$a - b \underset{=}{\leq} b - c \underset{=}{\leq} a - c \underset{=}{\leq} a - b$$

$$\Rightarrow a = b = c \quad \lightning$$

$\square$

Altri casi analoghi (esercizio)

PROB 4 Fattorizzare in $\mathbb{R}[x]$

$$P(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Sol: $P(x) = a_k x^k + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

Oss 1: Se $\frac{n}{m}$ (n, m coprimi in $\mathbb{Z}$) è

una radice $\left(P\left(\frac{n}{m}\right) = 0 \right)$

$\Rightarrow n \mid a_0, \; m \mid a_k$

Quindi $n \mid -2, \; m \mid 1$

$\Rightarrow \frac{n}{m} \in \{\pm 1, \pm 2\}$

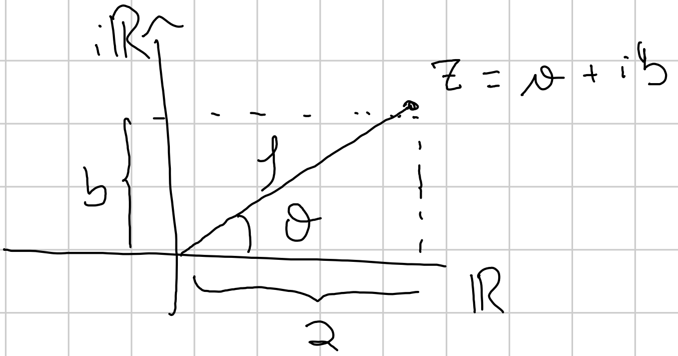
$P(\pm 1) \neq 0, \quad P(-2) \neq 0, \quad P(2) = 0$

$(x-2) \mid P(x)$

$$P(x) = (x-2)\underline{(x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)}$$

Teoria: $\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

dove $i^2 = -1$



$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$z = a + ib = \rho(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)$$

$$= \rho\, e^{i\vartheta} \qquad \text{dove } e^{i\vartheta} = \cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta$$

$$z = \rho \cdot e^{i\vartheta}, \quad w = r \cdot e^{i\alpha}$$

$$z \cdot w = (\rho \cdot r) \cdot e^{i \cdot (\vartheta + \alpha)}.$$

RADICE n-esima di z:

w t.c. $w^n = z$

$$r^n e^{in\alpha} = w^n = z = \rho e^{i\vartheta}$$

$$\Rightarrow r^n = \rho \qquad \Rightarrow r = \sqrt[n]{\rho}$$

$$n\alpha = \vartheta + k\,360^\circ \Rightarrow \alpha = \frac{\vartheta + k\,360}{n}$$

$k = 0, \ldots, n-1$

$Q(x) = \underline{x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1}$

Oss 1 : $\underline{x^m - 1} = (x-1)\underline{(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)}$

Oss 2 : Se $\alpha^m - 1 = 0$, e $\alpha \neq 1$

allora $\underline{\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + 1 = 0}$,

$\alpha^m = 1 \Rightarrow \alpha^{m+1} = \alpha \cdot \alpha^m = \alpha \cdot 1 = \alpha$

Prendiamo $m = 5$, α radice $x^5 - 1$

e $\alpha \neq 1$

$\underbrace{\alpha^6}_{\alpha^5 \cdot \alpha = \alpha} + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1 = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1$
$= 0$

$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \mid (x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$

$P(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2 =$

$= \underline{(x-2)}\,\underline{(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}\,\underline{(x^2 - x + 1)}$

Per il t.f.d.a. $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ radici

di P $(\deg P = m)$

$$P(x) = c \cdot (x - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_m)$$

Se $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$

$$P(x) = c \cdot \underline{(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1)}(x - \alpha_2)(x - \bar{\alpha}_2) \cdot \dots$$

$$\dots (x - \alpha_k)(x - \bar{\alpha}_k)(x - \alpha_{k+1}) \cdots (x - \alpha_j)$$

dove $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_j \in \mathbb{R}$

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha \cdot \bar{\alpha}$$

$$= x^2 - 2\operatorname{Re}\alpha \cdot x + |\alpha|^2$$

$$\in \mathbb{R}[x]$$

ESERCIZIO: Scomporre $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

PROB 5 Esistono 2 polys quadratici $P(x), Q(x)$ $\in \mathbb{R}[x]$ tali che $P(Q(x))$ ha esattamente gli zeri semplici $2, 3, 5$ e 7 ?

FORMULE DI VIETE:

$$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$$

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ le radice

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0 = P(x) =$$

$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m) =$$

$$= x^m - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)x^{m-1} +$$

$$+ (\alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_i\alpha_j + \dots)x^{m-2} \quad i<j$$

$$+ \dots +$$

$$(-1)^m \alpha_1 \cdots \alpha_m$$

$-a_{n-1} = \alpha_n + \alpha_{n-1} + \dots + \alpha_1$

$a_{n-2} = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_i\alpha_j + \dots$

$\vdots$

$a_0 = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n$

Soluzione

. $P(Q(x))$ è di quarto grado

$\deg P \cdot \deg Q = 4$

$\deg P$ sia 2, siano a e b le radici. $P(a) = P(b) = 0$.

$P(Q(x))$ si annulla $\iff Q(x) = a$ o $Q(x) = b$

Considera $Q_1(x) = Q(x) - a$
$Q_2(x) = Q(x) - b$

Quindi il coef di grado 1 in Q_1 e Q_2 è lo stesso

Se α_1, α_2 radici di Q_1,
β_1, β_2 radici di Q_2

allora $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ (*)

Inoltre $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sono le radici di P

$\Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\} = \underline{\{2, 3, 5, 7\}}$

impossibile per (*)

esempio
$P(x) = (x-3)(x-4)(x-6)(x-8)$
$Q(x) = (x+1)$

$\Rightarrow P(Q(x)) = (x-2)(x-3)(x-5)(x-7)$

ESERCIZI

1. Scomporre in $\mathbb{R}[x]$ i polys
$$x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$
$$x^6 - a^2 \qquad (a \in \mathbb{R})$$
$$x^6 + 3x^3 - 2$$

2. Sia $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ t.c. $p(2) = a$, $p(a) = a+2$ $(a \in \mathbb{Z})$. Determinare i possibili valori di a

3. Calcola le radici terze di $i+1$

4. Dimostra l'identità
$$1 = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

5. Siano a, b, c, d, e, f interi positivi
$S = a + b + c + d + e + f$
Supponi che $S \mid abc + def$
$S \mid ab + bc + ca - de - ef - df$
Dimostra che S è composto

6. Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ t.c.
$p(16) = 36$, $p(14) = 16$, $p(5) = 25$
Trova i possibili valori di $p(10)$

7. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}$ le radici 100-esime dell'unità

Calcola $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5$

8. Trova tutti i polys $P(x), Q(x)$ a coef. reali t.c.

$$P(x)\,Q(x) - P(x) = P(Q(x))$$

ES 5 : a, b, c, d, e, f int. pos.

$S = a + b + \dots + f$: $S \mid abc + def$
$S \mid ab + bc + ac - ed - ef - df$

$$P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$$
$$Q(x) = (x-e)(x-f)(x-d)$$

$$R(x) = P(x) - Q(x) =$$

$$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc - x^3 + (d+e+f)x^2 - (de+ef+df)x + def$$

$$= Sx^2 + x(ab + bc + ac - de - ef - df) + abc + def$$

$$S \mid R(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$R(x) = (x+a)(x+b)(x+c) - (x-e)(x-f)(x-d)$$

$$S \mid R(e) = (e+a)(e+b)(e+c)$$

$$S = a+b+c+d+e+f > e+a$$

$$S > e+b$$

$$S > e+c$$

S è composto

PROB 4 :

$$1 = \underbrace{\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}}_{P(x)}$$

- $P(a) = 0 + 1 + 0 = 1$
- $P(b) = P(c) = 1$

(*)

$Q(x) = P(x) - 1$. Per assurdo $Q(x) \neq 0$

$\Rightarrow \deg Q \leq 2$

$(*)$

$\Rightarrow a, b, c$ sono radici distinte di Q

assurdo

PROB 6

$p(16) = 36 = 6^2$
$p(14) = 16 = 4^2$
$p(5) = 25 = 5^2$

$Q(x) = (x-10)^2$

$Q(16) = 36$
$Q(14) = 16$
$Q(5) = 25$

$R(x) = p(x) - Q(x)$ allora $R(x)$ ha 3 radici $(16, 14, 5)$

$R(x) = (x-16)(x-14)(x-5)\,T(x)$

$R(10) = 120\,T(10) \Rightarrow 120 \mid R(10)$

$Q(10) = 0$

$p(10) = R(10) + Q(10)$

$\Rightarrow 120 \mid p(10)$

ESEMPIO :

$$P(x) = (x-16)^2 + (x-16)(x-14)(x-5)\,T(x)$$

con $T(x)$ poly qualunque

$$P(10) = 120 \cdot T(10)$$

7. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}$ le radici 100-esime dell'unità

Calcola $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5$

Se α è radice 100-esima dell'unità, allora α^5 è radice 20-esima dell'unità

In $\{\alpha_1^5, \dots, \alpha_{100}^5\}$ ogni radice

20-esima dell'unità comparirà esattamente

5 volte

$$5\vartheta = \frac{\pi}{10} + 2k\pi$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{50} + \frac{2}{5}k\pi \qquad k = 0, 1, 2, 3, 4$$

$$(x - \alpha_1^5) \cdots (x - \alpha_{100}^5) = (x^{20} - 1)^5$$

Guarda il coef di x^{98}:

$$\sum_{1 \le i < j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5 = 0$$

$$\sum_{1 \le i \le j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5 = \sum_{1 \le i < j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5 + \sum_{i=1}^{100} \left((\alpha_i)^2\right)^5$$

$$= \sum_{i=1}^{100} \alpha_i^{10} = 10 \sum_{i=1}^{10} \beta_i$$

β_i sono le radici 10me dell'unità

A2 - basic

Note Title 9/8/2019

NOTAZIONE

Siano a, b, c numeri, $f(\_,\_,\_)$ funz.

$$\sum_{cyc} f(a,b,c) = f(a,b,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b)$$

ES

$$\sum_{cyc} \frac{a^2 b}{c} = \frac{a^2 b}{c} + \frac{b^2 c}{a} + \frac{c^2 a}{b}$$

$$\sum_{cyc} a = a + b + c$$

$$\sum_{sym} f(a,b,c) = f(a,b,c) + f(a,c,b) + f(b,a,c) + f(b,c,a) + f(c,a,b) + f(c,b,a$$

$$\sum_{sym} ab = ab + ac + ba + bc + ca + cb$$

$$\sum_{sym} a = 2 \sum_{cyc} a$$

PROB 1 $\quad n \geq 3$ intero dispari

$x_1, \dots, x_n$ reali non neg. Dim.

$$\min_{i=1,\dots,n} (x_i^2 + x_{i+1}^2) \leq \max_{j=1,\dots,n} (2x_j x_{j+1})$$

e identifichiamo $x_{n+1} = x_1$

OSS:

$$(x-y)^2 \geq 0 \implies x^2 + y^2 \geq 2xy$$

Sol: Basta trovare una i e una j t.c.

$$x_i^2 + x_{i+1}^2 \leq 2x_j x_{j+1}$$

$$\exists i : \begin{cases} x_i \leq x_{i+1} \leq x_{i+2} & (1) \\ x_i \geq x_{i+1} \geq x_{i+2} & (2) \end{cases} \qquad x_{n+2} := x_2$$

Supponiamo (2)

$$2x_i x_{i+1} = x_i x_{i+1} + x_i x_{i+2} \geq$$

$$x_{i+1} x_{i+1} + x_{i+2} x_{i+2} =$$

$$x_{i+1}^2 + x_{i+2}^2$$

(1) : ESERCIZIO

PROB 2 :

$P(x) = x^6 - 6x^5 + 5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1$

Dimostrare che non può avere tutte le radici positive reali.

MEDIA ARITM. AM

Sol: Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ le radici:

$(*)$ $\sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 6$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\sum_{i=1}^{6} \alpha_i}{6} = 1$

$\alpha_1 \cdots \alpha_6 = 1$ $\qquad \sqrt[6]{\alpha_1 \cdots \alpha_6} = 1$

MEDIA GEOM GM

Disug AM-GM : $AM \geq GM$

"=" vale sse $\alpha_1 = \dots = \alpha_6$

$AM = GM \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_6$

$(*) \Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_6 = 1$

Ma $P(1) \neq 0$ ↯ ASSURDO

Ripasso

Sia $p \in \mathbb{Z}$ e $p \neq 0$, $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^+$

Def. la media p-esima

$$M_p(a_1, \dots, a_k) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{k} a_i^p}{k} \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$M_0(a_1, \dots, a_k) = \sqrt[k]{a_1 \cdots a_k}$$

MEDIA GEOM.

$$AM = \frac{\sum_1^k a_i}{k}$$ MEDIA ARITM. $p = 1$

$$QM = \sqrt{\frac{\sum_1^k a_i^2}{k}}$$ $p = 2$ MEDIA QUAD.

$$HM = \frac{k}{\sum_1^k \frac{1}{a_i}}$$ $p = -1$ MEDIA ARM.

Th: Siano $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^+$, $p < q$, $p, q \in \mathbb{Z}$

$$\underset{M_{-\infty}}{\overset{\shortparallel}{\min}}(a_1, \dots, a_k) \leq M_p(a_1, \dots, a_k) \leq M_q(a_1, \dots, a_k) \leq \text{MAX}(a_1, \dots, a_k) = M_{+\infty}$$

Inoltre vale l'uguale sse $a_1 = \ldots = a_n$

PROB 3 : $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ t.c. $a \cdot b \cdot c = 1$

Dimostrare che :

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

Th [Cauchy - Schwarz (C-S)]

$x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

e l'"=" vale sse $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$ t.c. $x_i = \lambda y_i \quad (i = 1, \ldots, n)$

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}$$

$x_i^2 = \frac{1}{a^3(b+c)} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{a\sqrt{a(b+c)}}$

$y_1^2 = a(b+c)$ $\qquad y_1 = \sqrt{a(b+c)}$

e x_2, x_3, y_2, y_3 sono le cicliche

$$\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)}\right)\left(\sum_{cyc} a(b+c)\right) \geq$$

$$\geq \left(\sum_{cyc}\frac{1}{a\cancel{\sqrt{a(b+c)}}}\cdot\cancel{\sqrt{a(b+c)}}\right)^2 =$$

$$= \left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)^2$$

$$\sum_{cyc}\frac{1}{a^3(b+c)} \geq \frac{\left(\sum_{cyc}\frac{1}{a}\right)^2}{\sum_{cyc} ab+ac} =$$

$$= \left(\frac{bc+ac+ab}{abc}\right)^2\cdot\frac{1}{ab+ac+bc+ba+ca+cb}$$

$$= \frac{(bc+ac+ab)^{\cancel{2}}}{2\cancel{(ab+ac+bc)}} = \frac{3}{2}\underbrace{\frac{\sum_{cyc} ab}{3}}_{AM} \geq$$

$$\geq \frac{3}{2}\underbrace{\sqrt[3]{a^2b^2\cdot c^2}}_{GM} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{(a\cdot b\cdot c)^2} = \frac{3}{2}$$

PROB 4 $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ Dimostra

$$\sum_{cyc} \frac{y^2+z^2}{x} \geq 2(x+y+z)$$

In C-S Prendiamo $x_i = \frac{a_i}{\sqrt{b_i}}$, $y_i = \sqrt{b_i}$

dove $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}^+$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i}\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$$

Cor [TITU]:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i} \geq \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$

Sol: $\displaystyle\sum_{cyc} \frac{y^2+z^2}{x} = \sum_{sym} \frac{y^2}{x} \geq$

$$\geq \frac{\left(\sum_{sym} x\right)^{\cancel{2}}}{\cancel{\sum_{sym} x}} = \sum_{sym} x = 2\sum_{cyc} x$$

$= 2(x+y+z)$

PROB 5 Siano $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+_0$ t.c.

$\boxed{a+b+c+d=4}$. Dimostrare che

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4$$

Th [DISEQ. DI RIARRANGIAMENTO]:

Siano $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_m$ reali
$y_1 \geq y_2 \geq \dots \geq y_m$

Allora

$$\sum_{i=1}^{m} x_i y_i \geq \sum_{i=1}^{m} x_i y_{\sigma(i)} \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^{m} x_i y_{m-i+1}$$

Per ogni permutazione σ

Sol:

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab \leq 4$$

$\{p, q, r, s\} = \{a, b, c, d\}$ t.c.

$$p \geq q \geq r \geq s$$

$$p\cdot q\cdot r \geq p\cdot q\cdot s \geq p\cdot r\cdot s \geq q\cdot r\cdot s$$

$$a^2bc + b^2cd + c^2da + d^2ab =$$

$$a(abc) + b(bcd) + c(cda) + d(dab)$$

$$\leq p(pqr) + q(pqs) + r(prs) + s(qrs)$$

$$= \left(\sqrt{(pq+rs)(pr+qs)}\right)^2 = (GM)^2$$

AM-GM

$$\leq \left(\frac{pq+rs+pr+qs}{2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\left((p+s)(q+r)\right)^2 \leq$$

AM-GM

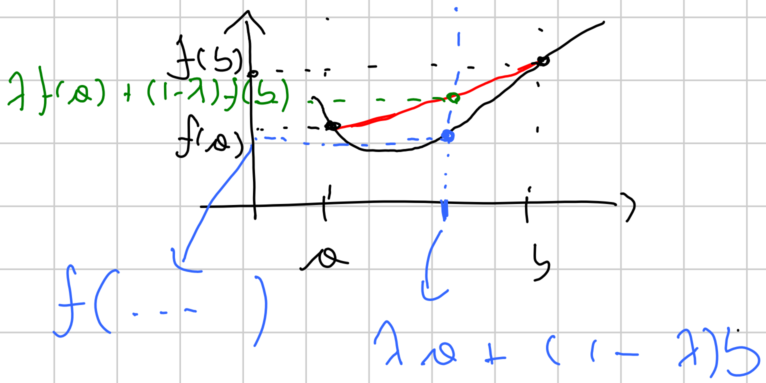
$$\leq \frac{1}{4}\left(\left(\frac{p+q+r+s}{2}\right)^2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4}\, 2^4 = 4$$

Def: $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$

CONVESSA: $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \geq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$

$\forall x, y \in [a, b] \quad , \quad \forall \lambda \in [0, 1]$



$\boxed{f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in [a, b]}$

CONCAVA

$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \leq f(\lambda x + (1-\lambda) y)$

$\forall x, y \in [a, b] \quad , \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

Th [DIS. DI JENSEN]

$x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}$, $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}^+_0$

t.c. $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$

- Se F è convessa allora

$$F(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m) \leq a_1 F(x_1) + \dots + a_m F(x_m)$$

- Se F è concava allora

$$F(a_1 x_1 + \dots + a_m x_m) \geq a_1 F(x_1) + \dots + a_m F(x_m)$$

OSS 1

Con $m=2$ è la def di funzione concava e convessa

OSS 2

Se $a_1 = a_2 = \dots = a_m = \frac{1}{m}$

$$F\left(\frac{x_1 + \dots + x_m}{m}\right) \leq \frac{F(x_1) + \dots + F(x_m)}{m}$$

se F è convessa

PROB 6, $a, b, c \in \mathbb{R}^+$, Dimostrare

deg 1

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

deg 1

$\lambda(a, b, c) = (\lambda a, \lambda b, \lambda c$ $\quad (\lambda \in \mathbb{R}^+$

$$\frac{\lambda a}{\sqrt{\lambda^2 a^2 + 8\lambda^2 bc}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}$$

Se prendo $\lambda = \dfrac{1}{a+b+c}$

$(a', b', c') = (\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ è t.c.

$$a' + b' + c' = \frac{a+b+c}{a+b+c} = 1$$

• WLOG $a+b+c = 1$

• $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ CONVESSA (esercizio)

$$\sum_{cyc} \frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{}}$$

$x_1 = a^2 + 8bc$

x_2, x_3 e ciclato

ESERCIZI

1. Scrivi esplicitamente $\sum_{cyc} \frac{a^2}{a+c}$, $\sum_{sym} \frac{a^2}{a+c}$

2. Calcola il minimo di $a^4 + b^2 + c$ quando $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ e $abc = 1$

3. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ dimostra $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3$

4. Calcola il minimo di $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y}$ sapendo che $x + y + z = 2$

5. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ con $a + b + c = 3$
Dim che $\frac{a+3}{3a+bc} + \frac{b+3}{3b+ca} + \frac{c+3}{3c+ab} \geq 3$

6. $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$ t.c. $2(a+b+c+d) \geq abcd$
Dim che $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq abcd$

7. $a, b, c \in \mathbb{R}$ t.c. $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$
Trova il massimo valore di
$$\frac{(a^2b + b^2c + c^2a)^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^3}$$

8. Finisci il problema 6

$$a+b+c=3$$

$$\sum_{cyc} \frac{a+3}{3a+bc} \geq 3$$

$$\parallel$$

$$\sum_{cyc} \frac{2a+b+c}{a^2+ab+ac+bc} =$$

$$= \sum_{cyc} \frac{a+b \quad +a+c}{(a+b)(a+c)} =$$

$$= \sum_{cyc} \left(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} \right) \overset{C-S}{\geq}$$

dettagli ↪ per es.

$$\frac{(2a+2b+2c)^2}{\sum_{cyc} ((a+b)+(c+a))} = \frac{36}{4 \cdot 3} = 3$$

ES 7.

$$\frac{(a^2b+b^2c+c^2a)^2}{(a^2+b^2+c^2)^3} \leq K$$

$\parallel$ costante

$$(a^2b+b^2c+c^2a)^2 \overset{C-S}{\leq}$$

$$\left[(a^4+b^4+c^4)(a^2+b^2+c^2) \right]$$

$$\circ \quad (a^2+b^2+c^2)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$$

$$k(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2) \overset{?}{\leq} (a^2+b^2+c^2)^2$$

$$-k(a^2b^2+b^2c^2+a^2c^2)+(a^2+b^2+c^2)^2 = (*) \geq 0$$

$$k=\frac{1}{3}$$

conti ...

$$(*)=\frac{1}{2}\left[(a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2\right] \geq 0$$

$a=b=c=1$ ✓

PROB 6 (CONTINUO)

$$a+b+c=1$$

$$\sum_{cyc}\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{1}{\sqrt{\sum_{cyc} a(a^2+8bc)}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a^3+b^3+c^3+24abc}} \overset{?}{\geq} 1$$

$$1 = (a+b+c)^3 =$$

$$= a^3+b^3+c^3+6abc+3\sum_{sym} a^2 b$$

$$\overset{\text{AM-GM}}{\geq} a^3+b^3+c^3+6abc+18abc$$

$$= a^3+b^3+c^3+24abc$$

6. $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$ t.c. $2(a+b+c+d) \geq abcd$
Dim che $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq abcd$

CASO 1: $a+b+c+d \geq 8$

$$\sum_{cyc} (a^2+4) \overset{\text{AM-GM}}{\geq} 4\sum_{cyc} a$$

$$\underline{\sum_{cyc} a^2} + \sum_{cyc} 4 = \sum_{cyc} a^2 + 16$$

$$\sum_{cyc} a^2 \geq 4\sum_{cyc} a - 16 \geq 4 \cdot 8 - 16$$

$$\geq 16$$

CASO 2 $a+b+c+d \leq 8$

$$\left(\sum_{cyc} a^2\right)\left(\sum_{cyc} a\right)^2 \geq \text{AMGM}$$

$$4\sqrt[4]{a^2 \cdot b^2 \cdot c^2 \cdot d^2} \cdot \left(4\sqrt[4]{a \cdot b \cdot c \cdot d}\right)^2 =$$

$$64\,(a \cdot b \cdot c \cdot d)$$

$$\sum_{cyc} a^2 \geq \frac{64\, a \cdot b \cdot c \cdot d}{\left(\sum_{cyc} a\right)^2} \geq$$

$$\geq \frac{\cancel{64} \cdot a \cdot b \cdot c \cdot d}{\cancel{64}}$$

$$2\sum_{cyc} a \geq abcd \qquad \text{vincolo}$$

$$\sum_{cyc} a^2 \overset{?}{\geq} abcd$$

$$2\sum a = abcd \,, \quad 1 = \frac{2\sum a}{abcd}$$

Non posso fare solo così

$$\frac{2\sum_{cyc} a}{abcd} \geq 1$$

per dim: $\left(\sum_{cyc} a^2\right)^3 \overset{?}{\geq} (abcd)^3$ ⊛

Hope! uso l'ipotesi

dimostro quella + forte: $\left(\sum_{cyc} a^2\right)^3 \geq \left(2\sum_{cyc} a\right)^2 (abcd) \geq$ ⊛

Ora si conclude il conto e si termina per AM-GM pesata o Bunching

Abbiamo speranza perchè a LHS i termini hanno il grado + concentrato

Infatti: $\sum_{cyc} a^4 \geq 4\,abcd = \sum_{cyc} abcd$ (AM, GM)

i gradi sono $(4,0,0,0)$ $(1,1,1,1)$

x casa finite l'esercizio chiave

$$\sum_{sym} a^3 b \geq \sum_{sym} a^2 bc$$

A3 - basic

Note Title 9/10/2019

- successioni
- funzionali

PROB 1

$$\begin{cases} a_0 = a \\ a_{n+1} = a_n + \underbrace{8n}_{f(n)} \end{cases}$$

$$a_{n+1} = K a_n + f(n) =$$

$$= K\left(K a_{n-1} + f(n-1)\right) + f(n)$$

$$= K^2 (K a_{n-2} + f(n-2)) + K f(n-1) + f(n) =$$

$$= K^3 a_{n-2} + K^2 f(n-2) + K f(n-1) + f(n)$$

$$= \dots \stackrel{\text{claim}}{=} K^{n+1} a_0 + \sum_{i=0}^{n} K^i f(n-i)$$

Sol: $a_0 + \sum_{i=0}^{n} 8i = a_0 + 8 \sum_{i=0}^{n} i$

$$= 8\,\frac{n(n+1)}{2} + a_0$$

PROB 2

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ a_1 = 15 \\ a_{n+2} = 15\, a_{n+1} + 16\, a_n \end{cases}$$

Dimostra che esistono infiniti k t.c. $269 \mid a_k$

$$\begin{cases} x_0,\ x_1 \\ x_{n+1} = a\, x_n + b\, x_{n-1} \end{cases}$$

$P(x) = x^2 - a x - b = 0$

radici : ξ, η

(1) Se $\xi = \eta$

(2) Se $\xi \neq \eta$

(2) $x_n = A\xi^n + B\eta^n$

(1) $x_n = A\xi^n + Bn\xi^n$

$\xi^n = \eta^n$

A, B si ricavano usando x_0, x_1

Sol: nel nostro caso

$P(x) = x^2 - 15x - 16 = (x-16)(x+1)$

$\xi = 16, \quad \eta = -1$

$x_n = A\,16^n + B(-1)^n$

$x_0 = A + B$
$x_1 = 16A - B$
$\Rightarrow A = B = 1$

$x_n = 16^n + (-1)^n = 2^{4n} + (-1)^n$

$269 \mid x_k = 2^{4k} + (-1)^k$

$\downarrow$
primo

vorrei $\begin{cases} (-1)^k \equiv -1 & \pmod{269} \\ 2^{4k} \equiv 1 & \pmod{269} \end{cases}$

- k dispari
- $2^{268} \equiv 1$

Per $k = 67$ ho $4 \cdot 67 = 268$

Allora mi basta prendere k dispari e multiplo di 67

Oss: $\begin{cases} x_1, \dots, x_k \\ c_k x_{m+k} + c_{k-1} x_{m+k-1} + \dots + c_1 x_{m+1} + c_0 x_m = 0 \end{cases}$

Poly caratteristico

- $P(x) = c_k x^k + \dots + c_1 x + c_0 = 0$

- Trovo le radici: $\xi_1, \dots, \xi_k$
- Se le radici sono a 2 a 2 distinte allora

$$x_n = A_1 \xi_1^n + \dots + A_k \xi_k^n$$

- Se le radici non fossero tutte distinte dovrei aggiungere dei fattori $1, n, n^2, \dots$

PROB 3
$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \\ a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n + \underline{7}^n \end{cases}$$

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 7^n = 7 \cdot (7^{n-1})$$

$$= 7 \cdot (a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1})$$

$$a_{n+2} - 12a_{n+1} + 41a_n - 42a_{n-1} = 0$$

Poly caratteristico:

$$x^3 - 12x^2 + 41x - 42 = (x-2)(x-3)(x-7)$$

$$\xi_1 = 2, \quad \xi_2 = 3, \quad \xi_3 = 7$$

$$a_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n + C \cdot 7^n$$

$$\begin{aligned} a_0 &= A + B + C = 0 \\ a_1 &= 2A + 3B + 7C = 1 \\ a_2 &= 2^2 A + 3^2 B + 7^2 C = \ldots \end{aligned}$$

PROB 4

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1 \\ a_3 = 2 \\ a_{n+3} = \dfrac{a_{n+2}\, a_{n+1} + n!}{a_n} \end{cases}$$

Dimostra che a_n è intero $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\underline{a_{n+3}\, a_n - a_{n+2}\, a_{n+1}} = n! = n \cdot (n-1)!$$

$a_1 = 1$
$a_2 = 1$
$a_3 = 2$
$a_4 = 3$
$a_5 = 8$
$a_6 = 15$
$a_7 = 48$
$a_8 = 105$

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}\, a_{n+1} + n!}{a_n}$$

Claim: $a_n \mid n!$
$a_n \mid a_{n+2}$

1	$\cdot 2$	1	$\cdot 3$
2	$\cdot 4$	3	$\cdot 5$
8	$\cdot 6$	15	$\cdot 7$
48		105	

Claim 2: $a_n = (n-1)\, a_{n-2}$

Dim: INDUZIONE (GENERALIZZATA)

P.B. $a_3 = 2 \cdot 1$
$a_4 = \ldots$

P.I. Suppongo $a_{i+2} = (i+1)\, a_i$
$\forall\, i \le n-1$

$$a_{n+3} = \frac{a_{n+2}\, a_{n+1} + n!}{a_n} =$$

$$= \frac{(n+1)\, a_n\, a_{n+1} + n!}{a_n} =$$

$$= (n+1)\, a_{n+1} + \frac{n!}{a_n} =$$

$$a_{n+1}\, a_n = n\, a_{n-1} \cdot (n-1)\, a_{n-2} =$$

$$= \dots = n!$$

(si dim. per induzione)

$$\frac{n!}{a_n} = a_{n+1}$$

$$= (n+1)\, a_{n+1} + a_{n+1} = (n+2)\, a_{n+1}$$

$\square$

PROB 5 $a_{n+1} = a_n^2 - 2$

e a_0 fissato in $[0,1]$

$x^2 - 2 = x \leadsto x_1, x_2$

$$x_1 = x_1^2 - 2$$

$$a_{n+1} = x_1^2 - 2 = x_1$$

$$a_{n+1} - x_1 = a_n^2 - 2 - x_1$$

$$a_{n+1} - x_2 = a_n^2 - 2 - x_2$$

$$\frac{a_{n+1} - x_1}{a_{n+1} - x_2} = a$$

$$\cos 2\vartheta = 2\cos^2\vartheta - 1$$

$$b_n = \cos(2^n \vartheta)$$

$$b_{n+1} = \cos(2 \cdot 2^n \vartheta) = \dots = 2b_n^2 - 1$$

$$a_{n+1} = a_n^2 - 2$$

$$b_n = \frac{a_n}{2} \Rightarrow \frac{a_{n+1}}{2} = 2\frac{a_n^2}{4} - 1$$

$$\Rightarrow a_{n+1} = a_n^2 - 2$$

$$a_n = 2b_n = 2\cos(2^n \vartheta)$$

ϑ? lo ricavo usando a_0

FUNZIONALI

PROB 6: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x) \lfloor f(y) \rfloor$$

- $x = y = 0 \Rightarrow f(0) = f(0) \cdot \lfloor f(0) \rfloor$

$\Rightarrow$ (1) $f(0) = 0$

(2) $\lfloor f(0) \rfloor = 1$

(2) $\lfloor f(0) \rfloor = 1$

$y = 0 \Rightarrow f(x) = f(0) \quad \forall x$

$\Rightarrow$ $\boxed{f(x) = c = \text{cost} \text{ e } \lfloor c \rfloor = 1 \Rightarrow c \in [1,2)}$

da verificare

(1) $f(0) = 0$

$x = y = 1$

$$f(1) = f(1) \lfloor f(1) \rfloor$$

(1.1) $f(1) = 0$

(1.2) $\lfloor f(1) \rfloor = 1$

(1.1) $f(1) = 0$

$$x = 1 \implies \boxed{f(y) = 0} \quad \forall y$$

soluzione (da verificare)

(1.2) $\lfloor f(1) \rfloor = 1$

$$y = 1 \implies f(\lfloor x \rfloor) = f(x)$$

$$x = 2, \; y = \frac{1}{2}$$

$$f(1) = f(2) \cdot \lfloor f(\tfrac{1}{2}) \rfloor =$$

$$= f(2) \cdot \lfloor f(0) \rfloor = 0$$

$$\implies f(1) = 0 \quad \lightning$$

PROB 7 $\quad f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$

dove $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

Sol: $\quad b = 0 \qquad f(f(a)) = f(2a) + 2c$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad\ \ ||$

$a = 0 \qquad \boxed{f(f(0)) = 2f(0) + c}$

$$\boxed{f(2a) = 2f(a) - c}$$

OSS: $\quad f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b)) =$

$= f(f(b+a)) = f(2b) + 2f(a)$

$\underbrace{f(2b) - 2f(b)}_{\substack{|| \\ \text{costante}}} = f(2a) - 2f(a)$

- $a = 0 \implies$ costante $= -f(0)$

$2f(a+b) + c \overset{\circ}{=} f(f(a+b)) =$

$= f(2a) + 2f(b) \overset{\circ}{=}$

$$= 2\,(f(a) + f(b)) - c$$

$$\Rightarrow f(a+b) - c = f(a) + f(b) - 2c$$

$$f(a+b) - c = [f(a) - c] + [f(b) - c]$$

$$g(x) = f(x) - c$$

$$\Rightarrow g(a+b) = g(a) + g(b)$$

EQUAZIONE DI CAUCHY!

$$\Rightarrow g(x) = Kx$$

$$\Rightarrow \boxed{f(x) = kx + c}$$

Sostituisco nell'espressione iniziale e trovo i valori di K e di $c = f(0)$

- $K = 2$ e c qualunque
- $K = 0$ e $c = 0$

$$f(m+1) = f(m) + c$$

PROB 9 $\quad f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(y f(x+y) + f(x)) = 4x + 2y f(x+y)$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$

Soluzione:

- $y = 0 \implies f(f(x)) \overset{*}{=} 4x$

  e $4x$ è biettiva

  $f(4x) \overset{*}{=} f(f(f(x))) \overset{*}{=} 4 f(x)$

  $\implies f(0) = 0$

OSS:
- Se $f \circ g$ è iniettiva $\implies g$ è iniettiva
- Se $f \circ g$ è suriettiva $\implies f$ è sur.
- Se $f \circ g$ è biettiva $\implies g$ è iniettiva, f è sur.

$\implies f$ è biettiva

- $x = 0,\ y = 1$ $\qquad f(\underset{\underset{4 \cdot 1}{\parallel}}{f(1)}) = 2 f(1)$

$$2f(1) = 4 \quad \Rightarrow \quad f(1) = 2$$

$$f(2) = f(f(1)) = 4 \qquad (*)$$

$$f(4) = 8$$

- $x = 1 - y \quad \Rightarrow$

$$f(2y + f(1-y)) = 4 - 4y + 4y = 4$$

$(*)$ $\quad 2y + f(1-y) = 2$

$$\Rightarrow f(1-y) = 2(1-y)$$

Preso $x = 1 - y$ si ha $\boxed{f(x) = 2x}$

da verificare

ESERCIZI

1 Trova tutte le possibili $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
t.c. $f(x + f(y)) = f(x) + y$

2 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{m+1} = 7a_m + 1 \end{cases}$ Trova il minimo m t.c. $30 \mid a_m$

3. $\begin{cases} b_0, b_1 \in \mathbb{Z} \\ b_{m+1} = (m+1) b_m - m b_{m-1} \end{cases}$
Dimostra che per ogni $k \geq 3$ intero, per m abbastanza grande, b_m costante modulo k

4.
In quante parole di 20 lettere, generate da a, b, c, compare la lettera a un numero pari di volte?

5. $f(x) + 2f(xy) = f(x + 2xy)$, $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$
trova f

6. Sia (a_m) progressione aritmetica non costante t.c. $\exists m > 1$ con
$a_m + a_{m+1} = a_1 + \dots + a_{3m-1}$
Dimostra che a_m non contiene termini nulli

7. Trova tutte le $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall x, y, z, k \in \mathbb{R}$ si abbia

(a) $x f(x, y, z) = z f(z, y, x)$

(b) $f(x, ky, k^2 z) = k f(x, y, z)$

(c) $f(1, k, k+1) = k+1$

E. 1 $\quad f(x + f(y)) = f(x) + y \quad , \quad f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

- $x = 0 \implies \underline{f(f(y)) = f(0) + y} = \underbrace{c + y}_{\text{biettiva}}$

$\implies f$ biettiva

- $x = y = 0 \qquad \cancel{f}(f(0)) = \cancel{f}(0)$

$f(0) = 0$

Dati x, z, $\quad \exists y$ t.c. $y = f(z)$

$$f(x + f(f(z))) = f(x) + f(z)$$

$$\shortparallel$$

$$f(x + z) = f(x) + f(z)$$

$\Rightarrow f$ è cauchy

$$\begin{cases} b_0, b_1 \in \mathbb{Z} \\ b_{m+1} = (m+1) b_m - m b_{m-1} \end{cases}$$

Se $b_i \equiv b_{i-1} \equiv c \pmod{k}$

$b_{i+1} \equiv (i+1) \cdot c - i \cdot c = c$

$m = k$: $b_{k+1} \equiv b_k$

4 Sia x_m il numero cercato (il numero di parole di m lettere t.c. ...)

$x_{m+1} = 2 \cdot x_m + (y_m) \cdot 1$

parole di lunghezza m con un numero disp. di a.

parole totali di length m è

$x_m + y_m = 3^m$

$$y_n = 3^n - x_n$$

$$x_{n+1} = 2x_n + 3^n - x_n = x_n + 3^n$$

$$x_n = x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} 3^i = x_0 + \frac{3^n - 1}{3 - 1}$$

E. 5 $\quad f(x) + 2f(xy) = f(x + 2xy)$, $\quad f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$

- $x = y = 0 \implies f(0) = 0$
- $x \cdot y = z \qquad \left(y = \frac{z}{x} \right)$

$$f(x) + 2f(z) = f(x + 2z) \quad ⊛$$

- $x = -z$

$$f(-z) = -f(z)$$

- $x = -2z \qquad f(2z) = 2f(z)$
- $y = 2z$

$$f(x) + f(y) = f(x) + f(2z) = $$
$$= f(x) + 2f(z) \overset{⊛}{=}$$
$$= f(x + 2z) =$$

$$= f(x+y)$$

E.6 $\exists\, n \geq 2$ t.c.

$$a_n + a_{n+1} = a_1 + \dots + a_{3n-1}$$

PROG. ARITM

$$a_k - a_{k-1} = d \qquad (d \text{ RAGIONE})$$

$$a_k = a_1 + (k-1)d$$

$$\sum_{i=1}^{k} a_i = \frac{k(a_1 + a_k)}{2}$$

$$[a_1 + (n-1)d] + [a + nd] =$$

$$= \frac{(3n-1)(a_1 + a_{3n-1})}{2} \quad 2a$$

$\Rightarrow$

$$3a = (9n+2)d$$

$$d = -\frac{6a}{9n+2}$$

$$a_{n+1} = a + nd =$$

$$= a\,\frac{(9n+2+6n)}{9n+2} =$$

$$9m + 2 + 6m - 3(3m + 2m) + 2$$

$\square$

SENIOR 2019 Combinatoria 1 - Basic

Titolo nota 05/09/2019

- Gara con 5 atleti $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5! = 120$
- Classe 10 alunni, ne scelgo 3. Quanti modi?

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,\underbrace{(10-3)!}_{=7!}}$$

- CANE quanti sono gli anagrammi? $4!$
- NONNA Quanti sono?

$5!$

$$6\begin{cases} N_1\ O\ N_2\ N_3\ A \rightarrow 5! \\ N_2\ O\ N_1\ N_3\ A \\ N_2\ O\ N_3\ N_1\ A \\ \vdots \end{cases}$$

Ci sono $3!$ copie di NONNA

Totale sono $\frac{5!}{3!}$

- 1 1 1 2 2 2 2 2 tre 1 e cinque 2

Quanti sono gli anagrammi che

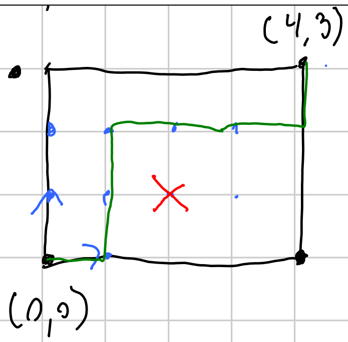
1) FINISCONO PER 2
2) NON CI SONO due 1 consecutivi?

SoL $1 \rightarrow 1$ X NO

$1 \rightarrow 2$

$$\underbrace{12}_{A}\ \underbrace{12}_{A}\ \underbrace{12}_{A}\ \underbrace{2}_{B}\ \underbrace{2}_{B}$$

Sono $\frac{5!}{3!\cdot 2!}$



3×4 Percorsi sugli spigoli

Quanti sono?

DDDDAAA $\qquad \dfrac{7!}{4!\,3!}$

DAADDDA

Sub domanda: Quanti sono quelli che non passano per $(2,1)$?

$\dfrac{7!}{4!\,3!}$

PERCORSI $\begin{cases} \text{NON PASSANO ??} \\ \text{PASSANO} \end{cases}$

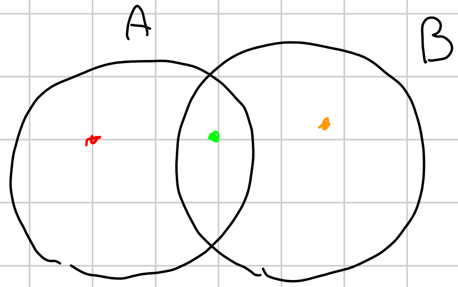
$(0,0)\to(2,1) \to 3$

$(2,1)\to(4,3) \to \binom{4}{2}$

TOT $3\cdot\binom{4}{2} = 18$

NON PASSANO $= \dfrac{7!}{4!\,3!} - 18$

PRINCIPIO di INCLUSIONE - ESCLUSIONE



So quanti oggetti in A

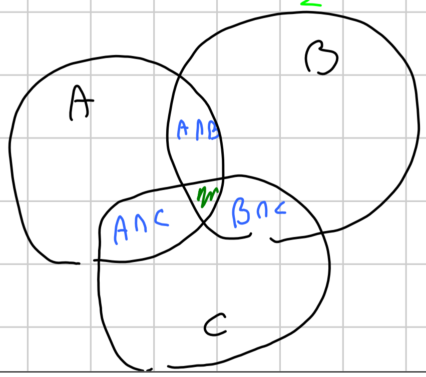
" " " in B

Quanti ce ne sono in $A\cup B$?

$|A| + |B|$

1 volta
1 volta
2 volte

$\Rightarrow |A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$



$m = A\cap B\cap C$

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |A\cap C| - |B\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

- Quante sono le permutazioni di $\{1,2,3,4\}$ senza punti fissi?

1 2 3 4
4 1 2 3

1 2 3 4 NO
2 3 1 4

Tutte $= 4!$

- $\boxed{\text{0 punti fissi}}$?
- 1 punto fisso
- 2 " "
- 3 " "

1 pt fisso

$$4! - 4 \cdot 3! + \binom{4}{2} \cdot 2 - \binom{4}{3} \cdot 1 + \binom{4}{4}$$

1 pt   2 pt   3 pt

4 scelte per il punto fisso

3! per gli altri tre

$$\left[\text{In generale: } n! - \binom{n}{1}(n-1)! + \binom{n}{2}(n-2)! - \binom{n}{3}(n-3)! \dots\right]$$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{array}$$

- $$\left.\begin{array}{l} 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n = S \\ N + N-1 + N-2 + \dots + 2 + 1 = S \end{array}\right\} = 2S$$

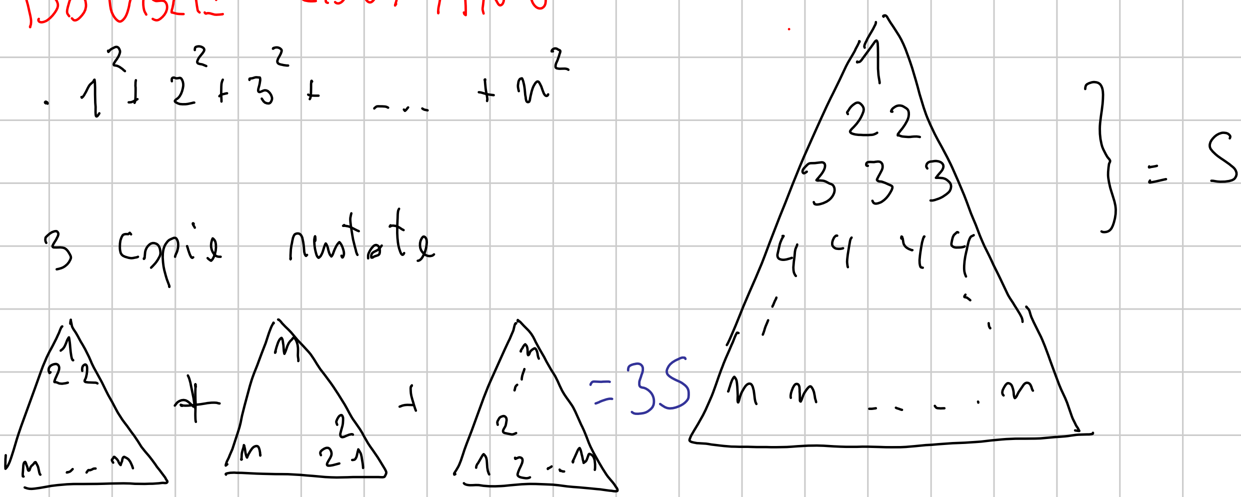
$N+1 \quad N+1 \quad \dots \quad N+1 = N(N+1)$

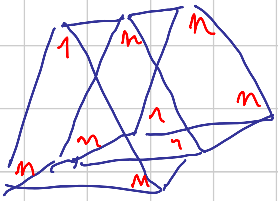
$$2S = N(N+1) \qquad S = \frac{N(N+1)}{2}$$

DOUBLE COUNTING

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

3 copie ruotate





$1+n+n = 2n+1$

$+1 \; \boxed{1} \; \boxed{2} \; 2 \qquad n \; \boxed{N} \; N-1 \qquad -1 \; N \; \boxed{N-1} \; N$

$1 \to 2, \quad n \to n, \quad n \to N-1$

$2+N+N-1 = 2N+1$

per tutte le globe, la somma è $(2N+1) \times \dfrac{N(N+1)}{2} = 3S$

$$\Rightarrow S = \frac{n(N+1)(2N+1)}{6}$$

NUMERO di Caselle

- $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k =$

1) Modo algebrico $k \cdot \binom{N}{k} = \dfrac{N!}{\cancel{k!}_{(k-1)!}(N-k)!} \cdot \cancel{k} = N\binom{N-1}{k-1}$

2) Combinatoria

Gruppo di N persone, volete scegliere una squadra sia scelto un CAPITANO nella squadra

1) Scelgo la squadra $\to$ Scelgo il capitano

k persone $\binom{N}{k} \cdot k = \binom{N}{k} \cdot k$

$$\text{Totale} = \sum_{k=1}^{N} \binom{N}{k} \cdot k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \cdot k$$

2) Scelgo il capitano $\to$ scelgo la squadra

n modi Rimangono $N-1$ persone $\to 2^{N-1}$

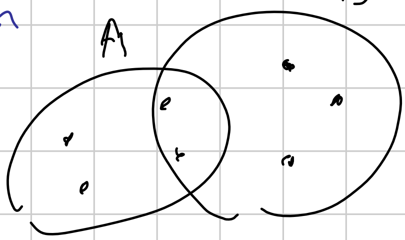
$N \cdot 2^{N-1}$

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} k = N \cdot 2^{N-1}$$

• X insieme con n elementi. Y = sottoinsiemi di X

$$\sum_{A,B \in Y} |A \cup B| = ?$$

(A,B)
(B,A)



$|A \cup B| = 7$

(A, B, e)

dove e è un elemento che sta in A o in B

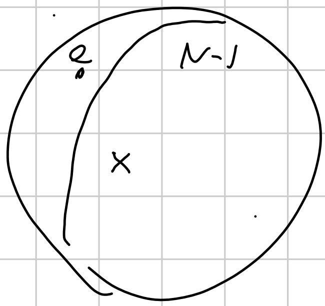
CONTO QUESTE TERNE

FISSO A, B e faccio variare e

• Fisso e, faccio variare A e B

$n \cdot 4^{n-1} \cdot 3$ → $e \in A$ o B o $A \cup B$

$n \cdot (2\cdot 2) \cdot (2\cdot 2) \cdot (2\cdot 2) \dots (2\cdot 2)$



IMO 2008 N° 5

n, k interi, $k \geq n$ e $k - n$ è pari

Ci sono $2n$ lampade numerate da 1 a $2n$, inizialmente spente

Ho k mosse, e voglio accendere/spegnere le lampade

configurazione finale in cui $1, 2, \dots n$ ACCESE

$N+1, N+2 \dots 2N$ SPENTE

A = il numero di possibili sequenze di mosse in cui le lampade $N+1 \dots 2N$ NON VENGONO MAI TOCCATE

B = il numero TOTALE di possibili sequenze di mosse

$N=3$ 1 2 3 4 5 6 — 1, 2, 2, 3, 5, 2, 5 — NON va bene per A

$K=7$ — 1 2 1 3 3 1 3

Quanto vale $\frac{B}{A}$?

• Sicuramente $B > A$. Cerchiamo di legare le mosse di B a quelle di A

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 2, & 3, & 5, & 2, & 5, & 6 \\ & & & & \downarrow & & \downarrow & \downarrow \\ & & & & 2 & & 2 & 3 \end{matrix}$$

B → Mossa di A

1 2 3
4 5 6

$a \to N+a$

1, 2, 2, 3, 2, 2, 2

1, 5, 2, 3, 2, 5, 2 poteva averlo generato!

data una sequenza di A, quante sono le mosse di B che la generano?

1 1 . 2 2 . . n n

c_1 = # mosse su 1

c_2 = # .. 2

c_N

• Oss c_i è dispari

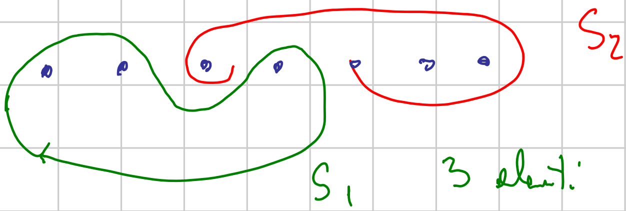
$n+1 \to 1$

C_1 1 1 1 1 .. 1

Procedimento inverso: scelgo degli 1, li faccio diventare $N+1$

• Cerco i sottoinsiemi di c_1 elementi con cardinalità pari

Totale sottoinsiemi è 2^{c_1}



sottoinsiemi dispari = # sottoinsiemi pari

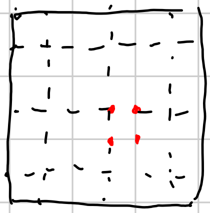
$\Rightarrow 2^{c_1-1}$

Totale $2^{c_1-1}\cdot 2^{c_2-1}\cdot 2^{c_3-1}\cdot \ldots \cdot 2^{c_N-1} = 2^{\sum c_N - N} = 2^{k-N}$

——— o ——— o ———

ESERCIZI

1) Quanti sono i percorsi da $(0,0)$ a $(6,6)$ che non passano per il quadrato $(3,2),(3,3),(4,2),(4,3)$

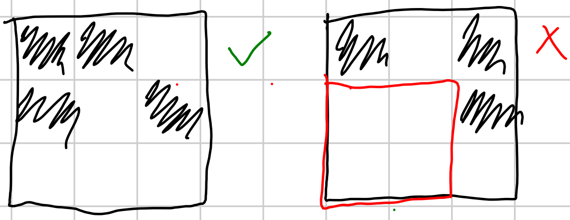


2) Quanti sono gli anagrammi di "CAPANNA" senza che A consecutive?

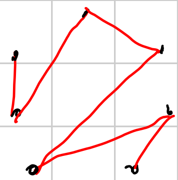
3) Quanti sono i numeri che scritti in base 10, hanno n cifre ordinate in modo debolmente crescente?

1 1 3 4 4 8 9 9 ✓ 1 3 5 2 ✗ 0 3 8 9

4) C'è un quadrato 3×3 colorato di bianco e nero. Quante colorazioni ci sono senza un sottoquadrato 2×2 bianco?



5) Ci sono n punti nei vertici di un poligono regolare. Quante sono le spezzate che non si intersecano che li congiungono tutti?



6) Quante sono le funzioni suriettive da $\{1,2,3\ldots n\}$ a $\{1,2,3\}$?

7) Quanto fa $\sum_{k=0}^{N} k(N-k) = ?$

8) $X=\{1,2,\ldots n\}$, Y = sottoinsiemi di X con esattamente 2 elementi

$\sum_{A\in Y} \min(A) = ?$

9) X ha n elementi, Y = tutti sottoinsiemi di X.

Calcolare $\displaystyle\sum_{(A,B,C)\in Y^3} |A\cap B\cap C|$.

10) TF SENIOR 2016

Al test finale ci sono 8 problemi facili e 4 medi.

Tutti i concorrenti risolvono 11 problemi.

Per ogni coppia di problema facile - problema medio scrivo il numero di studenti che hanno risolto entrambi.

32 coppie, sommo questi numeri e ho 256.

Quanti studenti hanno fatto il test?

11) Dimostrare $\displaystyle\sum_{i=0}^{K} \binom{a}{i}\binom{b}{K-i} = \binom{a+b}{K}$

12) Torneo di scacchi, ogni giocatore incontra esattamente una volta tutti gli altri. Una vittoria conta 2 punti, pareggio 1 punto e sconfitta 0.

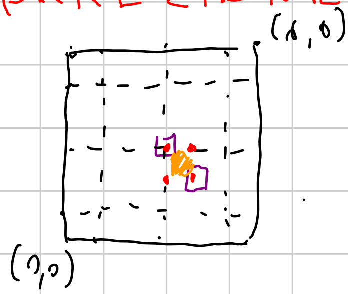
A fine torneo, risulta che metà dei punti di ogni giocatore è fatta contro gli ultimi 10 della classifica.

(Vale anche per i giocatori tra gli ultimi 10, metà dei punti è fatta contro gli altri 9)

Determinare il numero di giocatori del torneo.

CORREZIONE

1)



Vogliamo vietare solo (3,3) e (4,2)

$$\text{Tutti } \binom{12}{6} - \underbrace{\binom{6}{3}\binom{6}{3}}_{(3,3)} - \underbrace{\binom{6}{2}\binom{6}{2}}_{(4,2)}$$

2) Anagrammi di CAPANNA

2 libere

A _ A _ A

≥ 1 ≥ 1

Le posizioni sono 10

CPNN $\frac{4!}{2} = 12 \to$

$\_ \ \_ \ \_ \ \_ = 4$

2 1 1 0, 0 1 1 2, 1 1 1 1 $\to 3$

1 2 1 0, 1 1 2 0 $\to 4$

0 1 2 1, 0 2 1 1,

0, 2 2 0 $\to 1$

0, 3, 1 0 0 1 3 0 $\to 2$

$\binom{4}{2} + 4 = 10$

3) Numeri di n cifre "debolmente crescenti"

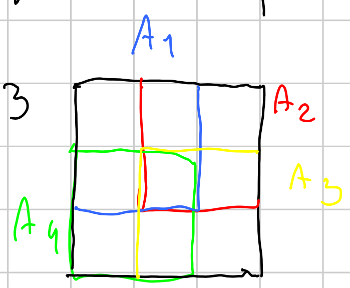
1 | • | • • | | • . . . . . • • | |

1 2 2 4 8 8

$n-1$

8 stanghette n palline $\binom{n+8}{8}$

4) 3×3



Bianco / Nero

$A_1 \dots A_4$ 4 quadrati

A_1 è bianco, ... A_4 è Bianco

E_1, E_2 E_4

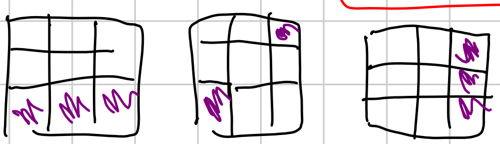
Totali

$$2^9 - (4 \cdot 2^5 + 4 \cdot 2^3) + 2 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 1$$

$|E_1|$ = colorazioni con A_1 bianco $= 2^5$

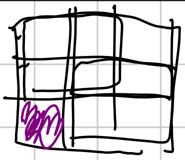
$|E_1 \cap E_2|$, $|E_1 \cap E_3|$, $|E_1 \cap E_4|$

2^3

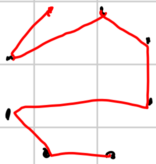


2^2

$|E_1 \cap E_2 \cap E_3|$



5) Spezzate lunghe $N-1$ tra N punti



Origine $\to$ N modi

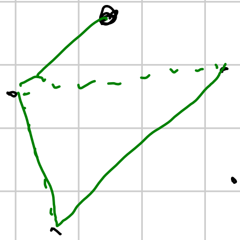
1° arco ho 2 possibilità

2° arco ... 2 "

⋮

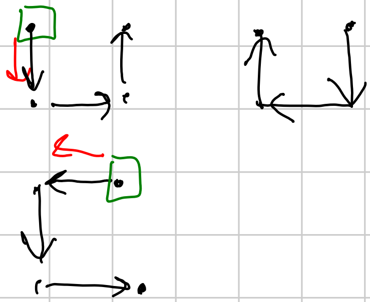
$N-2$° arco 2 poss

$N-1$° 1 poss

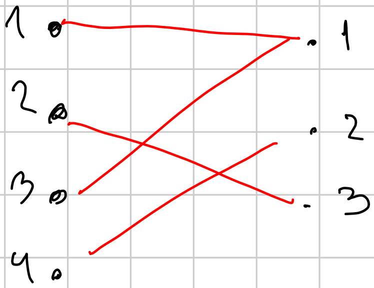


$$\frac{N \cdot 2^{N-2}}{2} = N \cdot 2^{N-3}$$

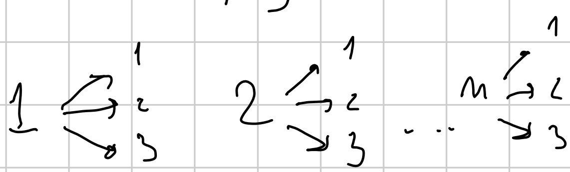
scelte



6) Funzioni suriettive da $\{1 \dots n\}$ a $\{1, 2, 3\}$



$f^{-1}(1) = \{1, 3\}$



$|\text{funzioni}| = 3^n$

E_1 = funzioni che non prendono 1

E_2 = " 2

E_3 = " 3

$|E_1| = 2^N$

$|E_1 \cap E_2| = 1$

$3^N - \sum |E_i| + \sum |E_i \cap E_j| - \cancel{\boxed{\sum E_1 \cap E_2 \cap E_3}}$

$\boxed{3^N - 3 \cdot 2^N + 3 \cdot 1}$

7) $\sum_{k=0}^{N} k(N-k) =$

①  $= 3S$

$(1+1+(N-1))$ per somma $\frac{(N-1)N}{2} \cdot (N+1) = 3S$

② $\cdot \quad \cdot \quad \boxed{\cdot} \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$ $\quad k+1 \quad (N+1)$

Scelgo centrale, scelgo uno a sx e uno a dx

$K \qquad N-K$

$\sum_{K=1,0}^{N-1,N} k(N-k) = \binom{N+1}{3}$

8) Y = Sottoinsiemi di 2 elementi

$1 \quad 2 \quad \overbrace{3 \quad 4 \quad \dots \quad n}^{N-2}$

$\sum_{A \in Y} \min(A) = 1 \cdot (N-1) + 2 \cdot (N-2) + 3 \cdot (N-3) + \dots$

min (A) # Sottoinsiemi con MIN = 1

$= \sum_{K=1}^{N} k(N-k)$

9) $|X| = n, \quad Y = \mathcal{P}(X)$

$\sum_{(A,B,C) \in Y^3} |A \cap B \cap C| =$

Conto le quaterne $\boxed{(A, B, C, e)}$ con $e \in A \cap B \cap C$

$\sum_{A,B,C,e} 1 = \sum_{A,B,C} \boxed{\sum_{e} 1_{\boxed{e \in A,B,C}}}$ "$|A \cap B \cap C|$"

$= \sum_{e} \boxed{\sum_{A,B,C} 1_{\boxed{A,B,C \ni e}}} = 8^{N-1}$

Fisso e → ho $N-1$ elementi da distribuire tra A, B, C

$$(2 \cdot 2 \cdot 2)^{N-1}$$

$\in A$ o no, $\in B$ o no, $\in C$ o no

Totale $N \cdot 8^{N-1}$

(N: scelte per e; 8^{N-1}: scelte per gli altri)

$\sum |A \cup B|$ (A, B, e)

$e \in A$ ma non in B

$e \in B$ " A

$e \in A, B$

10) 8 prob facili, 4 medi. Tutti hanno risolto 11 prob.

$$256 = \sum_{F,M} \#\text{ studenti che l'hanno risolto} = \sum_{F,M,s} \text{ t.c. studente } s \text{ ha risolto } F,M$$

Tipo 1 $7+4$ → 28 coppie

Tipo 2 $8+3$ → 24 coppie

x = studenti di tipo 1, y di tipo 2

$$28x + 24y = 256$$

$$7x + 6y = 64$$ (Equazione di Bezout)

$7 \cdot 4 + 6 \cdot 6 = 28 + 36 = 64$ $x = 4$, $y = 6$ TOT = 10

11) $$\sum_{i=0}^{k} \binom{a}{i} \binom{b}{k-i} = \binom{a+b}{k}$$

a maschi, b femmine

a b scelgo k

Quanti sottogruppi di k persone ci sono?

0 Modi a K femmine $\binom{a}{0}\binom{b}{k}$ MODI

1 Ma a k-1 F $\binom{a}{1}\binom{b}{k-1}$

2 M K-2 F $\binom{a}{2}\binom{b}{k-2}$

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{a}{i}\binom{b}{k-i}=\binom{a+b}{k}$$

12) N giocatori

V $\to$ 2

P $\to$ 1

S $\to$ 0

Gli ultimi 10 della classifica (Perdenti)

i punti N-10 Vincenti.

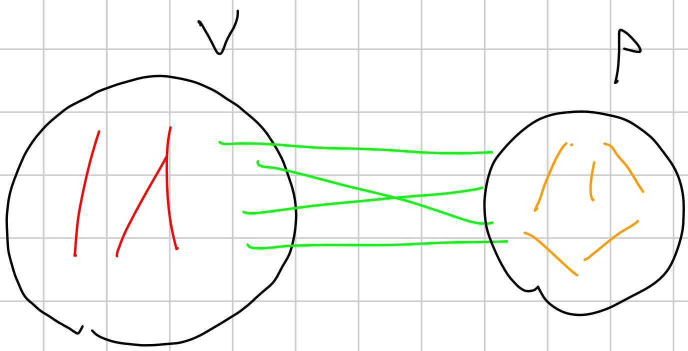
Quanto vale N.

a_i = punti che fa contro i P

b_i = punti che fa contro i V

$a_i = b_i$

= +



$S_1 = \sum_{i \text{ perdente}} a_i$

$S_2 = \sum_{i \text{ VINC}} b_i$

$S_1 = S_2$

$A_1 = \sum_{\text{VINCENTI}} a_i$

$A_2 = \sum_{\text{PERDENTI}} b_i$

$A_1 = A_2$

OSS $2+0=1+1=2$

$\binom{N}{2}$ partite 2 punti

$\sum_{\text{TOTAL}}$ PUNTI $=\binom{N}{2}\cdot 2 = N(N-1)$

$$\sum_{P-P} \text{punti} = \binom{10}{2} \cdot 2 = 90$$

Somma punti persi vs persi.

$$\sum_{V-V} \text{punti} = \binom{N-10}{2} \cdot 2 = (N-10)(N-11)$$

$$\sum_{P-V} \text{punti} = 10(N-10) \cdot 2 = 20(N-10)$$

$= \sum$ punti che guadagnano i P $+ \sum$ punti che guadagnano i V $= S_2 + A_2$

$S_2 \qquad A_2 \qquad = S_1 + A_1$

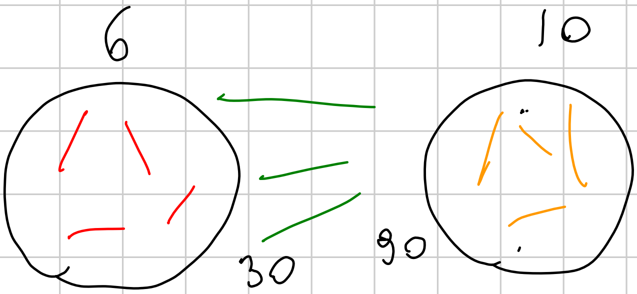
$$S_1 = \binom{10}{2} \cdot 2 \qquad S_2 = \binom{N-10}{2} \cdot 2$$

$$20(N-10) = 90 + (N-10)(N-11)$$

$$N^2 - 21N + 110 + 90 = 20N - 200$$

$$N^2 - 41N + 400 = 0 \qquad N = \frac{41 \pm \sqrt{1681 - 1600}}{2} = \frac{41 \pm 9}{2} \begin{array}{l} 25 \\ 16 \end{array}$$

$N = 16$ IMPOSSIBILE $\qquad$ ($N = 25$ SI PUÓ FARE)



$S_1 = 90$

$A_1 = \binom{6}{2} \cdot 2 = 30$

- $N = 25$ trovate una configurazione!

Problema x CASA

N intero, $2 \nmid N$, $3 \nmid N$

C'è un N-agono regolare i cui vertici sono colorati con

3 colori. Il numero di vertici di ogni colore è dispari

• Dimostrare che esiste un triangolo isoscele
con vertici di colore diverso

SENIOR 2019 – C2

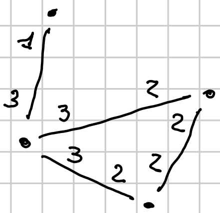
Titolo nota 07/09/2019

GRAFI E DOUBLE COUNTING

Un grafo è insieme di vertici e archi

A ogni vertice è associato un grado = numero di archi uscenti

- Quanto fa $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2S$ perchè sommando i gradi conto ogni arco due volte



- Quanto fa $\sum_{v \in V} \deg^2(v)$?

La somma delle etichette fa $\sum \deg^2(v)$

Ma è anche $\sum_{s \in S} (\deg u + \deg v)$

Dimostrare che esistono solo 5 solidi platonici.

- V vertici
- S spigoli
- F facce
- d grado di ogni vertice
- e lati di ogni faccia

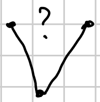
- $F + V = S + 2$
- $dV = 2S$
- $Fe = 2S$

Sostituisco $\quad \dfrac{2S}{e} + \dfrac{2S}{d} = S + 2 \Rightarrow \dfrac{1}{e} + \dfrac{1}{d} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{S}$

Grafo con $12K$ vertici, $\deg = 3K+6$

Per ogni coppia N che stringono la mano a entrambi.

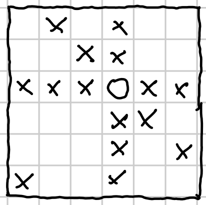
Trovare i K possibili

Sol. Contare #  $= Q$

$Q = \binom{12k}{2} N = 12k \binom{3k+6}{2}$

$12k-1 \mid (3k+6)(3k+5)$

$12k-1 \mid 175 \Rightarrow k=3$



PIGEONHOLE

Se $N+1$ piccioni vengono messi in N casette, allora una casetta ha due piccioni (almeno).

Generalizzata: se ho numeri (anche reali) con media m, allora $\exists$ elemento $\geq m$

Grafo qualsiasi. Esistono due vertici con lo stesso grado.

Supponiamo n vertici. $\deg v = 0, \dots, n-1$

Se ho un vertice di grado $n-1$, allora nessuno ha grado 0.

Concludo con PH.

Abbiamo n città, collegate da strade di lunghezza diversa. Ci sono r strade.

Esiste un percorso lungo $\geq \frac{2r}{n}$ composto da strade di lunghezza crescente.

Sol. Piazziamo n ciclisti, uno per città. Al primo passo, scambiamo i ciclisti sulla strada più corta.
Poi scambiamo quelli sulla seconda più corta, ecc..

In totale hanno percorso $2r$ strade, quindi $\exists$ ciclista che ne ha percorse $\geq \frac{2r}{n}$

1. In una gara ho m candidati e n giudici. Ogni giudice valuta ogni candidato come PASS o FAIL. ($n \geq 3$ dispari)

Ogni coppia di giudici è d'accordo su al più k candidati

Mostrare $$\frac{k}{m} \geq \frac{n-1}{2n}$$

2.(*) n punti sul piano. Per ogni coppia, $\exists$ pto equidistante.
ma per ogni terna non esiste un punto equidistante dai tre

Per quali n è possibile?

3(*)20 città, collegate da 18 linee aeree, ognuna visita ciclicamente 5 città. Per ogni città passano almeno 3 aerei.
Per ogni coppia di città ho ≤ 1 aereo che le collega direttamente
Mostrare che da ogni città si può raggiungere ogni altra.

4. 72 stagisti che fanno il TI. Ognuno risolve ≥ 1 problema.

$\exists$ insieme di problemi $\neq \emptyset$ # stagisti che li risolvono è pari.

5. Calcolare $\sum_{d|n} \varphi(d)$

6. Grafo, ogni vertice di grado 3. Parto da un vertice e svolto a sx, poi a dx, ... Allora torno alla città iniziale

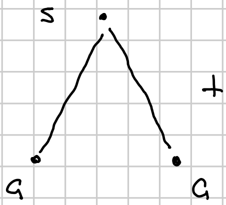
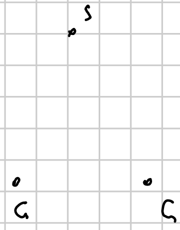
7. Un giocatore di scacchi ha 77 giorni per prepararsi per un torneo. Gioca almeno 1 partita al giorno, ma in totale ≤ 132.

$\exists$ set di giorni consecutivi in cui gioca esatt. 21 partite.

8. 5 punti blu nel piano a coord. intere. $\exists$ un segmento con estremi blu che contiene un punto a coord. intere.

9. Stanza di area 5, 9 tappeti di area 1. $\exists$ due tappeti che si sovrappongono $\geq 1/9$

SOLUZIONI

1. $\#$  $+ \#$  $= Q$ $\qquad n = 2r+1$

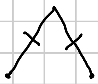
$Q \leq k\binom{2r+1}{2}$

Fisso studente di grado d $\qquad \binom{d}{2} + \binom{n-d}{2}$

Il caso peggiore è $d = r, r+1$

$Q \geq m\left[\binom{r}{2} + \binom{r+1}{2}\right]$

Combinando le 2 si ottiene la tesi.

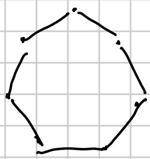
2. Contiamo $\#$  $= Q$

$Q \geq \binom{n}{2}$

Fissiamo un punto. $\forall$ distanza ci sono ≤ 2 punti distanti d.

$Q \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor n$

Ma la parte intera non può abbassare il valore! n dispari!

Poligono 

3. $n = \#$ componente piccola $\qquad a = \#$ aerei in quella comp.

$3n \leq 5a \leq \frac{n(n-1)}{2} \implies n \geq 7$

$\boxed{6n \leq 10a \leq n(n-1)}$ (n dispari) $\qquad 6n \leq 10a \leq n(n-2)$ (n pari)

$n = 7$ NO $\qquad n = 8$

$n = 9 \quad a = 6, 7 \qquad n = 10 \quad a = 6, 7, 8$ NO

$n = 11 \quad a = 7, 8, 9, 10, 11$

Ma il caso $n=9$ lo escludiamo: $a=7$ per tornare con $n=11$

Il sottografo ha 36 archi al massimo, e ho 35 tratte. I vertici dell'arco in meno sono di grado dispari

4. Contiamo coppia insieme di problemi — stagista che li risolve

S = stagisti P = Problemi

$$\sum_{s \in S} 2^{R(s)} = \sum_{A \subseteq P} S(A) = 72 + \sum_{A \neq \emptyset} S(A) \Rightarrow \exists A : S(A) \text{ pari.}$$

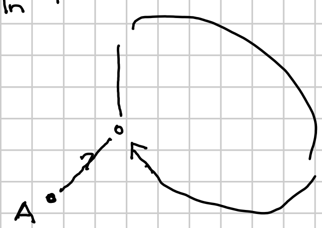
5. $\sum_{d|n} \varphi(d)$ $\qquad \varphi(d) = \#\left\{ k \leq n : (k,n) = \frac{n}{d} \right\}$

Infatti, se $(a,d)=1$ e $a \leq d \Rightarrow a\frac{n}{d} \leq n$ e $\left(a\frac{n}{d}, n\right) = \frac{n}{d}$

Ma ogni elemento lo conto 1 volta!

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n$$

6.



Una posizione è l'arco orientato su cui sono e in che direzione sto per svoltare. Riesco a risalire a ritroso!

Quindi a un certo punto sono in una posizione in cui sono già stato!

Considero la prima volta per cui accade: se non fosse il primo arco, considero la posizione precedente a entrambe e ho un altro duplicato.

7. $f(n)$ il numero di partite fino al giorno n.

$$f(1), \ldots, f(77), f(1)+21, f(2)+21, \ldots, f(77)+21$$

Sono numeri tra 1 e 153, ma sono 154!

Ce ne sono due uguali $\Rightarrow \square$

8. Supponiamo di avere (a,b) — (c,d)

Ho un punto a coord intere sse $MCD(a-c, b-d) \neq 1$

In particolare, è vero se $a \equiv c \ (2)$ e $b \equiv d \ (2)$

Ma ho solo 4 possibilità per un punto (mod 2) $\Rightarrow$ esistono due punti con la stessa parità

9. Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa.

Il primo tappeto occupa area 1.
Il secondo occupa area nuova $> \frac{8}{9}$

Il terzo occupa area $> \frac{7}{9}$

$\vdots$

Il nono occupa area $> \frac{1}{9}$

In totale ho coperto > 5 pavimento, assurdo.

Altra soluzione (che poi è la stessa)

Ho area totale dei tappeti $= 9$; quindi ho ≥ 4 u.d.t. coperte.

Per ogni unità di area coperta, considero la coppia (tappeto padrone dell'area, tappeto scoperto)

$\sum_{\text{coppie}} \text{overlap} \geq 4$

Le coppie sono 36 $\quad \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$

SENIOR 2019 - C3 Basic

Titolo nota 09/09/2019

INVARIANTI

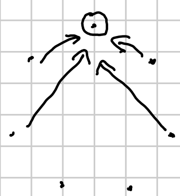
Abbiamo un problema in cui c'è una posizione che si evolve con delle mosse.

Un invariante è una quantità che non cambia.

Es.

n-agono regolare, una pedina su ogni vertice. Per quali n si possono spostare ~~tutte~~ su un vertice, dove una mossa è muovere una moneta in senso orario e una in senso antiorario.

n dispari



si risolve

Idea: $\sum$ posizioni (mod n) non cambia

All'inizio è $\frac{n(n-1)}{2}$, alla fine è 0

MONOVARIANTE

E' una quantità che (de)cresce sempre

Es. Alberto e Barbara giocano. Ci sono n pile di monete,

- togliere una moneta
- dividere una pile in due pile.

Dimostrare che il gioco finisce.

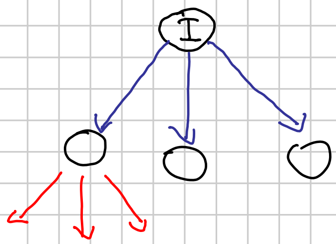
Idea: $M = 2\#\text{monete} - \#\text{pile} \geq 0$

GIOCHI

- Un gioco è a informazione perfetta
- Un gioco è a somma zero quando le somme dei punteggi è 0.

Teorema Ogni gioco a informazione perfetta e a somma zero ammette un punteggio finale tale che

- ogni giocatore può raggiungere indipendentemente da cosa fanno gli altri.



$\boxed{\text{Es}}$ (IMO 2018 - 4)

Scacchiera 20x20, Alessandra e Bobo che piazzano a turno dei cavalli bianchi e neri risp.

Alessandra non può mettere un cavallo in una casella "minacciata" da un cavallo del suo colore

Trovare il massimo num. di cavalli che può piazzare A $\forall$ strategia di B

- Alessandra può metterne almeno 100.

Alessandra piazza tutto sul bianco. Anche se Bobo occupa a sua volta le bianche, 100 cavalli li riesce a piazzare

-

1	5	6	2
3	7	8	4
4	8	7	3
2	6	5	1

Ogni volta che A muove su una casella, B muove su quella corrispondente

1 oppure 8
2 oppure 7
3 oppure 6
4 oppure 5

Tassello con 4x4.

1. Abbiamo $\{8, 10, 15\}$ e una mossa è

$$a, b \longmapsto \frac{3a-4b}{5}, \frac{4a+3b}{5}$$

È possibile raggiungere $\{12, 13, 14\}$? Oppure ottenere $\{x, y, z\}$
$|12-x| \leq 1$, $|13-y| \leq 1$, $|14-z| \leq 1$?

2. Su un n-agono ci sono pedine. Nel primo vertice 1, nel secondo 2, ..., nell'ultimo n, la mossa è orario + antiorario

In quali vertici si possono portare tutte?

3. Abbiamo 2019 carte, da un lato bianche e da un altro nere. Sono in fila. Scelgo 50 carte consecutive, quella a sx bianca, e capovolgo tutte. Dimostrare che dopo finite mosse non si può più muovere.

4. In un pentagono traccio le diagonali, e piazzo una lampadina in ogni intersezione tra lati e/o diagonali.

Scelgo un segmento e cambio stato a ogni lampadina.

Si può portarle da tutte accese a tutte spente?

5. A e B giocano. Alla lavagna c'è scritto un numero intero positivo n

A turno, diminuiscono n di un valore a scelta tra 1, ..., K.

Trovare chi vince al variare di n, K. (Vince chi arriva a 0)

6. Abbiamo i numeri 1 2 ... 100 in fila, A turno, A e B piazzano +, −, · negli spazi vuoti. Mostrare che A

- può ottenere un numero pari
- // // // // dis//

7. Scacchiera n×n, A e B piazzano a turno cavalli in modo che non siano minacciati da nessun avversario. Perde chi non può più muovere. Chi vince?

8. I numeri da 0 a 256 scritti sulla lavagna. A ne cancella 128, B ne cancella 64, ... B ne cancella 1. B paga |differenza| ad A. Se A e B sono fortissimi, quanto paga B?

SOLUZIONI

1. $x^2+y^2+z^2$ è invariante. All'inizio è 389, alla fine è tanto.

Per il secondo punto, alla fine $\geq 11^2+12^2+13^2 > 400$

2, Usiamo come invariante $\sum_m p(m) \pmod n$

All'inizio è $\frac{\cancel{n}(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{k\cancel{n}(n+1)}{2}$

$6 \mid (n+1)(2n+1-3k)$

Supponiamo che l'invariante sia soddisfatto

Usiamo una moneta per portare a posto le altre

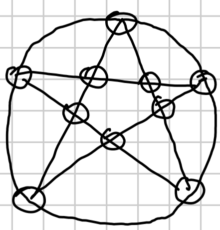
L'invariante garantisce che l'ultima moneta vada a posto.

3. Associo alle bianche 1 e alle nere 0

$$\sum_{i=1}^{2019} 2^{2019-i} \, n(i)$$

Questo è monovariante

In generale, posso trovare n-uple di quantità. Se mostro che la prima quantità che cambia decresce, allora a un certo punto finisco

4 

\# lampadine centrali accese (mod 2)

5. Se un giocatore toglie a, l'altro toglie $k+1-a$

Se $k+1 \mid n$, allora B può vincere

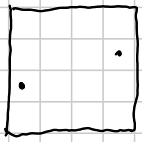
Altrimenti, A toglie in modo da lasciare a B un multiplo di $k+1$

6. Ogni dispari tranne 1 ha due spazi vicini

Se vuole ottenere un pari, piazza $\cdot$ tra 1 e 2. Altrimenti mette +

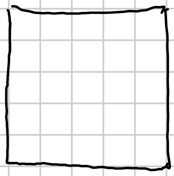
A questo punto A mette un $\cdot$ vicino al numero dispari su cui ha egito B.

7. n pari.



Vince B. Metto in modo diametralmente opposto

n dispari



Vince A. Piazza il cavallo in quella centrale e poi come prima.

Bonus. Farlo con alfieri al posto dei cavalli.

8. Idea: A cancella i numeri uno sì e uno no.
B cancella tutti i più alti

Se uno scrive le mosse viene 16

- $\exists$ una strategia di A $\forall$ strategia di B $\quad u \geq 16$
- $\exists$ una strategia di B $\forall$ strategia di A $\quad u \leq 16$

- A cancella i numeri in modo alternato

  In questo modo, min(differenze) almeno raddoppia.

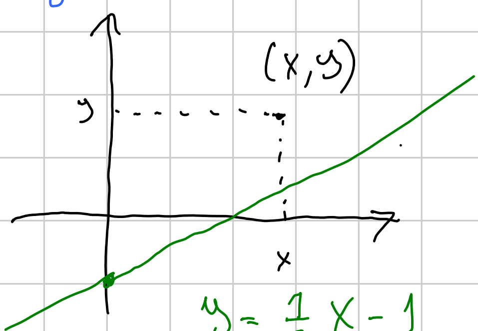
- Idea: divido l'intervallo a metà: c'è una metà con meno numeri cancello quella metà: il max delle differenze dimezza ogni volta (almeno).

SENIOR 2019 — GEOMETRIA 1

Titolo nota 06/09/2019

- G1 Analitica, Vettori, complessi e trigono.
- G2 Trasformazioni sintetiche (Rot, omotetie, inversione)
- G3 Sintetico in generale.

Geometria Analitica



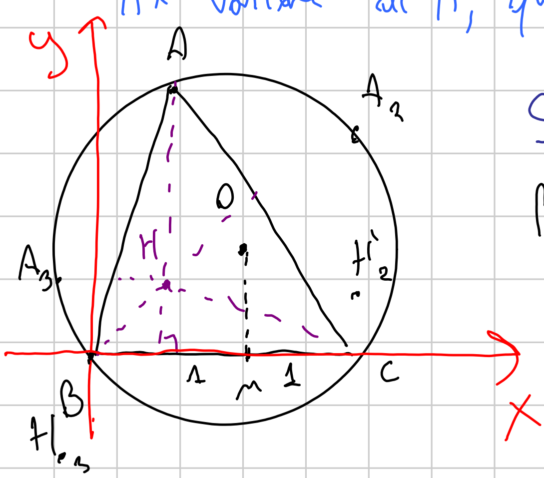
- Equazione della retta

$y = mx + K$

$y = \frac{1}{2}x - 1$ $(0,-1)$, $(2,0)$

- Es: Abbiamo un cerchio Γ fissato, $B, C \in \Gamma$ fissati. Prendo A variabile su Γ, costruisco l'ortocentro H di ABC.

Al variare di A, qual è il luogo di punti di H?



Sol: Scelgo l'origine in B

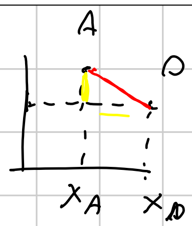
$B\,(0,0)$

$C\,(2,0)$

$O\,(1, \ell)$

Circ = punti equidistanti da D = ...

$r = \sqrt{1+l^2}$ Pitagora su BMD



$A(a,b)$ $\quad |AD|^2 = (y_A - y_D)^2 + (x_A - x_D)^2$

$(x,y) \in \Gamma \quad (y-l)^2 + (x-1)^2 = r^2 = l^2 + 1$

$$y^2 - 2yl + l^2 + x^2 - 2x + 1 = l^2 + 1$$

$$\boxed{y^2 - 2yl + x^2 - 2x = 0}$$ equaz. di Γ

Voglio calcolare H

$AH: x = b \qquad BH = ?$

$AC = \quad m_{AC} = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{0-b}{2-a} \qquad \left(AC: y = \dfrac{b}{a-2}x + k\right)$

m_{BH} FATTO: due rette r e s sono $\perp$

$\iff m_r \cdot m_s = -1$

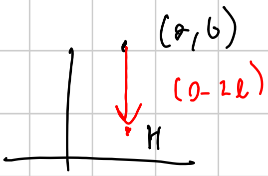
$m_{BH} = \dfrac{2-a}{b} \qquad BH) \quad y = m_{BH} \cdot x \qquad y = \dfrac{2-a}{b} \cdot x$

$H = AH \cap BH = \begin{cases} x = a \\ y = \dfrac{2-a}{b}x \end{cases} \qquad x = a, \; y = \dfrac{2a - a^2}{b}$

$H = \left(a, \dfrac{2a-a^2}{b}\right)$

$A \in \Gamma \Rightarrow y^2 - 2yl + x^2 - 2x = 0 \Rightarrow b^2 - 2bl = 2a - a^2$

$H = \left(a, \dfrac{b^2 - 2bl}{b}\right) = (a, b-2l) = (a,b) + (0,-2l)$

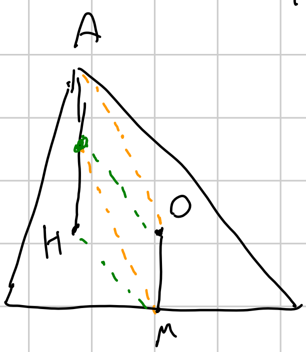


A si muove su Γ

$\Rightarrow$ H si muove su Γ spostata di $-2l$

x Es: trovare l'equazione della circonferenza per H □

OSS



$OM = l \qquad AH = 2l$

$AH = 2OM$] → tanti parallelogrammi!

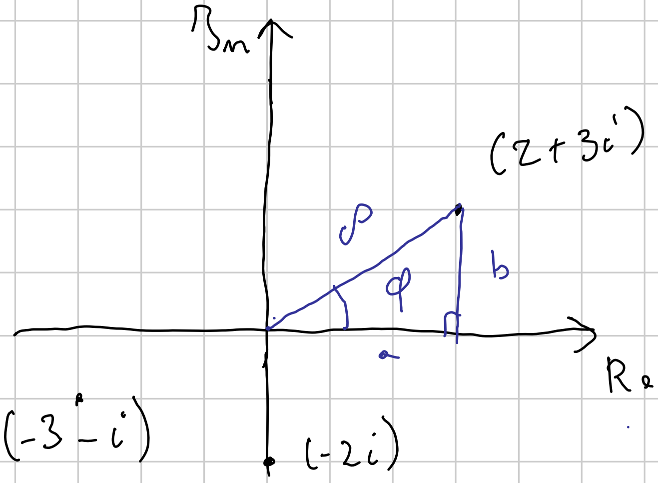
Numeri Complessi

$i^2 = -1 \quad \rightarrow \quad z = a + bi \qquad a, b$ reali

$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + i(b+d)$

$(a+bi)(c+di) = ac + adi + bci + bd\cdot\underbrace{\boxed{i^2}}_{=-1}$

$= \underbrace{(ac-bd)}_{\text{Parte reale}} + i\underbrace{(ad+bc)}_{\text{Parte Immaginaria}}$



Notazione polare

$(\rho, \varphi) \longleftrightarrow (a+bi)$

$\begin{cases} b = \rho \cdot \sin\varphi \\ a = \rho \cos\varphi \end{cases}$

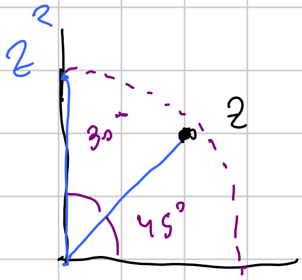
$\begin{cases} \rho = \sqrt{a^2+b^2} \\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{b}{a} \end{cases}$

$z = \rho \cdot \underbrace{e^{i\varphi}}_{= \cos\varphi + i\sin\varphi} \qquad w = r\cdot e^{i\theta}$

$\boxed{z\cdot w = (\rho\cdot r)\cdot e^{i(\varphi+\theta)}}$

Es: $e^{i(\varphi+\theta)} = e^{i\varphi} \cdot e^{i\theta}$ $\qquad \cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi) =$

$$= (\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



$$z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}$$

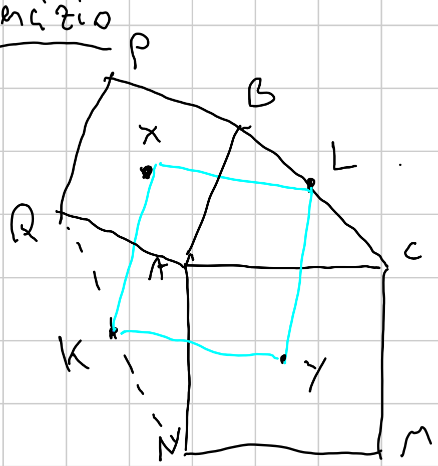
$$z^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{2\cdot i}{2} + \frac{i^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2} = i$$

Es: $z = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ $\qquad w = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$ $\qquad z^2?\ w^2?\ w^3?$

$z^3?\ z^6?$

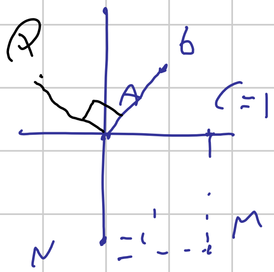
• **Esercizio**



X, Y centri di ABPQ, ACMN

L, K punti medi di BC e NQ

Tesi: XLYK è un quadrato.



Sol: Metto l'origine in $A = 0$ $\qquad C = 1$

$N = -i \qquad M = 1 - i$

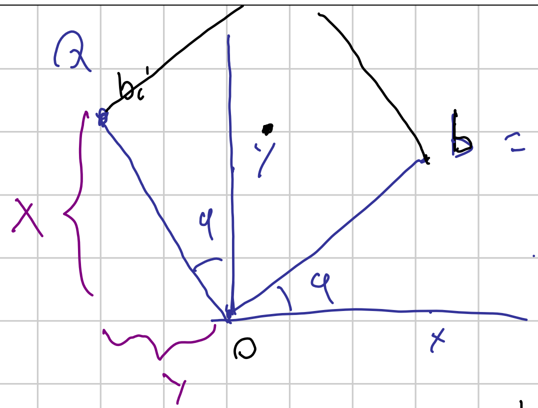
$$Y = \frac{C+N}{2} = \frac{1+(-i)}{2} = \frac{1-i}{2}$$

B sarà dato da un parametro b

rotazione di 90° $\Rightarrow$ moltiplicare per $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$

$Q = bi$

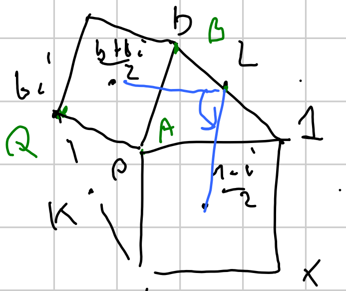
$b + bi$



$$Q = -y + ix$$

$$bi = (x+iy)\cdot i = ix + i^2 y$$

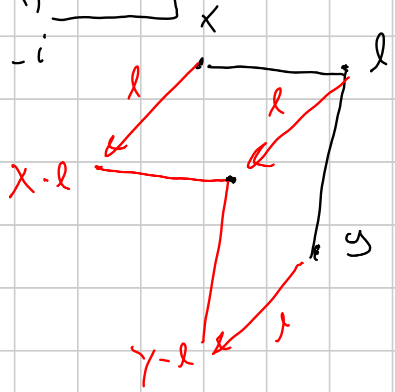
Centro: $\frac{b+bi}{2}$



$$X = \frac{b+bi}{2} \qquad Y = \frac{1-i}{2}$$

$$L = \frac{b+1}{2} \qquad K = \frac{bi-i}{2}$$

$L = 0$ $\quad XL \perp LY$? $\quad X \cdot i = Y$



$$(X-\ell)\cdot i = Y-\ell$$

$$\left(\frac{b+bi}{2} - \frac{b+1}{2}\right)\cdot i = \frac{1-i}{2} - \frac{b+1}{2}$$

$$\boxed{\frac{bi-1}{2}\cdot i} = \frac{1-i-b-1}{2} = \boxed{\frac{-b-i}{2}}$$

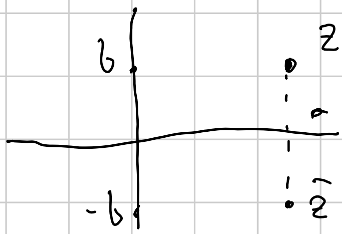
$$\frac{(bi-1)}{2} = \frac{bi^2-i}{2} = \frac{-b-i}{2}$$

Ho dimostrato che $XL = LY$ e $\angle XLY = 90°$

Coniugato

$$z = a+ib$$

$$\bar{z} = a - ib$$



$$\overline{(z+w)} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$\overline{(z\cdot w)} = \bar{z}\cdot\bar{w}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$$

$$\frac{(x+iy)}{a+ib} = \frac{(x+iy)}{(a+ib)}\frac{(a-ib)}{(a-ib)} = \frac{(ax+by)+i(ay-bx)}{a^2-(ib)^2} \quad a^2-(ib)^2 = a^2+b^2$$

$z\cdot\bar z = a^2+b^2 = \rho^2$

$\cdot\ |z|=1$ z sta sulla circonferenza unitaria

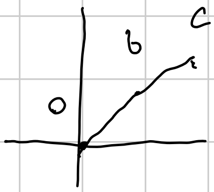
$\Rightarrow \rho = 1 \qquad z\cdot\bar z = 1 \qquad \bar z = \frac{1}{z}$

• $z, w \in$ Circ. Unit, $\overline{(z+w)} = \frac{1}{z}+\frac{1}{w} = \frac{z+w}{zw}$

• z Non sta sull'unitaria $\quad \bar z = \frac{\rho^2}{z}$

Cartesian $(x,y) \to z = x+iy \qquad z, \bar z$

Allineamento e perpendicolarità



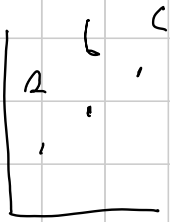
b, c, origine allineati $\iff \varphi_1 = \varphi_2$

$b = \rho_1\cdot e^{i\varphi_1}$

$c = \rho_2\cdot e^{i\varphi_2}$

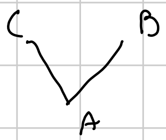
$$\frac{b}{c} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\, e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \in \mathbb{R}$$

b, c, o allineati $\iff \frac{b}{c} \in \mathbb{R} \iff \frac{b}{c} = \overline{\left(\frac{b}{c}\right)}$



$$\boxed{\frac{b-a}{c-a} = \overline{\left(\frac{b-a}{c-a}\right)} = \frac{\bar b-\bar a}{\bar c-\bar a}}$$ formula allineato.

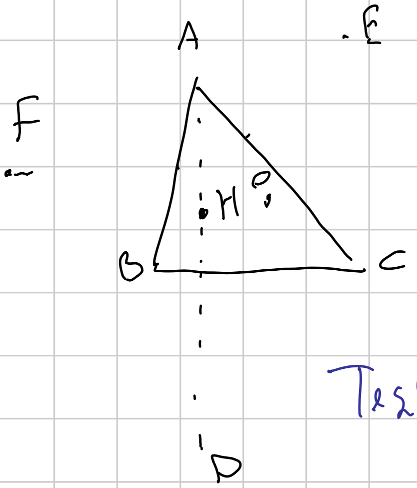
Perpendicolarità: $CA \perp AB$



$$\boxed{\frac{b-a}{c-a} = -\left(\frac{\bar b-\bar a}{\bar c-\bar a}\right)}$$ formula perpendicolarità

$\rho\cdot e^{i\theta} = \rho\cdot(\cos 90 + i \sin 90) = \rho i$

IMO SL 1998 - G5



D è simm. di A rispetto a BC

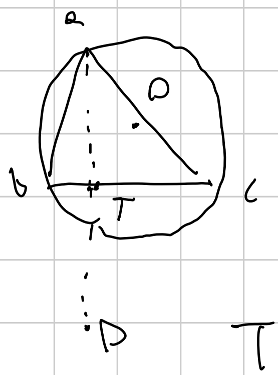
E " B " AC

F " C " AB

O circocentro, H ortocentro.

Tesi: D, E, F allineati $\iff$ $OH = 2R$

Circocentro = circonferenza unitaria



$G = \frac{a+b+c}{3}$ O, G, H allineati, $\vec{OG} = \frac{1}{3}\vec{OH}$

$h = 3 \cdot g = a+b+c$

a, b, c $a \cdot \bar{a} = 1$, $b \cdot \bar{b} = 1$ $c \cdot \bar{c} = 1$

T = il piede dell'altezza da A

$T \in BC$, $T \in AH$ (oppure $T \in BC$, $AT \perp TC$)

$\frac{t-b}{c-b} = \frac{\bar{t}-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{b}}$ $(t-b)(\bar{c}-\bar{b}) = (\bar{t}-\bar{b})(c-b)$

$(t-b)\left(\cancel{\frac{b-c}{bc}}\right) = \left(\bar{t}-\frac{1}{b}\right)(\cancel{c-b})\ {-1}$

$\boxed{t-b} = bc\left(\frac{1}{b}-\bar{t}\right) = \boxed{c - bc\bar{t}}$ BCT allineati

$\frac{t-a}{h-a} = \frac{\bar{t}-\bar{a}}{\bar{h}-\bar{a}}$ $h-a = b+c$ $\bar{h}-\bar{a} = \frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{b+c}{bc}$

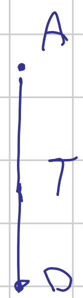
$\frac{t-a}{b+c} = \frac{\bar{t}-\frac{1}{a}}{\frac{b+c}{bc}}$ $\rightarrow$ $\boxed{t-a = bc\left(\bar{t}-\frac{1}{a}\right)}$

$$\begin{cases} bc\bar t - \frac{bc}{a} = t - a \\ -bct + c = t - b \end{cases} \qquad bc\bar t = t + \frac{bc}{a} - a$$

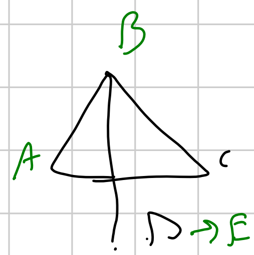
Sostituisco

$$-\left(t + \frac{bc}{a} - a\right) + c = t - b$$

$$2t = b + c + a - \frac{bc}{a} \Rightarrow \text{ho } T$$



t pt medio di $AD \Rightarrow t = \frac{a+d}{2}$



$$d = 2t - a = b + c - \frac{bc}{a}$$

$$e = a + c - \frac{ac}{b}$$

$$f = a + b - \frac{ab}{c}$$

$$\frac{d-e}{f-e} = \frac{\bar d - \bar e}{\bar f - \bar e}$$

$$d - e = \left(b + c - \frac{bc}{a}\right) - \left(a + c - \frac{ac}{b}\right) = b - a + \frac{ac}{b} - \frac{bc}{a} = (b-a)\left(1 + \frac{c(a+b)}{ab}\right)$$

$$\bar d - \bar e = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)}{\frac{1}{ab}}\right)$$

$\rightarrow$ conti: $(a-c)\left(\boxed{a^2b + ba^2 + a^2c + ac^2 + bc^2 + b^2c - abc) = 0}\right.$

$\Updownarrow$

D, E, F allineati

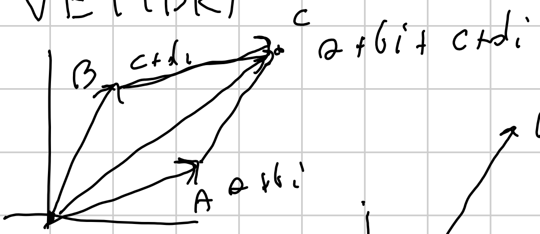
• $OH = 2R \qquad O = 0, \quad h = a+b+c \qquad R = 1$

$$|h - o| = |h| \qquad |h|^2 = h \cdot \bar h = (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) =$$

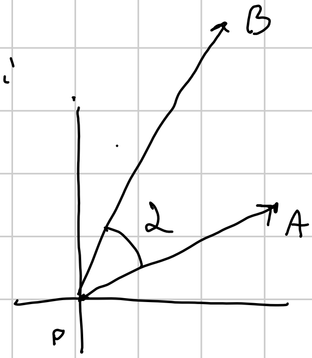
$$= \frac{(a+b+c)(ab+ac+bc)}{abc} = 4$$

$$\overset{1}{\cancel{4}}\, abc = a^2b + a^2c + \cancel{abc} + ab^2 + \cancel{abc} + b^2c + \cancel{abc} + ac^2 + bc^2$$

VETTORI



$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$



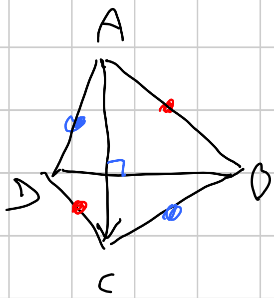
$\vec{A} \cdot \vec{B} = |A| \cdot |B| \cdot \cos\alpha$

$\vec{A} = (x, y) \qquad \vec{B} = (z, w)$

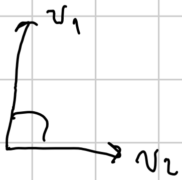
$\vec{A} \cdot \vec{B} = (xz + yw)$

Fatto: ABCD quadrilatero, $AC \perp BD \iff$

$\iff AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$



Sol: $AC \perp BD$



$v_1 \cdot v_2 = 0$

$\vec{AC} = \vec{C} - \vec{A}$

$\vec{BD} = \vec{D} - \vec{B}$

$(\vec{C} - \vec{A})(\vec{D} - \vec{B}) = 0$

$AC \perp BD \iff \boxed{\vec{C} \cdot \vec{D} - \vec{C} \cdot \vec{B} - \vec{A} \cdot \vec{D} + \vec{A} \cdot \vec{B} = 0}$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_1} = |v_1|^2 \cdot \cos 0 = |v|^2$

$|AB|^2 = (\vec{B} - \vec{A})^2$

$\vec{AB} = \vec{B} - \vec{A}$

$\vec{A} + \vec{AB} = \vec{B}$

$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2$

$(\vec{B} - \vec{A})^2 + (C - D)^2 = (A - D)^2 + (B - C)^2$

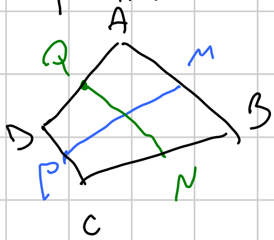
$\cancel{\vec{B} \cdot \vec{B}} - 2A \cdot B + \cancel{A \cdot A} + \cancel{C^2} - 2C \cdot D + \cancel{D^2} = \cancel{A^2} - 2AD + \cancel{D^2} + \cancel{B^2} - 2BC + \cancel{C^2}$

$\iff \boxed{\vec{A} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{C} - \vec{A} \cdot \vec{B} - \vec{C} \cdot \vec{D} = 0}$

ESER:

- $AC \perp BD \iff M, N, P, Q$ pt medi di AB, BC, CD, DA

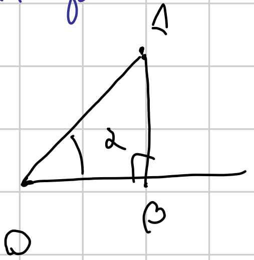
  $|MP| = |NQ|$



- ABCD quadrilatero, M, N, P, Q come sopra

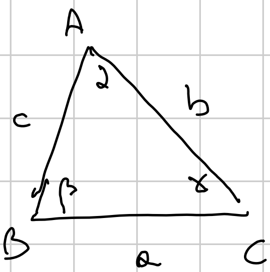
  SEMPRE, MNPQ è parallelogramma.

Trigonometria.



$$\sin\alpha = \frac{BA}{OA} \qquad \cos\alpha = \frac{OB}{OA}$$

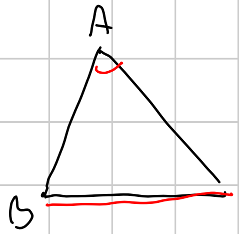
Teorema dei Seni



$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$

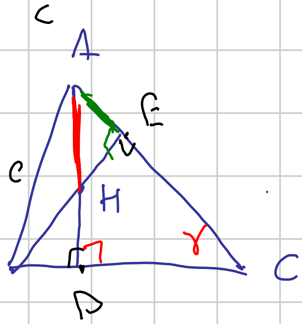
R: raggio della circ. circoscritta.

Teorema del Coseno



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

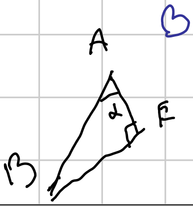
Es.:



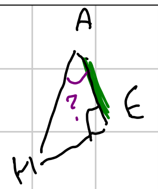
H ortocentro.

Trovare $|AH|$ in termini di

$a, b, c, \ \alpha, \beta, \gamma$

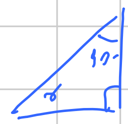


$$\cos\alpha = \frac{AE}{AB} \Rightarrow AE = AB\cdot\cos\alpha$$



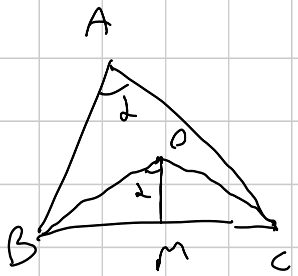
$\cos \widehat{HAE} = \frac{AE}{AH}$

$\widehat{HAE} = 90-\gamma$



$$AH = \frac{AE}{\cos(90-\gamma)} = \frac{AB\cdot\cos\alpha}{\sin\gamma} = \frac{c}{\sin\gamma}\cdot\cos\alpha = \frac{a}{\sin\alpha}\cdot\cos\alpha$$

$$AH = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$$



$BO = R$ $\quad \angle BOC = 2\alpha$

$$OM = R\cdot\cos\alpha = \frac{a\cdot\cos\alpha}{2\sin\alpha}$$

Teorema dei Seni

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{1}{2R}$$

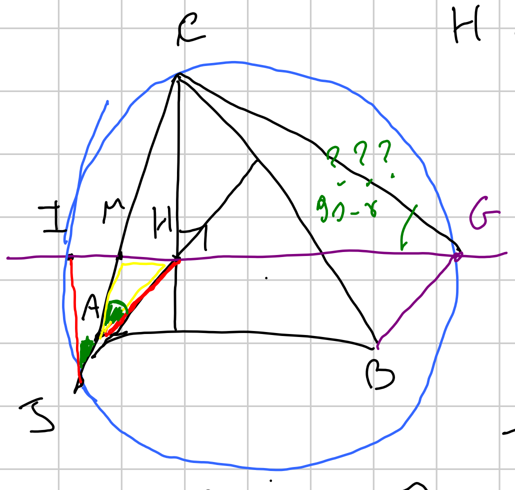
$$R = \frac{a}{2}\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$$

$AH = 2\,OM$

IMO SL 2015 G1

H ortocentro

G pt tale che $ABGH$ è parallelogramma



$HA \cap AC = M$

I = simmetrico di H rispetto M

Γ: circonferenza GCI

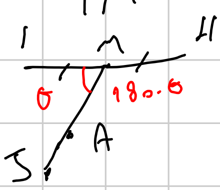
$J = \Gamma \cap AC$

Tesi: $IJ = AH$

$$\frac{\sin \widehat{IMJ}}{IJ} = \frac{\sin \widehat{IJM}}{IM}$$

teo seni su ΔIJM

$IM = MH$



$\sin IMJ = \sin HMJ$

$\sin\theta = \sin 180-\theta$

teo Seni MAH $\quad \frac{\sin AMH}{AH} = \frac{\sin MAH}{MH}$

$\underbrace{IJ}_{\text{Tesi}} \cdot \sin IJM = IM \cdot \sin IMJ = MH \cdot \sin HMA = \underbrace{AH}_{\text{Tesi}} \cdot \sin MAH$

Nuova Tesi: $\sin \widehat{IJM} = \sin \widehat{MAH}$

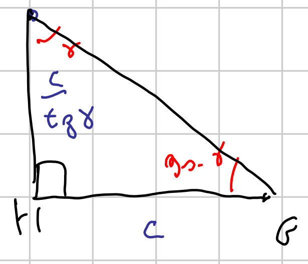
$\angle IJM = \angle IGC$ perché $GCIJ$ ciclico

$\angle MAH$

$\angle MAH = 90 - \gamma$

$\boxed{\text{Tesi}: \angle IGC = 90 - \gamma}$

C



$\left.\begin{array}{l} HG \parallel AB \\ CH \perp AB \end{array}\right\} \Rightarrow CH \perp HG$

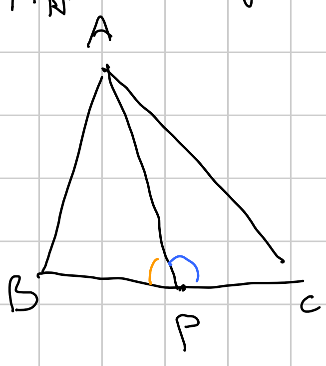
$HG = AB = c$

$CH = \frac{c}{tg\gamma}$

$AH = CH \cdot tg(ACH) = \quad c = \frac{c}{tg\gamma} \cdot tg(ACH)$

$tg(ACH) = tg\gamma \Rightarrow \angle ACH = \gamma$

Applic trigo: Teorema di Stewart.



$P \in BC$

$AB^2 \cdot PC + AC^2 \cdot BP = AP^2 \cdot BC + BC \cdot BP \cdot PC$

$c^2 \cdot PC + b^2 \cdot BP = AP^2 \cdot a + a \cdot BP \cdot PC$

Teorema del coseno in $\triangle APC$

$AC^2 = AP^2 + PC^2 - 2\, AP \cdot PC \cdot \boxed{\cos(\widehat{APC})}$ K

$\cos\alpha = -\cos(180-\alpha)$

$AB^2 = AP^2 + BP^2 - 2 \cdot BP \cdot PA \cdot \boxed{\cos(\widehat{BPA})}$ $-K$

$\cos(\widehat{APC}) = -\cos(\widehat{BPA})$

moltiplico la 1ª eq per BP, la 2ª per PC

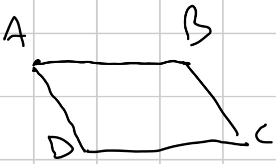
$AC^2 \cdot BP = AP^2 \cdot BP + PC^2 \cdot BP - 2\, AP \cdot PC \cdot BP \cdot K$

$AB^2 \cdot CP = AP^2 \cdot CP + BP^2 \cdot PC + 2\, BP \cdot PC \cdot AC\ (+K)$

$AC^2 \cdot BP + AB^2 \cdot CP = AP^2 (BP + PC) + BP \cdot PC\,(PC + BP) + 0$

$= AP^2 \cdot BC + BP \cdot PC \cdot BC$

ESER x CASA

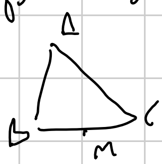


ABCD parallelogramma

dimostrare che $2(AC^2 + BD^2) = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2$

1) trigonometria 2) Vettori

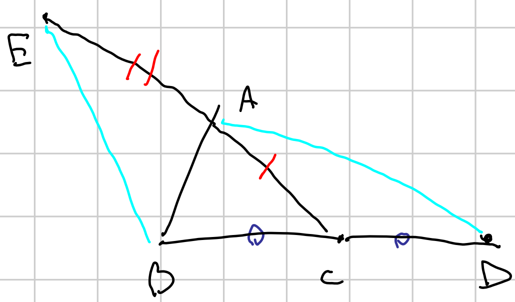
Hint:



AM mediana. Quanto è lungo? a, b, c

Problemi:

- EGMO 2013 - 1

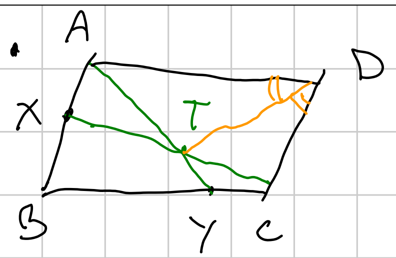


$D \in BC$ $BC = CD$

$E \in AB$ t.c. $EA = 2AC$

Tesi: se $\boxed{AD = BE}$

$\Rightarrow$ ABC è rettangolo



- $X \in AB$, $Y \in BC$ $\quad AX = CY$

  $AY \cap CX = T$.

  Dimostrare che DT è bisettrice di $\angle ADC$

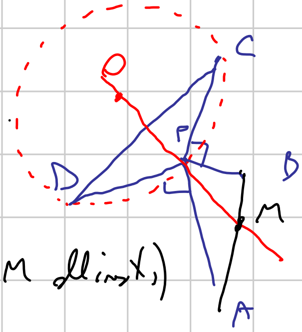
- ITA TST 2016-1

  $ABCD$ quadrilatero, P dentro t.c. ① $\angle APD = \angle BPC = 90$

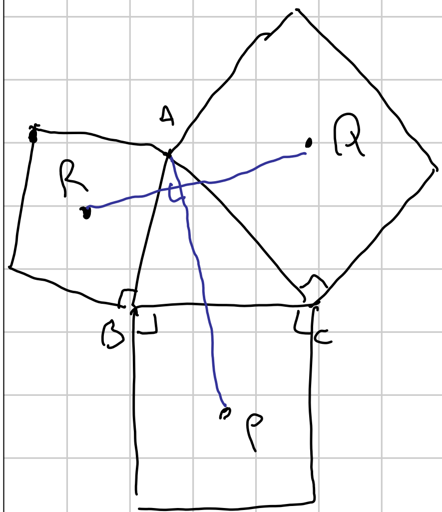
  ② $PA \cdot PD = PB \cdot PC$

  O circocentro di $\triangle CPD$.

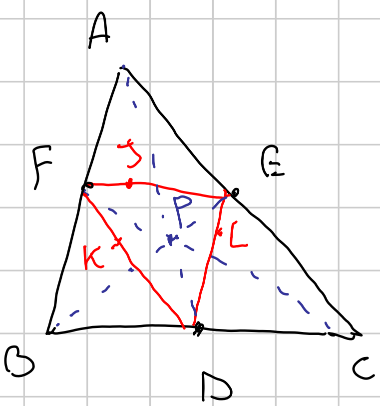
Tesi: PO passa per il pt medio di AB



(O, P, M allineati)



Tesi: $AP \perp RQ$

- 

  D, E, F sui lati BC, AC, AB

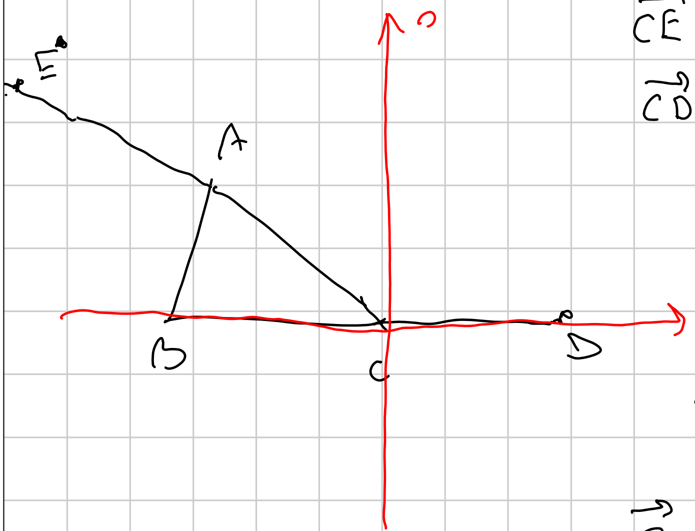
  t.c. AD, BE, CF concorrono in P

  J, K, L su EF, FD, ED

  t.c. DJ, EK, FL concorrono

Tesi: allora anche AJ, BK, CL concorrono.

Correzione



$\vec{CE} = 3\vec{CA}$

$\vec{CD} = -\vec{CB}$

metto l'origine in C

$\vec{CA} = \vec{A}$

$\vec{CB} = \vec{B}$

$\vec{D} = -\vec{B}$

$\vec{E} = 3\vec{A}$

Hp: $|AD| = |EB|$

$$|AD|^2 = (\vec{AD})\cdot(\vec{AD}) = (\vec{D}-\vec{A})(\vec{D}-\vec{A}) = \vec{D}\cdot\vec{D} + \vec{A}\cdot\vec{A} - 2\underbrace{\vec{D}}_{-\vec{B}}\cdot\vec{A}$$

$\boxed{\vec{D} = -\vec{B}}$ $\Rightarrow \vec{B}^2 + \vec{A}^2 + 2\vec{A}\cdot\vec{B}$

$$|BE|^2 = (\vec{B}-\vec{E})(\vec{B}-\vec{E}) = (\vec{B}-3\vec{A})(\vec{B}-3\vec{A}) = \vec{B}^2 + 9\vec{A}^2 - 6\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\cancel{\vec{B}^2} + \cancel{\vec{A}^2} + \cancel{2}\vec{A}\cdot\vec{B} = \cancel{\vec{B}^2} + \overset{8}{\cancel{9}}\vec{A}^2 - \overset{8}{\cancel{6}}\vec{A}\cdot\vec{B}$$

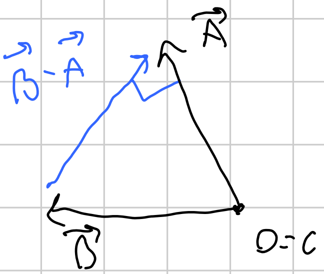
$8\vec{A}^2 - 8\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$ $\qquad 8\vec{A}(\vec{A}-\vec{B}) = 0$

$\vec{A} = 0$

$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0$

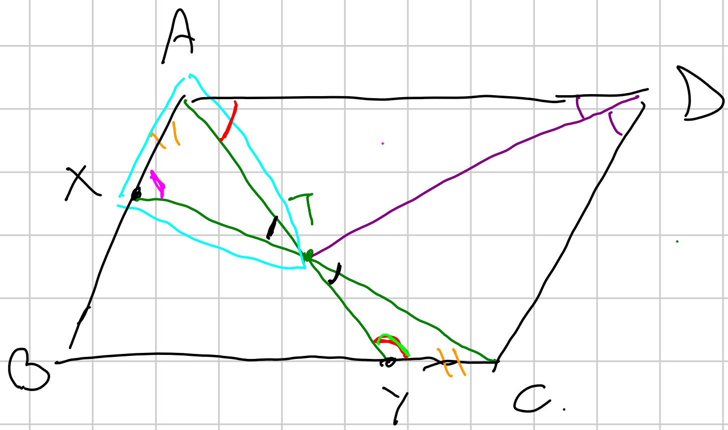
CASI DEGENERI

$\boxed{\vec{A} \perp \vec{A}-\vec{B}}$



$\Rightarrow \widehat{BAC} = 30°$

2



$AX = CY$

Tesi: DT bisettrice

$$\frac{AT}{\sin \widehat{AXT}} = \frac{AX}{\sin XTA} = \frac{YC}{\sin YTC} = \frac{TC}{\sin \widehat{TYC}} \rightarrow \frac{AT}{TC} = \frac{\sin AXT}{\sin TYC}$$

Th seni ΔAXT — th seni su ΔTYC

Teo Seni su ΔATD, ΔCTD

$$\frac{AT}{\sin ADT} = \frac{TD}{\sin TAD} \qquad \frac{TC}{\sin TDC} = \frac{TD}{\sin TCD}$$

$$\frac{AT}{TC} \cdot \boxed{\frac{\sin TDC}{\sin ADT}} = \frac{\cancel{TD}}{\cancel{TD}} \cdot \frac{\sin TCD}{\sin TAD}$$

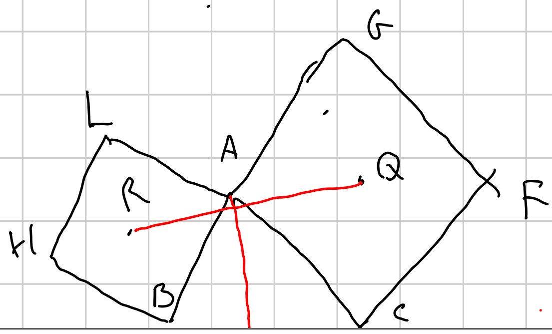
Hope = 1

$$\frac{\sin TDC}{\sin ADT} = \frac{TC}{TA} \cdot \frac{\sin TCD}{\sin TAD} = \frac{\cancel{\sin}\,\boxed{TYC}}{\sin AXT} \cdot \frac{\sin TCD}{\cancel{\sin}\,\boxed{TAD}} = 1$$

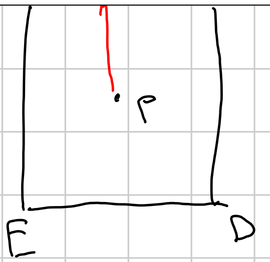
$\widehat{TYC} + \widehat{TAD} = 180^\circ \Rightarrow$ I seni sono uguali

$\widehat{TCD} + \widehat{AXT} = 180^\circ \Rightarrow$ I SENI sono uguali

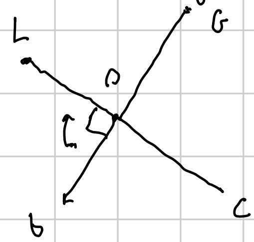
(3)

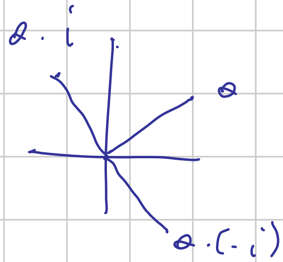


$RQ \perp AP$



Metto l'origine in $A = 0$



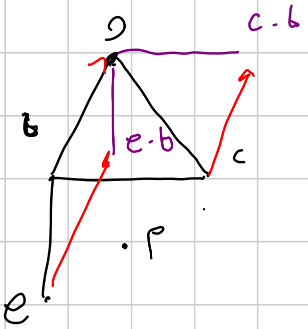


$l = b\cdot(-i)$

$g = c\cdot i$

R pt medio di BL $\Rightarrow$ $r = \frac{b+l}{2} = \frac{b-bi}{2}$

Q " CG = $q = \frac{c+ci}{2}$



c-b ruotato di 90° ↷ fa e-b

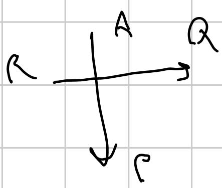
$(c-b)(-i) = e-b$ $\rightarrow$ $\left(\frac{c-b}{e-b} = -i \quad \sim \quad \frac{c-b}{e-b} = -\overline{(\ )} \right)$

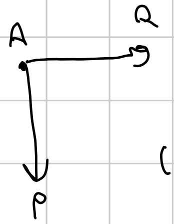
$e = bi + b - ic$

$p = \frac{e+c}{2} = \frac{bi+b-ic+c}{2}$

$\vec{AP} = p - 0 = p$

$\vec{RQ} = r - q = \frac{b-bi-c-ci}{2}$



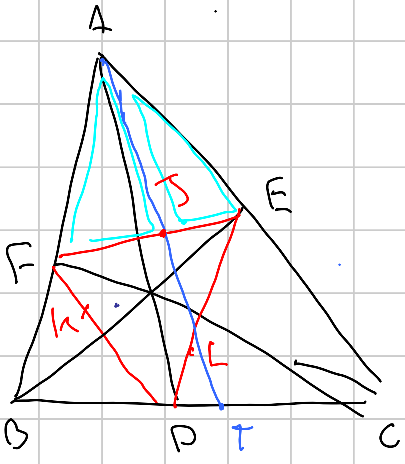


$(r-q)\cdot i\,\lambda = p$

$\lambda = 1$

$(r-q)\cdot i = \frac{bi-bi^2-ci-ci^2}{2} = \frac{bi+b-ci+c}{2} = p$

$AP \perp RQ$, ma anche $|AP| = |RQ|$! :)



AD, BE, CF concorrenti

Per teorema di Ceva, è vero che

(1) $\frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1$

(2) $\frac{FJ}{JE} \cdot \frac{EL}{LD} \cdot \frac{DK}{KF} = 1$ (Sempre Ceva)

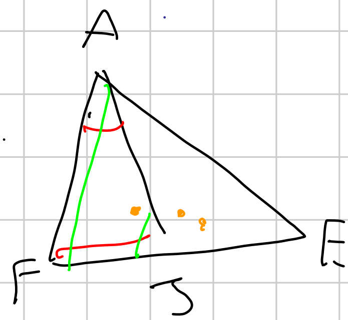
Voglio dimostrare AJ, BK, CL concorrenti.

Ceva → Ceva trig.

$\frac{BD}{DC} \to \frac{\sin BAD}{\sin DAC}$

$\Updownarrow$

$\boxed{\frac{\sin BAJ}{\sin JAE}} \cdot \frac{\sin ECL}{\sin LCD} \cdot \frac{\sin DBK}{\sin KBF} = 1$



Teo seni su ΔAFJ, AJE

$\frac{\sin BAJ}{FJ} = \frac{\boxed{\sin AJF}}{AF}$

$\frac{\sin JAE}{JE} = \frac{\boxed{\sin AJE}}{AE}$

SONO UGUALI

$\frac{\sin BAJ}{\sin JAE} \cdot \frac{JE}{FJ} = \frac{AE}{AF}$ su ΔAFE

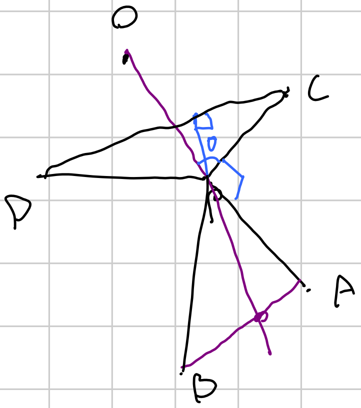
$\frac{\sin DBK}{\sin KBF} \cdot \frac{DK}{KF} = \frac{DF}{BD}$

$\frac{\sin}{\sin}$

Ceva su   Ceva su AD, BE, CF

$\Rightarrow \prod \frac{\sin BAJ}{\sin JAE} = 1$ → Ceva trig fine

BJ, BK, CL



$\angle APM = 90 - \theta$?

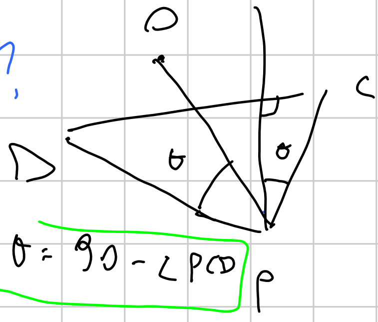
$\cos\theta$, $\sin\theta$

in $\triangle DPC$

$\Downarrow$

APPLICA RLW

in $\triangle PAB$



$\boxed{\theta = 90 - \angle PCD}$

G2 basic — Linda

Titolo nota 09/09/2019

Isometrie
Omotetie
Inversione circolare

$\boxed{\text{ISOMETRIE}}$

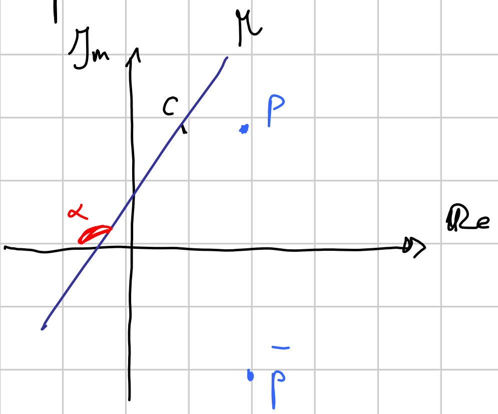
Conservano distanze e forme
Angoli mantengono la stessa misura

- Traslazione
  Definita da un vettore $\vec{v}$
  $P \to P + \vec{v}$

- Rotazione
  Serve centro C, angolo α tra 0 e 360
  Senso antiorario
  In complessi:
  Se C = origine $\quad z \to z e^{i\alpha}$
  Altrimenti $\quad z \to (z-c)\, e^{i\alpha} + c$

- Riflessione
  Definita con una retta r.
  Ogni punto va nel suo simmetrico rispetto ad r

In completo

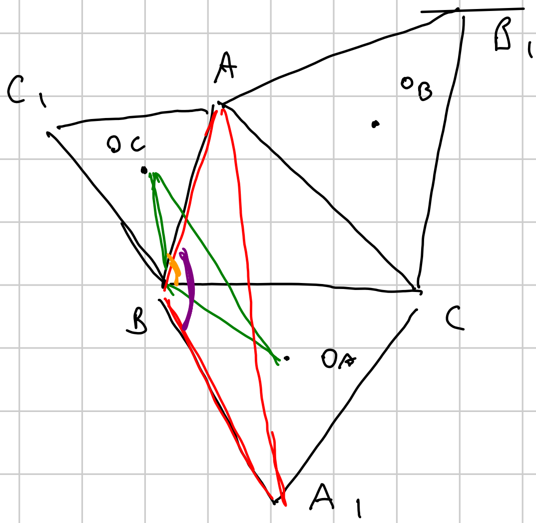


$$z \xrightarrow{\text{sposto l'origine}} (z-c) \xrightarrow{\text{ruotato } r} (z-c)\,e^{i\alpha} \xrightarrow{\text{coniugo}} \overline{(z-c)\,e^{i\alpha}}$$

$$\longrightarrow \overline{(z-c)\,e^{i\alpha}} \cdot e^{-i\alpha} + c$$

$$\longrightarrow \overline{(z-c)}\,e^{-2i\alpha} + c$$

• Esercizio 1 : Teorema di Napoleone



Tesi: $\Delta O_A O_B O_C$ è equilatero

Consideriamo rotazione di centro B di $30°$

$BA_1 \to BO_A$

$AB \to BO_C$

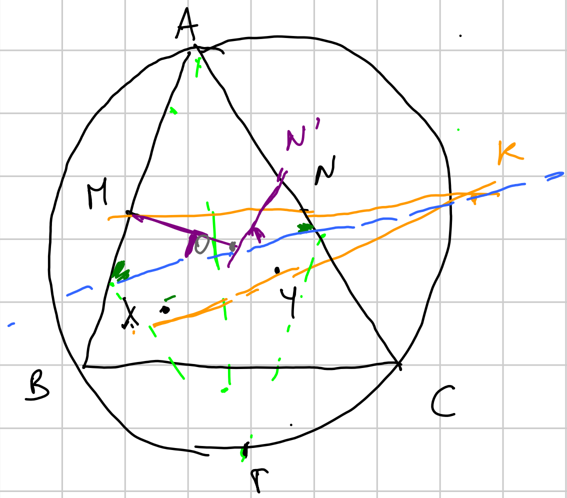
ΔABC_1, BCA_1 sono equilateri

$BA = BO_C \sqrt{3}$

$BA_1 = BO_A \sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad AA_1 = O_A O_C \sqrt{3}$ e si chiude

• Esercizio 2 ISL 2013 G2



M pto medio AB

N pto medio AC

T pto medio arco BC (non A)

$X = \odot AMT \cap$ asse di AC

$Y = \odot ANT \cap$ asse di AB

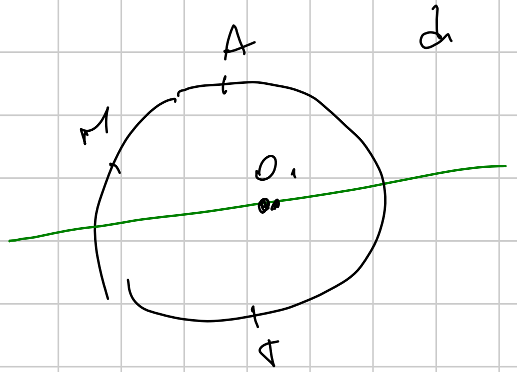
Tesi: $AK = KT$

Idea sensata: simmetria rispetto all'asse di AT

O sta sull'asse di AT

Dove va retta OM? Va in retta ON!

(Considero N' su AC tale che ON' sia la simmetrica di OM...)



⊙ AMT va in se stesso

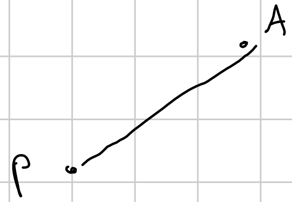
⊙ ANT va in se stesso

M va in X
N va in Y

$\Rightarrow$ l'intersezione tra MN e XY sta sull'asse di AT ✓

$\boxed{\text{OMOTETIE}}$

Definire con un centro C e fattore $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$



$A \to A'$

Se $\lambda > 0$, A' sta su semiretta PA

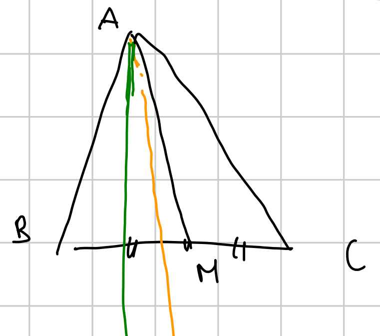
Altrimenti sull'altra semiretta.

Conservano parallelismo e angoli

Non conservano lunghezze e aree

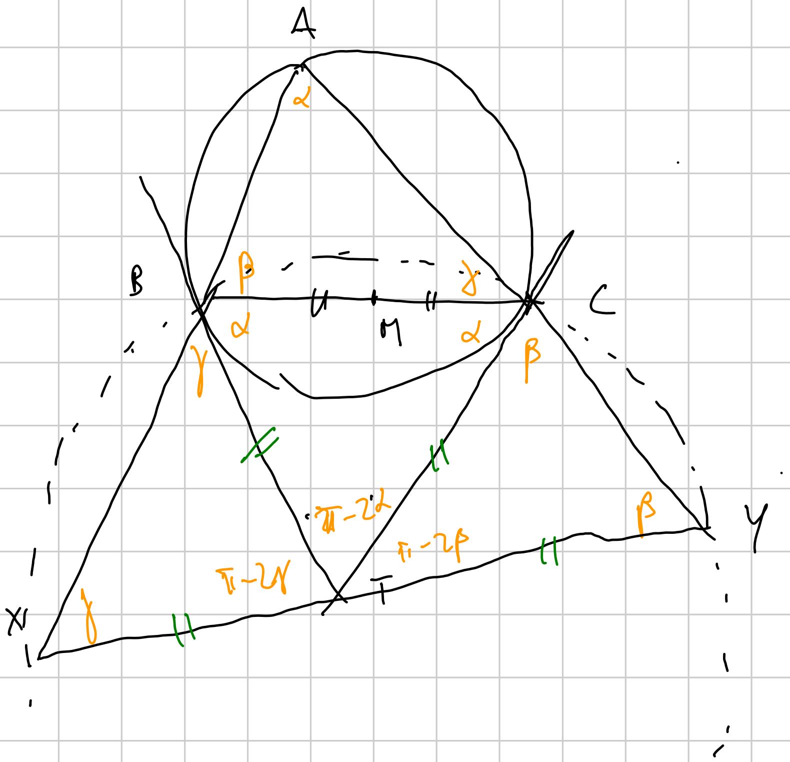
$A'B' = |\lambda| AB$

Aree: fattore λ^2



Simmediana: sym AM wrt bisettrice di $\angle BAC$

- Esercizio 3: Lemma della simmediana

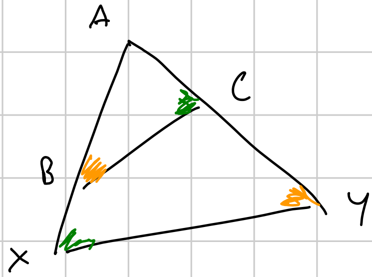


Tesi: AT è A-simmediana di $\triangle ABC$

$3\pi - 2(\alpha+\beta+\gamma) = \pi$

Dimostriamo che X, T, Y sono allineati

Antiparallele



$\Rightarrow$ BC, XY sono antiparallele

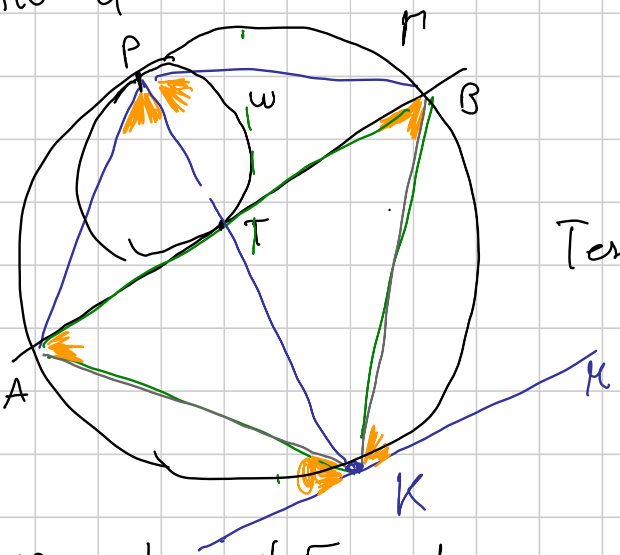
Simmetria wrt bisettrice di $\angle BAC$, omotetia fattore $\frac{AC}{AX}$

$X \to C$

$Y \to B$

$\Gamma \to$ punto medio BC

• Esercizio 4



Γ, ω tangenti in P

AB tange ω in T

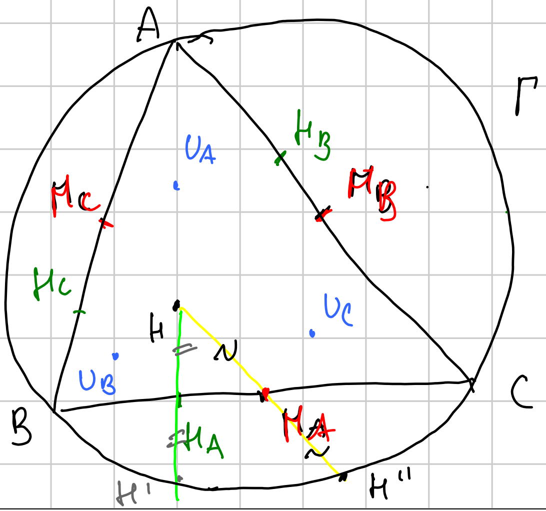
Tesi: $\angle AP\Gamma = \angle \Gamma PB$

Facciamo un'omotetia che manda ω in Γ

$\frac{\text{raggio } \Gamma}{\text{raggio } \omega}$

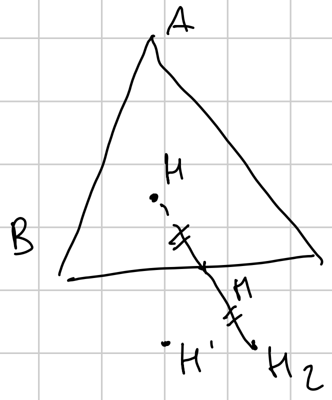
Dove va AB?

Feuerbach

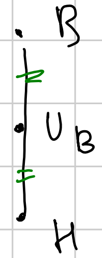


M_A, M_B, M_C punti medi dei lati
H_A, H_B, H_C piedi delle altezze
H ortocentro
U_A pto medio AH e ciclici

Esiste una circonferenza per
M_A M_B M_C H_A H_B H_C U_A U_B U_C



H' sym di H wrt BC $\Rightarrow$ $H' \in \odot ABC$
H_2 sym di H wrt M $\to$ $H_2 \in \odot ABC$



Omotetia centro H fattore 2
$U_A \to A$
$U_B \to B$
$U_C \to C$
H_A, H_B, H_C vanno nei simmetrici di H wrt lati
M_A, M_B, M_C vanno nei simmetrici di H wrt punti medi lati

tutto questo sta su Γ

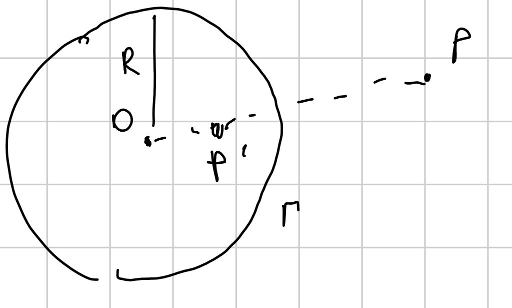
Esercizio: mostrare che centro della circonf Feuerbach è pto medio di OH

INVERSIONE CIRCOLARE

Definita con una circonferenza
(ci serve un centro di inversione e un raggio)

Ogni punto \ {centro} → altri punti
(tutto tranne il centro)

Vediamo dove va il punto P



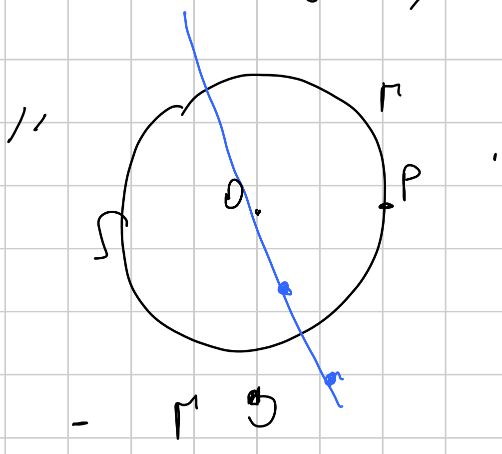
$OP \cdot OP' = R^2$
$OP' \cdot OP'' = R^2$

P → punto P' sulla semiretta OP
tale che $OP \cdot OP' = R^2$

Quello che sta dentro a Γ va fuori, quello che sta fuori va dentro

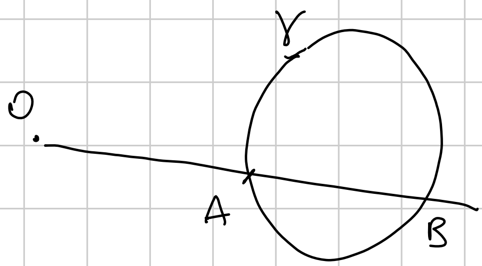
In complessi se il centro è l'origine

$$z \to \frac{R^2}{\bar{z}}$$



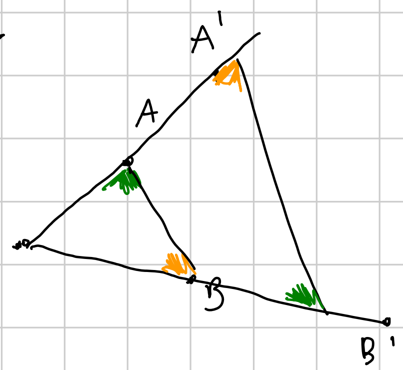
- Γ $\circlearrowleft$
- rette passanti per O $\to$ rette passanti per O
- rette non passanti $\to$ circonferenze per O
- circonferenze per O $\to$ rette non per O
- circonferenze non per O $\to$ circonferenze non per O

<u>Fatto utile</u> circonf. γ resta invariata per inversione se $\mathrm{pow}_\gamma O = R^2$



$$\mathrm{pow}_\gamma O = OA \cdot OB$$

- Esercizio 5



Trovare $A'B'$ in funzione di OA, OB, AB, R (ho invertito centro O, raggio R)

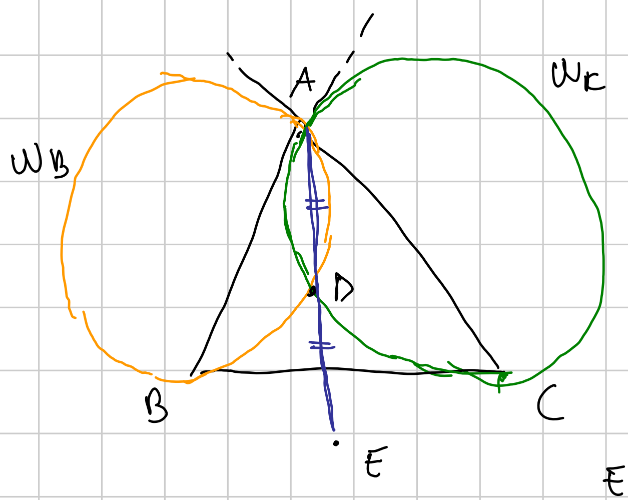
$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} OA \cdot OA' = R^2 \\ OB \cdot OB' = R^2 \end{array}\right\} \Rightarrow OA \cdot OA' = OB \cdot OB' \Rightarrow AA'B'B \text{ è ciclico}$$

$$\rightarrow \Delta OAB \sim \Delta OA'B'$$

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OB} = \frac{R^2}{OB \cdot OA}$$

$$\Rightarrow A'B' = \frac{R^2}{OB \cdot OA} \cdot AB$$

• Esercizio 6 (Allenamenti EGMO 2019 – 6°)



ω_B per B tange AC in A

ω_C per C tange AB in A

$\{A, D\} = \omega_B \cap \omega_C$

E : sym A wrt D

Tesi: $E \in \odot ABC$

Invertiamo in A con raggio AD

$B \rightarrow B'$ sulla retta AB

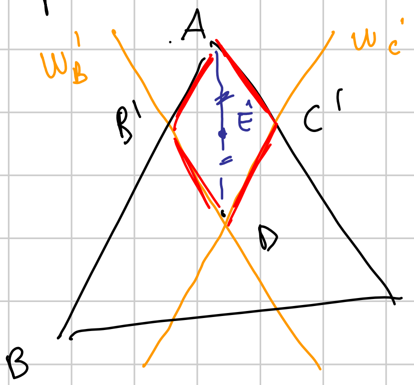
$C \rightarrow C'$ sulla retta AC

$D \circlearrowright$

$E \rightarrow E'$ pto medio AD $\quad AE' = \frac{1}{2} AD \Rightarrow AE' \cdot AE = \frac{1}{2} AD \cdot 2AD$

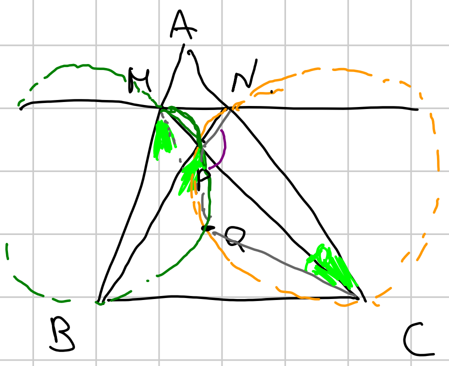
$W_B \to$ parallela ad AC per D

$W_C \to$ parallela ad AB per D.



B', C', $\hat{E}$ allineati, da cui la Tesi

- Esercizio – BMO 2009-2 (Esercizio famoso...)



$MN \parallel BC$

Tesi: $\angle BAP = \angle QAC$

Inversione + simmetria: raggio $\sqrt{\beta\gamma}$ ($\sqrt{AB \cdot AC}$), centro A
simmetria wrt bisettrice di $\angle BAC$

Angle chasing! $AMQC$ ciclico per angoli verdi
$ANQC$ ciclico analogamente

Inversione + Simmetria → wrt bisettrice di $\angle BAC$

↳ centro A, raggio $\sqrt{AB \cdot AN}$

$\triangle ABC \sim \triangle AMN \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN} \Rightarrow \underline{AB \cdot AN = AC \cdot AM}$

Quindi $B \to N$, $N \to B$

$C \to M$, $M \to C$

$\left.\begin{array}{l} - \odot AMQC \to BN \\ - \odot ANQB \to CM \end{array}\right\} \Rightarrow Q \to BN \cap CM = P$

---

1) [Teorema di Vecten]

Si costruiscano esternamente ai lati di $\triangle ABC$ i quadrati di lato AB, AC, BC.

Dimostrare che i centri dei quadrati formano triangolo equilatero

2) Sia $\triangle ABC$ un triangolo, ω la circonferenza inscritta tangente a BC in D. Sia T il diametralmente opposto di D in ω.

Sia E il simmetrico di D rispetto al punto medio di BC.

Dimostrare che A, T, E allineati

3) [Tolomeo] (Se non lo fai sei un babbeo!)

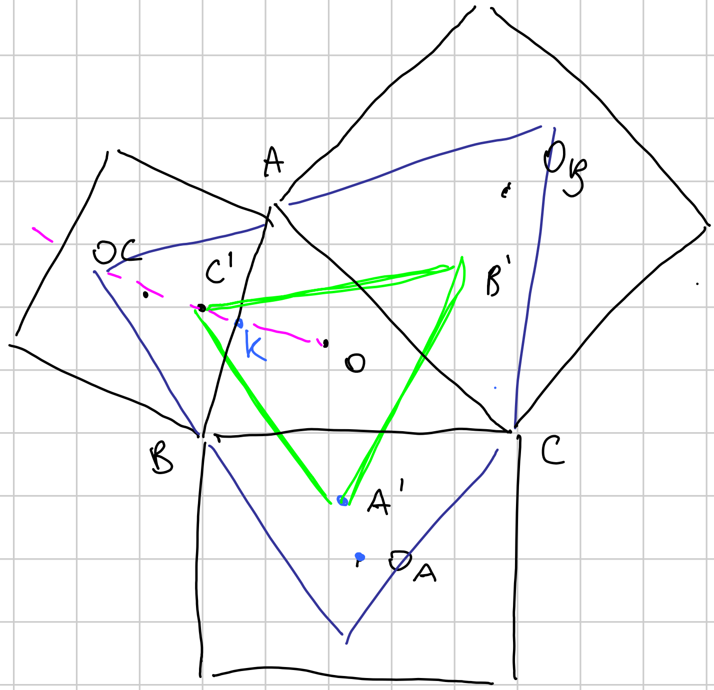
Sia ABCD un quadrilatero, allora
$$AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot CD$$
e l'uguaglianza se e solo se ABCD ciclico
[hint: inverti in D con raggio arbitrario]

4) [TF Senior 2013]

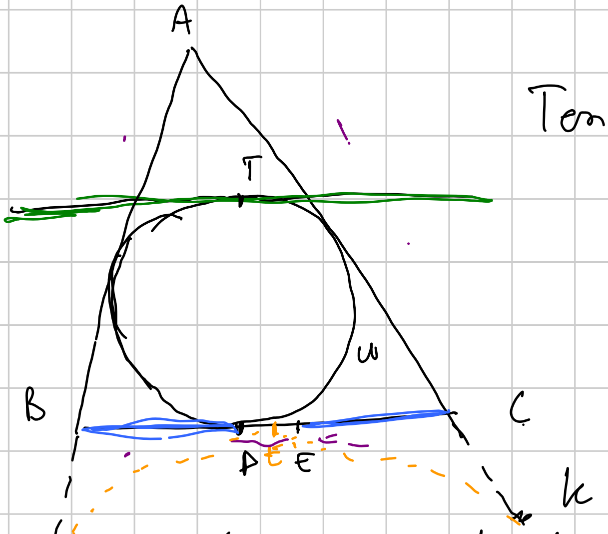
Sia $\triangle ABC$ un triangolo, sia D l'ulteriore intersezione tra la circonferenza per C e tangente ad AB in A e la circonferenza per B e tangente ad AC in A.
Sia E il punto sulla retta AB ($\neq A$) tale che $BA = BE$.
Sia F l'ulteriore intersezione tra AC e $\odot ADE$.
Dimostrare $AC = AF$

5) [EGMO 2016 - 4]
2 circonf con lo stesso raggio ω_1 e ω_2 si intersecano in X_1 e X_2.
Si prende una circonf ω tangente esternamente a ω_1 in T_1 e internamente a ω_2 in T_2
Dimostrare che X_1T_1 e X_2T_2 si intersecano su ω

1)



2)



Tesi: A, T, E allineati

$CK = AK - AC$

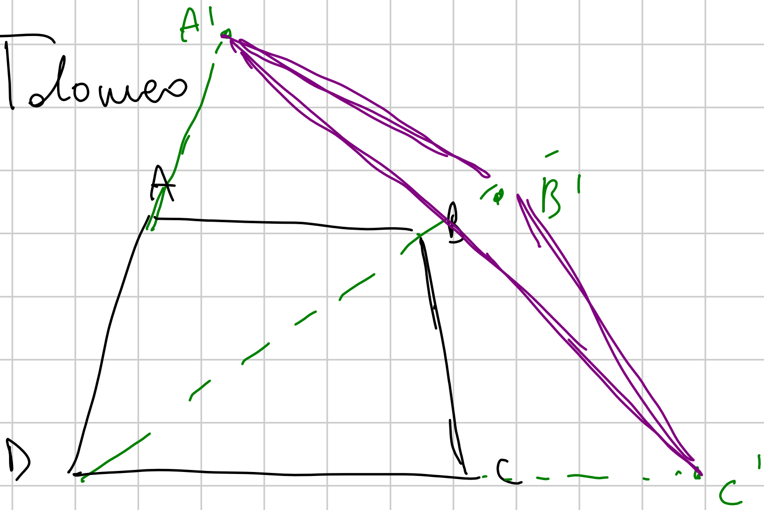
E è il punto di tangenza dell'A-excerchio con BC

$$BD = \frac{BC + AB - AC}{2}$$

$$E'C = \frac{BC + AB - AC}{2} \cancel{+} \frac{BC + AB + AC}{2} - AC$$

Idea: omotetia che manda ω in A-excerchio (l'immagine di T in quest'omotetia è E) $\Rightarrow$ A, E, T sono allineati

3) Tolomeo



Tesi è $AC \cdot BD \leq AD \cdot BC + AB \cdot DC$

Invertire in D

$$A'C' \leq A'B' + B'C',$$

con uguaglianza sse A', B', C' allineati sse ABCD ciclico

$\boxed{O \equiv D}$

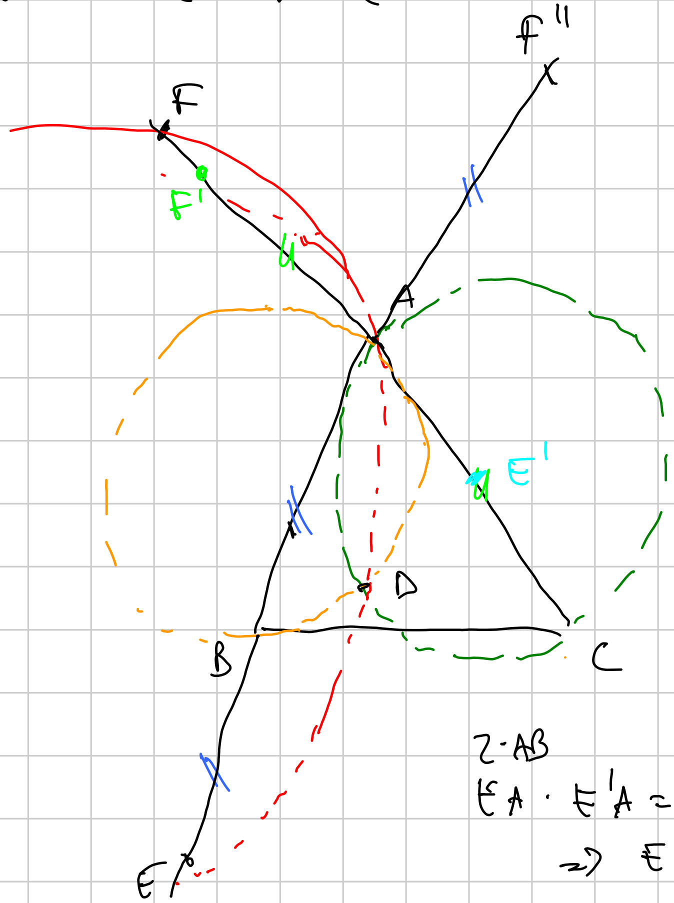
$$A'C' = \frac{R^2}{OA \cdot OC} \cdot AC$$

$$A'B' = \frac{R^2}{OB \cdot OA} AB$$

$$B'C' = \frac{R^2}{OB \cdot OC} \cdot BC$$

Sostituisco e viene

4)



$R = \sqrt{AB \cdot AC}$

$AB = BE$

Teo: $AF = AC$

$2 \cdot AB$

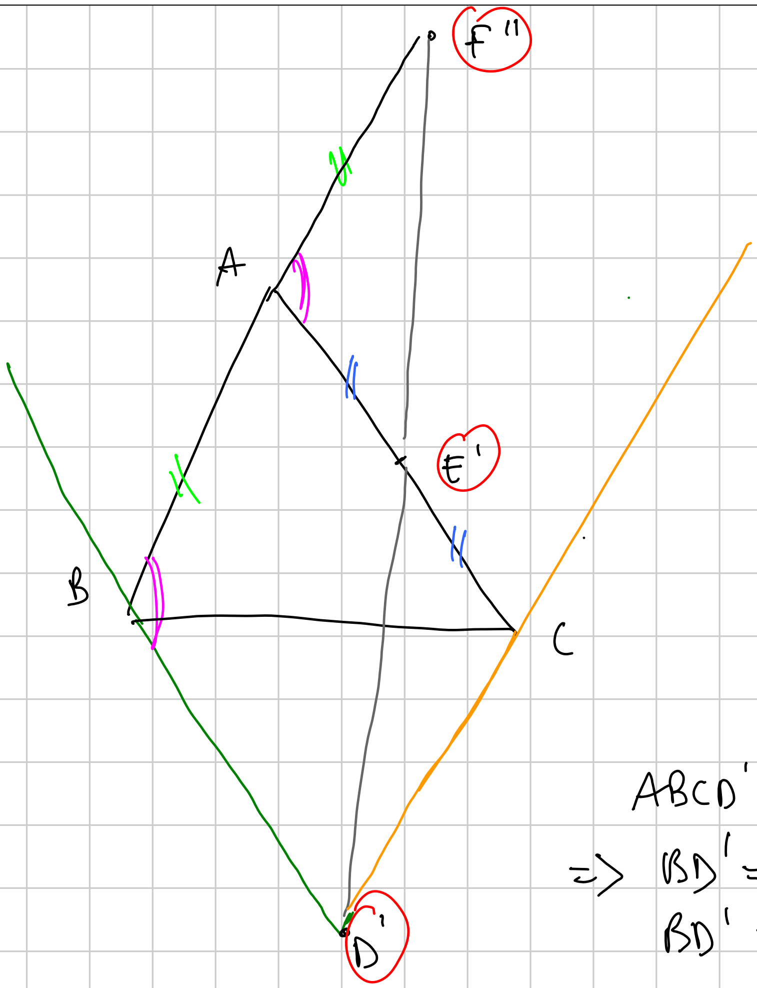
$EA \cdot E'A = AB \cdot AC$

$\Rightarrow E'A = \frac{AC}{2}$

F' il simmetrico di C rispetto ad A

Inversione centro A, $R = \sqrt{AB \cdot AC}$ + simmetria rispetto bisettrice di $\angle BAC$

B e C si scambiano



$ABCD'$ parallelog

$\Rightarrow BD' = AC$

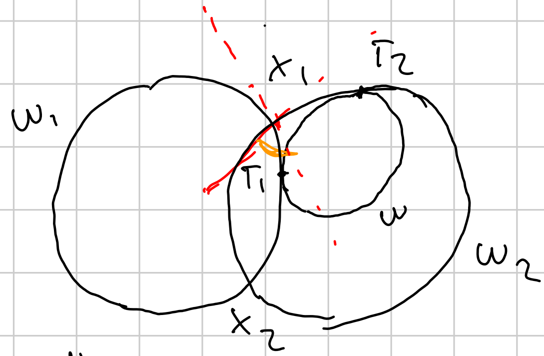
$BD' = 2AE'$

$\triangle BD'F'' \sim \triangle AF''E'$

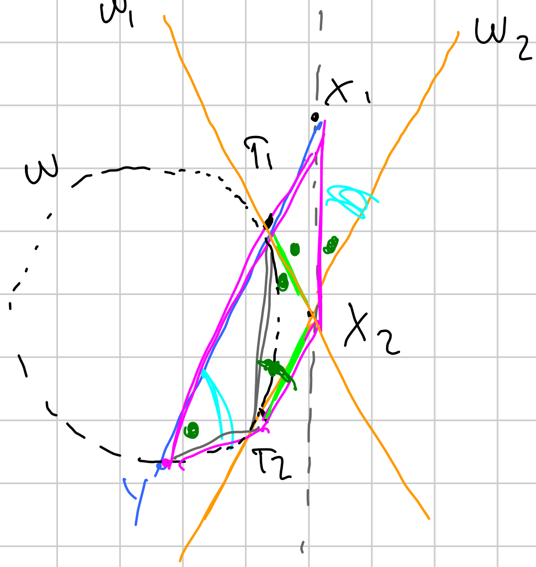
$\Rightarrow \angle E'F''A = \angle DF''A$

da cui l'allineamento.

5) EGMO 2016 – 4



Tesi: $X_1T_1 \cap X_2T_2 \in \omega$



Tesi $\iff$ $X_1 Y T_2 X_2$ è ciclico

$\angle X_2T_2T_1 + \angle T_2T_1X_2 = 2 \cdot$

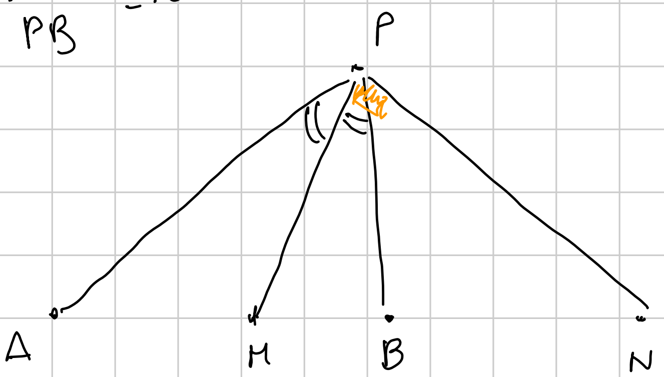
G3 basic — Linda

Titolo nota — 10/09/2019

$\boxed{\text{APOLLONIO}}$

Dati 2 punti distinti A, B e dato $r \in \mathbb{R}^+$ $(r \neq 1)$ trovare il luogo dei punti P tali che

$$\frac{AP}{PB} = r$$



Prendiamo M, N sulla retta AB tali che

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NB} = r$$

Prendiamo P tale che $\frac{PA}{PB} = r$

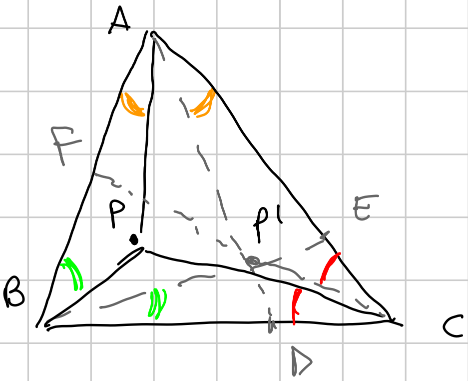
$$\frac{PA}{PB} = \frac{AM}{MB}$$

$$\frac{PA}{PB} = \frac{AN}{NB}$$

$\angle MPN = 90^\circ \Rightarrow P \in$ circonf diametro MN $\blacksquare$

Esercizio per casa:
Dato ΔABC e dette $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ le circonferenze di Apollonio di ΔABC. (Γ_A passa per A e $\frac{PB}{PC} = \frac{AB}{AC}$)
dimostrare che $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C$ hanno un asse radicale.

CONIUGATO ISOGONALE

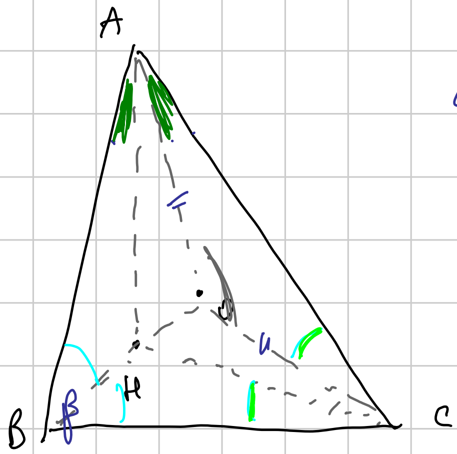


ΔABC, punto P.
$D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$
Tesi: AD, BE, CF concorrono (in P').

P' è il coniugato isogonale di P

Come si dimostra? Ceva trigonometrico

<u>Fatto noto</u> Dato ΔABC, siano H il suo ortocentro e O il suo circocentro.
Allora H e O sono coniugati isogonali



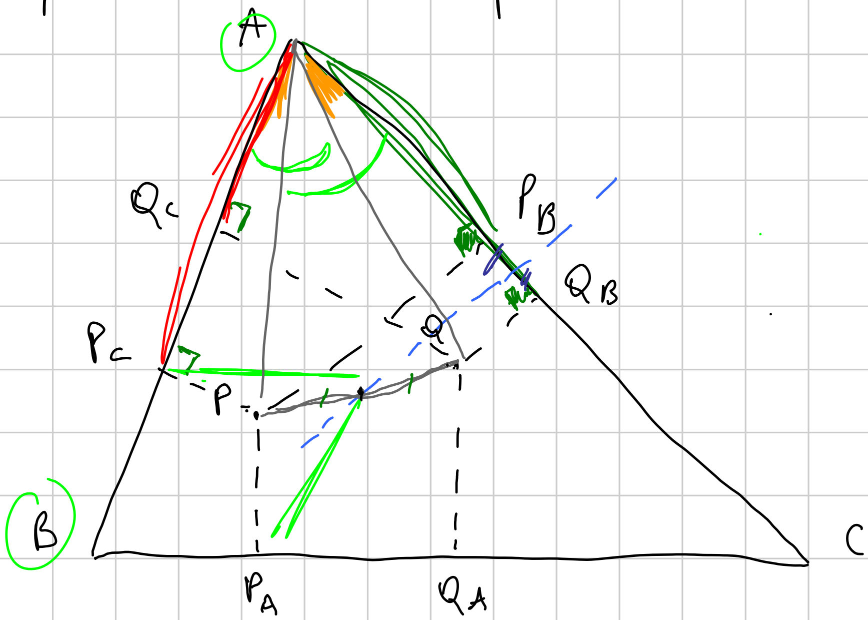
$\angle BAH = \frac{\pi}{2} - \beta$

$\angle COA = 2\beta$

$\Rightarrow \angle OAC = \frac{\pi}{2} - \beta$

- Esercizio

Sia P un punto interno ad ΔABC e sia Q il suo coniugato isogonale. Allora le proiezioni di P sui lati di ΔABC e le proiezioni di Q sui lati di ΔABC stanno su una stessa circonf di centro il pto medio di PQ



$\Delta P_CAP \sim \Delta QAQ_B$,

$\Rightarrow \frac{AP_C}{AQ_B} = \frac{AP}{AQ}$

$\Delta Q_CAQ \sim APP_B$

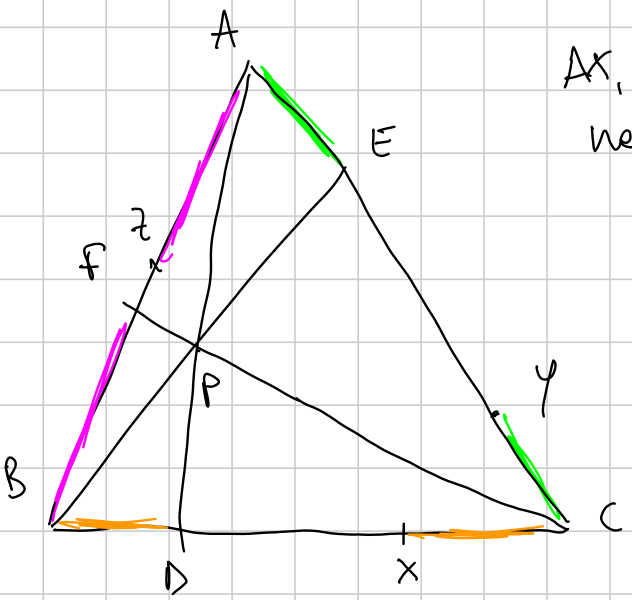
$\Rightarrow \frac{AQ_C}{AP_B} = \frac{AQ}{AP}$

$$\frac{AP_C}{AQ_B}\cdot\frac{AQ_C}{AP_B} = \underbrace{\frac{AP}{AQ}\cdot\frac{AQ}{AP}}_{1}$$

$$\Rightarrow \quad AP_C \cdot AQ_C = AQ_B \cdot AP_B$$

Quindi $P_C Q_C P_B Q_B$ ciclico

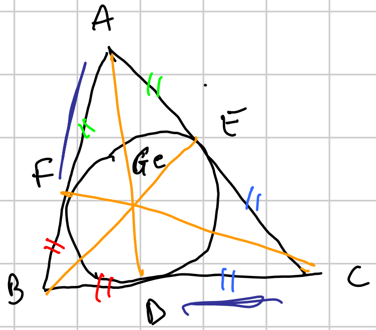
$\boxed{\text{CONIUGATO ISOTOMICO}}$

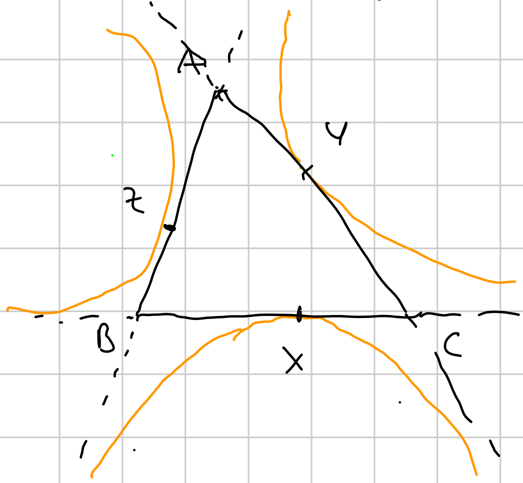


AX, BY, CZ concorrono nel coniugato isotomico di P

$$\frac{\overset{XC}{\overset{\shortparallel}{BD}}}{DC}\cdot\frac{CE}{\underset{YC}{\underset{\shortparallel}{EA}}}\cdot\frac{AF}{\underset{AZ}{\underset{\shortparallel}{FB}}}=1$$

PUNTO DI GERGONNE – PUNTO DI NAGEL





AD, BE, CF concorrono nel punto di Gergonne

AX, BY, CZ concorrono nel punto di Nagel

Fatto: Gergonne e Nagel sono coniugati isotomici

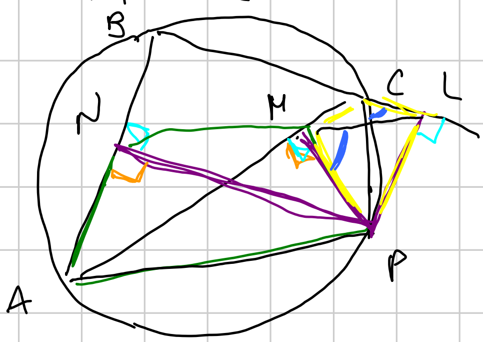
Dobbiamo mostrare $BD = CX$, $AE = CY$, $AF = BZ$

$$BD = \frac{AB + BC - AC}{2}$$

RETTA DI SIMSON

ABCP ciclico. Facciamo le proiezioni di P sulle rette dei lati di ΔABC (M, N, L).

Allora M, N, L allineati.



Mostreremo che

$\angle NMP + \angle PML = 180$

APCB è ciclico $\Rightarrow$ $\angle PAB + \angle PCB = 180°$
$\angle PAN + \angle PCB = 180°$

APMN ciclico $\Rightarrow$ $\angle PAN + \angle PMN = 180°$

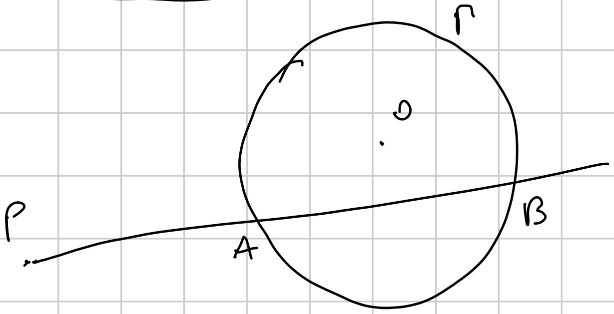
$$\boxed{\angle PCB = \angle PMN}$$

$$\boxed{\angle PML = \angle PCL = 180 - \angle PCB}$$

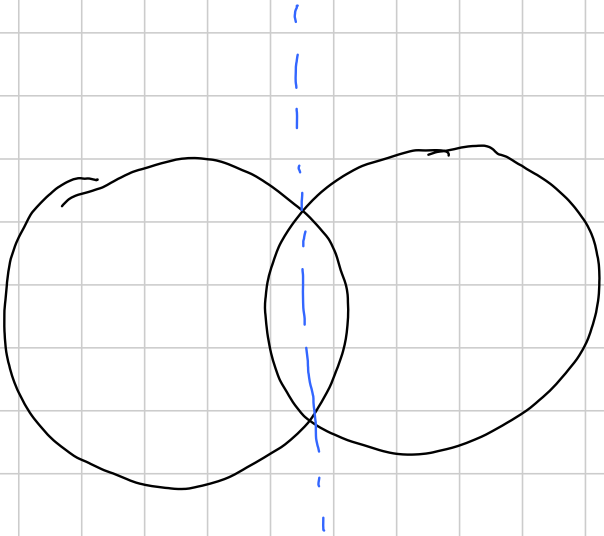
$$\angle PMN + \angle PML = \angle PCB + 180 - \angle PCB = 180$$

Esercizio per casa:
Sia ΔABC un triangolo e Γ la sua circoscritta. Prendiamo P, Q su Γ. Dimostrare che l'angolo tra le 2 rette di Simson di P e Q è $\frac{1}{2} \angle POQ$ (O circocentro di ΔABC)

POTENZE VARIE



$$pow_{\Gamma} P = PA \cdot PB = PO^2 - r^2$$



Prese 3 circonferenze, esiste sempre un punto che abbia la stessa potenza rispetto alle 3 circonferenze (centro radicale)

È il punto di concorrenza degli assi radicali delle circonferenze a 2 a 2

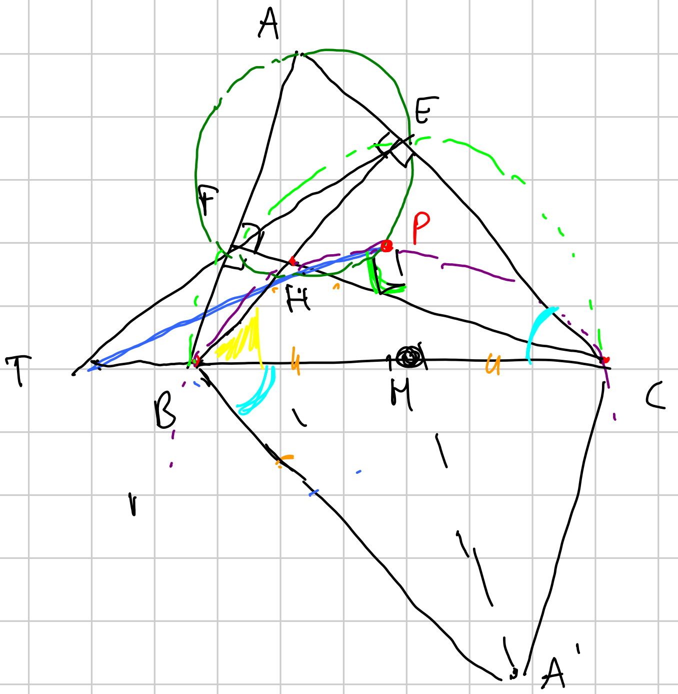
Tesi: $TH \perp AM$

Vogliamo A, P, M allineati

EF è l'asse radicale di $\odot AEHF$ e $\odot BCEF$
BC è l'asse radicale di $\odot BCEF$ e $\odot BHC$
T è centro radicale delle circonf $\odot AEHF$, $\odot BCEF$, $\odot BCH$
$T \in$ asse radicale di $\odot AEHF$ e $\odot BCH$

$\Rightarrow$ TH è asse radicale di $\odot AEHF$ e $\odot BHC$

$\boxed{AP \perp PH}$



A': sym di A wrt M

$ABA'C$ parallelogramma $\Rightarrow \angle CA'B = \angle CAB = \alpha$

$\angle BHC = \pi - \alpha \Rightarrow A' \in \odot BCH$

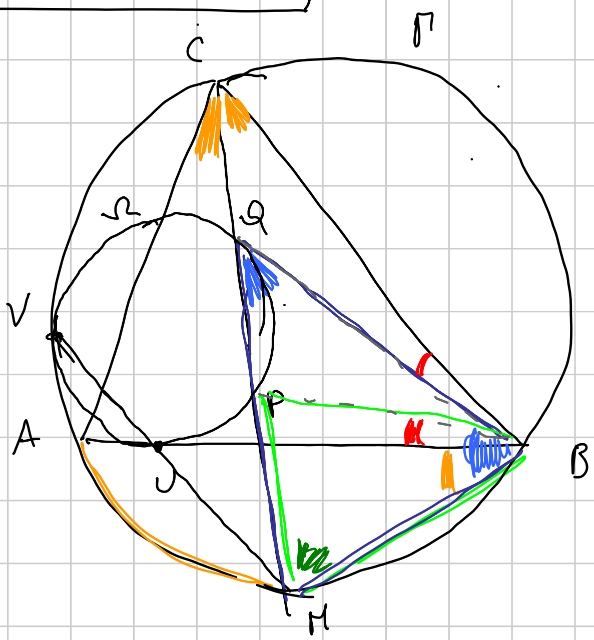
$\angle A'BC = \gamma \qquad \angle CBH = \frac{\pi}{2} - \gamma$

$\angle A'BH = \angle A'BC + \angle CBH = \frac{\pi}{2}$

$A'H$ diametro della circonf $\odot BHC$

$P \in \odot BHC \Rightarrow \boxed{\angle HPA' = \frac{\pi}{2}}$

$\boxed{\text{EGMO 2018 - 5}}$



Tesi: $\angle ABP = \angle QBC$

$\angle MQB = \alpha + \alpha$

ΔMAB è isoscele

$MA^2 = MB^2$

VU è bisettrice di $\angle AVB$

$M \in VU$

(Provare a dimostrarlo!) $\Delta MUA \sim \Delta MAV$

$MU \cdot MV = MA^2 = MB^2$

$\text{pow}_\Omega M$: $MU \cdot MV = MP \cdot MQ$

$MB^2 = MP \cdot MQ$

$\frac{MB}{MP} = \frac{MQ}{MB}$, $\angle BMP = \angle BMQ$

$\Rightarrow \Delta BMP \sim \Delta BMQ$

1) IMO 2006 - 1
Sia I l'incentro di ΔABC e sia P un punto interno ad ΔABC tale che
$$\angle PBA + \angle PCA = \angle PBC + \angle PCB$$
Mostrare che $AP \geq AI$, con l'uguaglianza sse $P \equiv I$

2) IMO 2008 - 1
Sia H l'ortocentro di ΔABC. La circonferenza Γ_A con centro il pto medio di BC passante per H interseca BC in A_1, A_2. Definiamo analogamente $\Gamma_B, \Gamma_C, B_1, B_2, C_1, C_2$. Dimostrare che $A_1 B_1 C_1 A_2 B_2 C_2$ è ciclico.

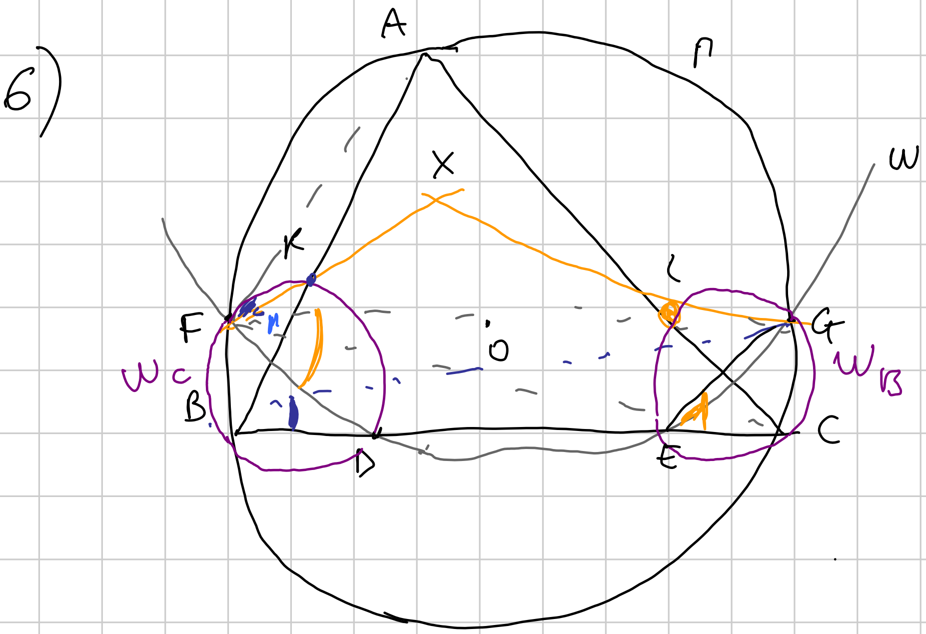
3) Sia ΔABC acutangolo con $AB \neq AC$ e siano E, F i piedi dell'altezza da B, C. La tangente a $\odot ABC$ da A interseca BC in P. La parallela a BC per A interseca EF in Q. Dimostrare che PQ è perpendicolare alla mediana da A.

4) ΔABC ha perimetro 4. I punti X e Y stanno sulle semirette AB, AC tali che $AX = AY = 1$. Sia $M = XY \cap BC$, con M che sta tra B e C. Dimostrare che o il perimetro di ΔACM è 2 o il perimetro di ΔABM è 2

5) Siano P, Q punti sui lati AC, AB di ΔABC. Siano K il pto medio di BP, L il pto medio di QC, M il pto medio di PQ. Sia $\Gamma = \odot MKL$. Sapendo che PQ tange Γ, dimostrare $OP = OQ$
(O circocentro di ΔABC)

6) IMO 2015 - 4
Sia Ω la circoscritta ad ΔABC e sia O il
Una circonferenza Γ con centro A interseca BC in D e E tali che D è tra B ed E. Sia $\{F, G\} = \Gamma \cap \Omega$. F sull'arco AB di Ω che non contiene C e G sta sull'arco AC di Ω che non contiene B. La circoscritta a ΔBDF e la circoscritta a ΔCEG intersecano AB, AC in K e L, rispettivamente. Supponiamo che le rette FK, GL siano distinte e $X = FK \cap GL$. Dimostrare A, X, O allineati

6)



$\angle CLG =$
$= \angle AGL - \angle LAG$
$\angle AGL = \angle CLG + \angle LAG$

AO è asse di FG

Dobbiamo mostrare X ∈ asse FG

$\iff \angle KFG = \angle LGF$

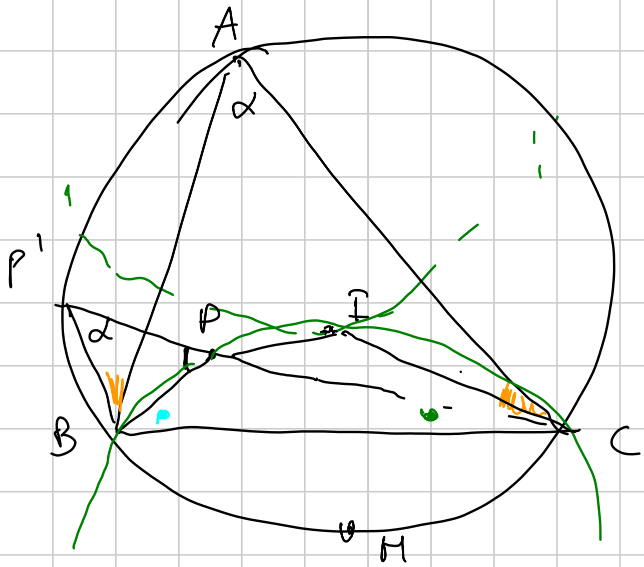
$\angle AFG = \angle AGF$

$\angle GFX + \angle XFA = \angle FXG + \angle XGA$

$\boxed{\text{Tesi}: \quad \angle XFA = \angle XGA}$

$$
\begin{aligned}
\angle KFA &= \angle DFG + \angle GFA - \angle DFK \\
&= \angle CEG + \underbrace{\angle GBA - \angle DBK}_{= \angle CBG} \\
&= \angle CEG + \angle CBG \\
&= \angle CLG + \angle CAG \\
&= \angle AGL \quad \longrightarrow \quad \text{Tesi}
\end{aligned}
$$

1)



$\angle PBA + \angle PCA =$
$= \angle PCB + \angle PBC$

Tesi: $AP \geq AI$

$$\begin{aligned}\angle PBP' &= \angle PBA + \angle ABP' \\ &= \angle PBA + \angle PCA \quad \text{ipotesi} \\ &= \angle PCB + \angle PBC \\ &= \angle P'PB\end{aligned}$$

$\Delta P'PB$ isoscele su PB : $\angle BP'P = \alpha$

$\Rightarrow \angle P'PB = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} = \angle BIC$

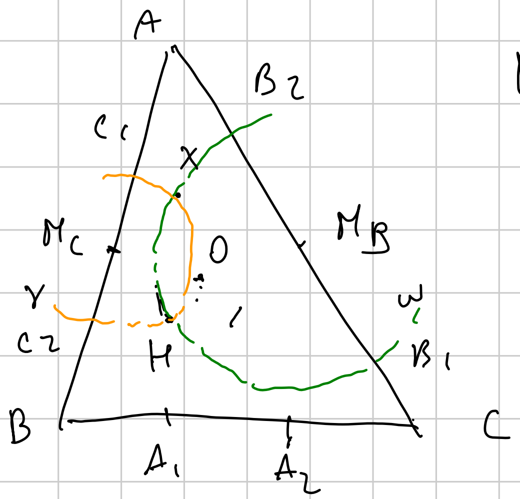
$\Rightarrow \angle BPC = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$ BCIP ciclico

$\odot BIC$ passa per l'A-excentro e ha centro pto medio di $\widehat{BC}$ (non contiene A)

Questo chiude

2)



$M_B M_C \parallel BC$

$XH \perp BC$

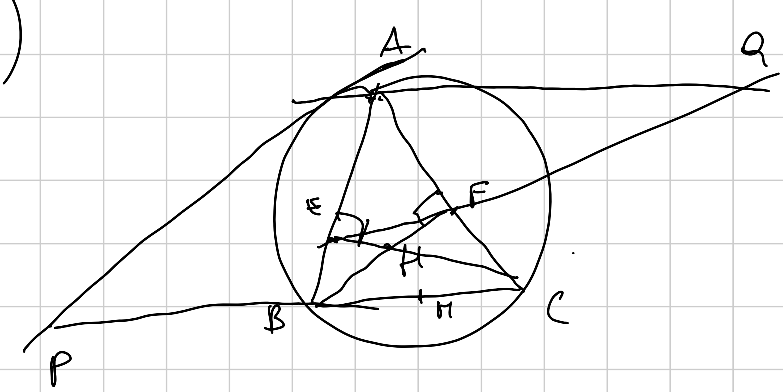
$AH \perp BC$

$\Rightarrow A, X, H$ allineati

$\text{pow}_\gamma A = \text{pow}_\omega A$

$\Rightarrow C_1 C_2 B_1 B_2$ ciclico

3)



Tesi

$AM \perp PQ$

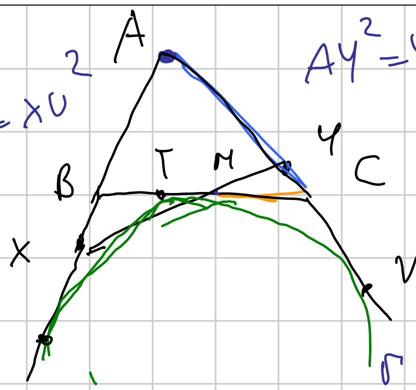
⊙BCEF, ⊙ABC, ⊙A : P centro radicale

ha centro M

Vogliamo dimostrare che QP è asse radicale di ⊙BCEF, ⊙A

Hope: Q centro radicale di ⊙A, ⊙BCEF, ⊙AEF

4)



$AX^2 = XU^2$ $AY^2 = YV^2$

$AB + BC + CA = 4$

$AX = AY = 1$

$2p(CMA) = 2$? o

$2p(BMA) = 2$?

$$\underbrace{\frac{AB + BC + CA}{2}}_{} = 2$$

$$AU = AV = \frac{AB + BC + CA}{2} = 2$$

$$\Rightarrow XU = YV = 1$$

$$AV = AC + CV = AC + CT = AC + \underbrace{TM}_{= AM} + MC$$

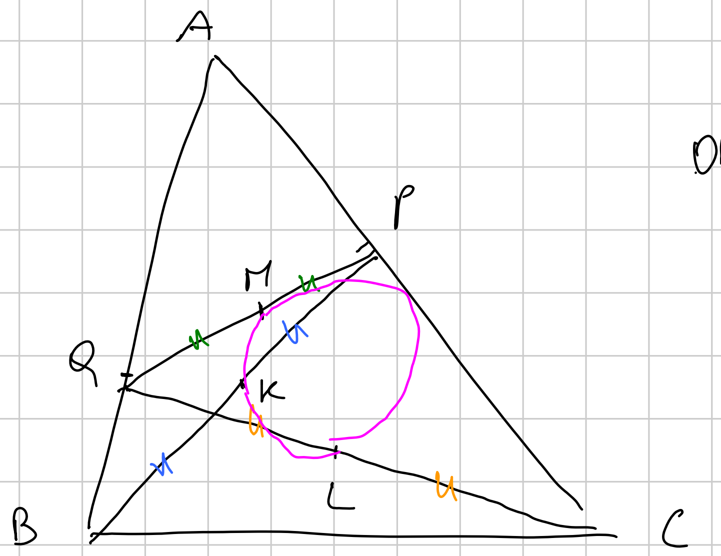
XY asse radicale di circ centro A degenere e A-excerchio

$M \in XY \Rightarrow \text{pow}_{\odot A} M = \text{pow}_{\Gamma} M$

$AM^2 = TM^2$

$\Rightarrow AM = MT$

$\Rightarrow \triangle CMA$ ha perimetro 2



$OP = OQ$

Sfruttando $ML \parallel PC$ e la tangente $\angle LKM = \angle APQ$

Allo stesso modo, $\angle AQP = \angle MLK$

$$\Rightarrow \quad \Delta APQ \sim \Delta MKL$$

$$\frac{AQ}{AP} = \frac{ML}{MK} = \frac{\frac{1}{2}PC}{\frac{1}{2}BQ}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{AQ}{AP} = \frac{PC}{BQ}.$$

$$\Rightarrow \quad AQ \cdot BQ = PC \cdot AP$$

r raggio ΩABC

$$\mathrm{pow}_{\Omega ABC}\, Q = \mathrm{pow}_{\Omega ABC}\, P$$

$$OQ^2 - r^2 = OP^2 - r^2$$

$\Rightarrow \quad OQ = OP$

Geometria 3 (Basic) – Linda Friso

N2 Basic

Titolo nota 08/09/2019

Diofantee

Un'eq. diof. è un'equazione dove cerchiamo sol intere

Trovare tutte le coppie $\mathbb{Z} \ni n, m$ t.c. $m(n+3) = n^4 + 2016$

" $(x, y) \in \mathbb{Z}_{>0}$ t.c. $x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2$

Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ dimostrare che esistono solo finite terne $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$ t.c.

$$\begin{cases} a+b-c = n \\ a^2+b^2-c^2 = n \end{cases}$$

$$9^a - 7^c = 2^b$$

Tecniche

Congruenze

$y^2 = x^5 - 4$

assurdo mod 11

- fattorizzare e controllare un fattore alla volta

Disuguaglianze

se so che LHS > 1000 RHS allora non ci sono più soluz.

- se $0 < x < 1$ non è intero

$n^2 \leq n^2+n \leq n^2+2n+1$

$n \leq \sqrt{n^2+n} \leq n+1$

$p^a + 36 = b^2 \qquad a,b \in \mathbb{Z},\ p$ primo

$p^a = (b-6)(b+6)$

$\qquad\quad \overset{\shortparallel}{p^{a'}} \qquad \overset{\shortparallel}{p^{a''}}$

$p^{a''} - p^{a'} = 12 \quad \nearrow \ p \mid 12 \quad (a', a'' \geq 1)$

$\qquad\qquad\qquad\quad \searrow \ b = 7 \quad (a' = 0)$

EGMO 13 4

Trovare tutti gli $a, b \in \mathbb{Z}$ t.c.

$P(n) = \dfrac{n^5 + a}{b}$ e' intero per 3 valori di n interi cons.

$\begin{cases} (n-1)^5 \equiv -a & (b) \\ n^5 \equiv -a & (b) \\ (n+1)^5 \equiv -a & (b) \end{cases}$ $\quad (b \geq 3$ facilmente$)$

$\begin{cases} (n-1)^5 \equiv n^5 & (b) \\ (n+1)^5 \equiv n^5 \end{cases} \iff \begin{cases} -5n^4 + 10n^3 - 10n^2 + 5n - 1 \equiv 0 \\ 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1 \equiv 0 \end{cases}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Downarrow$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 5 \nmid b$

$\begin{cases} 5n^4 + \ldots \equiv 0 \\ 20n^3 + 10n \equiv 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2n^2 + 1 \equiv 0 \\ 5n^4 + \ldots \equiv \end{cases}$

$\vdots$

$\vdots$

continuo con resti successivi : algoritmo di Euclide per MCD

$\vdots$

$11 \equiv 0 \quad (b)$

$\Rightarrow \quad b \mid 11 \quad$ solo finiti casi

$$\begin{array}{l} b \mid \text{Cosa}_1 \\ b \mid \text{Cosa}_2 \end{array} \Rightarrow b \mid (\text{cosa}_1, \text{cosa}_2)$$

Un po' di disuguaglianze

Determinare tutti gli $a, b, c \in \mathbb{Z}$ t.c. $\exists \infty \; n \in \mathbb{N}$ (dispari) t.c.

$$a^n + b^n + c^n = 0$$

Idea: consideriamo il + grande fra a, b, c
sia wlog a

$$a^n = -b^n - c^n$$

$$1 = -\left(\frac{b}{a}\right)^n - \left(\frac{c}{a}\right)^n \qquad \left|\frac{b}{a}\right| \underset{*}{\leq} 1 \qquad \left|\frac{c}{a}\right| \underset{*}{\leq} 1$$

Se non si verifica nessun = *

$$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^n < \frac{1}{(1000)^3}, \quad \left(\frac{c}{a}\right)^n < \frac{1}{(1000)^3}$$

$$\Rightarrow \quad LHS > (1000)^2\, RHS \quad \text{assurdo}$$

$$\Rightarrow |a| = |b| \Rightarrow \begin{array}{l} \cancel{a = b} \\ a = -b \end{array}$$

$$m(n+3) = n^4 + 2016$$

$$\mathbb{Z} \ni m = \frac{n^4+2016}{n+3} \overset{*}{\in} \mathbb{Z}$$

Se avessi avuto $\dfrac{n+2016}{n+3} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{2013}{n+3} \in \mathbb{Z}$$

$$* \iff \frac{n^4+2016}{n+3} - n^3 \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{-3n^3+2016}{n+3} \in \mathbb{Z}$$

$$\vdots$$

$$\frac{R}{n+3} \in \mathbb{Z}$$ dove R e' il resto della div fra n^4+2016 e $n+3$

$$\frac{3^4+2016}{n+3}$$

è come chiedersi $0 < \frac{3^4+2016}{n+3} < 1$

IMO 2019 4

Trovare tutti gli $k, n > 0$ t.c.

$$k! = (2^n - 2^0)\cdot(2^n-2^1)\cdot\ldots\cdot(2^n-2^{n-1})$$

Contiamo i fattori 2:

$$v_2(k!) = \frac{k - \#\text{cifre 1 binarie}}{2-1}$$

$$v_2(RHS) = \sum_{i=0}^{n-1} v_2(2^n - 2^i) = \sum_{i=0}^{n-1} i = \binom{n}{2}$$

$$k > k - n_{\text{brutto}} = \binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$$

Dall'altra (disuguaglianze)

$$RHS < (2^n)^n = 2^{n^2}$$

$$LHS > \left(\frac{n^2-n}{2}\right)!$$

Quanto cresce il fattoriale?

$$\ln(n!) = \sum_{i=2}^{n} \ln(i) \geq n(\ln(n) - c)$$

$$\left(\text{Stirling} \quad n! \approx \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \right)$$

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$LHS > \left(\frac{n^2-n}{2e}\right)^{\frac{n^2-n}{2}} \overset{?}{>} 2^{n^2} > RHS$$

$$\left(\sqrt{\frac{n^2-n}{2e}}\right)^{n^2-n} > 2^{n^2}$$

è vera per n abbastanza grande.

$$\left(\begin{aligned} & n^2-n > 8e \\ & n^2-n > 24 \\ & n \geq 6 \text{ funziona} \end{aligned} \right)$$

BMO17 1

$x^3+y^3=x^2+42xy+y^2$ $\qquad x,y>0$

Idea 1 sembra che LHS > RHS

$$x^3+y^3 \geq (x^2+y^2)\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

$$\geq (x^2+42xy+y^2)\,c \cdot \left(\frac{x+y}{2}\right)$$

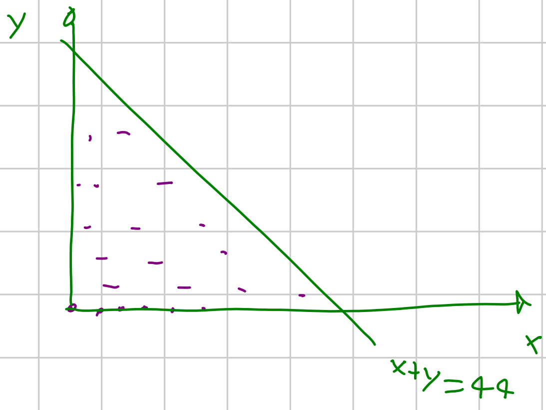
è vera con $c=\frac{2}{44}$

$$=(x^2+\dots)\cdot\frac{x+y}{44}$$

Siamo arrivati a

$$x^2+42xy+y^2=x^3+y^3\geq(x^2+42xy+y^2)\,\frac{x+y}{44}$$

quindi, non appena $x+y>44$ non ho soluzioni



Altra strada

suggerita dal fatto che l'espr. è simmetrica

Th: ogni polinomio in x, y simmetrico si può esprimere come " in $x+y$ xy

$$x^3+y^3 = (x+y)(x^2-xy+y^2)$$
$$= s\,(s^2-3p)$$

$$x^2+42xy+y^2 = s^2+40p$$

$$s^2+40p = s^3-3sp$$

$$\mathbb{Z} \ni p = \frac{s^3-s^2}{40+3s} \in \mathbb{Z}$$

Diofantee semplici da portarsi da casa

1 $ax+by=c$ (a, b, c parametri)

Congr.: $(a,b) \mid c$ altrimenti no soluzioni

ora $(a,b,c)=1$

mi basta risolvere $ax+by=0$ (1)

e $ax+by=1$

(1) se ho 2 soluzioni $ax_0 + by_0 = c$

$ax_1 + by_1 = c$

$a\underbrace{(x_0 - x_1)}_{\tilde{x}} + b\underbrace{(y_0 - y_1)}_{\tilde{y}} = 0$

$\Rightarrow$ $(\tilde{x}, \tilde{y})$ è soluzione di (1)

C: si riconduce a (2) ovvero ad esibire soluzioni per il th di Bezout.

2 Ci sono tante possibilità di grado 2

$n^2 + n = m^2$

$n^2 - 6n = m^2 + m - 12$

$a, b > 0$ t.c. $\dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1} \in \mathbb{Z}_{>0}$ IMO 03 2

$q = \dfrac{a^2}{2ab^2 - b^3 + 1}$

$a^2 - 2aqb^2 + b^3q - q = 0$

$x^2 - 2qb^2x + b^3q - q = 0$

$x = a$ è sol $\in \mathbb{Z}$ e anche l'altra è intera perché

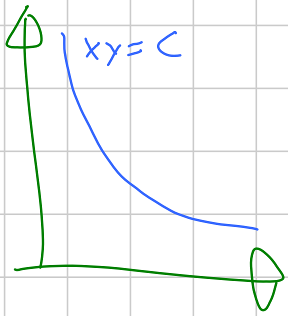
$x_0 + x_1 = 2qb^2 \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow$ $\frac{\triangle}{4} = \square$

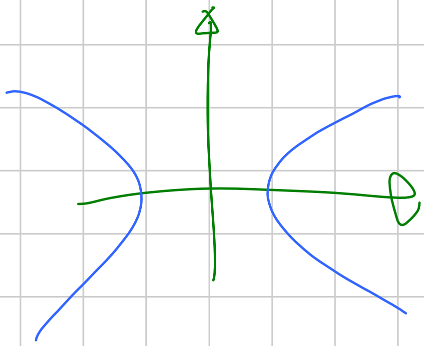
$$xy = c \quad \rightsquigarrow \quad x = \frac{c}{y}$$

$$xy - 2y + 3x = 1000$$

$$(x-2)(y+3) = c'$$



$$x^2 - y^2 = c$$



Esercizi

1] $n, m \in \mathbb{Z}$ $\quad n^2 - 6n = m^2 + m - 12$

2] $a, b, c, p, q, r \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\quad a^p + b^q + c^r = a^q + b^r + c^p = a^r + b^p + c^q \Rightarrow \begin{cases} a = b = c \\ p = q = r \end{cases}$

3] $x, y, z, w \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\quad 2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

4] p primo, quando $x^2 + px - 444p = 0$ ha radici intere?

5] $x, y, z \in \mathbb{Q}$ $\quad x^2 + y^2 + z^2 = 7$

6] $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ $\quad a^3 + 2b^3 = 2014(c^3 + 2d^3)$

7] Per quanti n $\quad n^2 + 85n + 2017$ è $\square$?

8] $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\quad 9^a - 7^a = 2^b$

9] $m, n \in \mathbb{Z}$ $\quad mn + 2m - n - 8 = 0$

10] p primo $a \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\quad 5p + 49 = a^2$

11] $x, y \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ $\quad 3^x - y^2 = 41$

12] trovare $f: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ t.c. $\quad n + f(m) \mid f(n) + nf(m) \quad \forall n, m \in \mathbb{N}$

Correzione

ITAMO 2017 2

$\forall n \ \exists$ solo finiti $a, b, c \in \mathbb{Z}$ t.c.

$$\begin{cases} a + b - c = n \\ a^2 + b^2 - c^2 = n \end{cases}$$

Sol: l'unico passaggio sbagliato è

$$a + b - c = a^2 + b^2 - c^2$$

•] $a = n - b + c$

$$n^2 + b^2 + \cancel{c^2} - 2nb + 2nc - 2bc + b^2 - \cancel{c^2} = n$$

$$2b^2 + b(-2n - 2c) + n^2 - n + 2nc = 0$$

è quadratica in b, se voglio $\exists\, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$\Delta = \square$

•] $c = -(n - a - b)$

$$\cancel{a^2 + b^2} - n^2 - \cancel{a^2 - b^2} - 2ab + 2an + 2bn = n$$

si scrive $(a-n)(b-n) = f(n)$

•] $b - c = n - a$

$b^2 - c^2 = n - a^2$

$b - c \mid b^2 - c^2 \Rightarrow n - a \mid n - a^2$

$$\frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{n - a^2}{n - a} \in \mathbb{Z}$$

1, 9, 7 Sono di tipo "iperbole"

7] Per quanti n $n^2 + 85n + 2017 = a^2$?

voglio ricondurre a $f(n)^2 - g(a)^2 = \text{Cost.}$

vorrei tanto scrivere $f(n) = n + \frac{85}{2}$

$\rightsquigarrow$ $4n^2 + 4 \cdot 85n + C = 4a^2$

(

$$(2n+85)^2 + c' = (2a)^2$$

2

$c,p,q,r \in \mathbb{Z}_{>0}$ $\quad a^p+b^q+c^r = a^q+b^r+c^p = a^r+b^p+c^q \Rightarrow \begin{cases} a=b=c \\ p=q=r \end{cases}$

Le tecniche congr. non hanno potenziale

Voglio disug.

Posso scegliere $a \geq b \geq c$

vorrei ordinare p, q, r, ma posso solo sceglierne 1

wlog $\quad p \geq q \quad p \geq r$

$\begin{cases} q \geq r \\ r > q \end{cases}$

$$a^p + b^q + c^r = a^q + b^r + c^p$$

$$a^q(a^{p-q}-1) + b^r(b^{q-r}-1) = c^r(c^{p-r}-1)$$

$$\text{V/}$$

$$a^{q-r}c^r(a^{p-q}-1) + c^r(b^{q-r}-1)$$

$$a^{q-r}(a^{p-q}-1) + (b^{q-r}-1) \leq c^{p-r}-1$$

$$c^{p-r} - c^{q-r} + b^{q-r} \leq a^{p-r} - a^{q-r} + b^{q-r} \leq c^{p-r}$$

$b^{q-r} \leq c^{q-r} \implies b \leq c \implies b = c$

③ TF 2017

$x, y, z, w \geq 0$ t.c. $2^x + 3^y + 5^z = 7^w$

Qui proviamo i moduli!

modulo 2, 3, 5 o 7 scompare 1 termine oppure l'esponente corr. è 0

mod 2, $\implies x = 0$
mod 3, $\implies y = 0$

$2 + 5^z = 7^w$

c'è $2 + 5^1 = 7^1$

Parentesi sui moduli

$n^2 - 6n = m^2 + m - 12$
$n = 0, m = 3$ è sol.

$2 + 5^z = 7^w$
$z = w = 1$ è sol

ora modulo M succede che entrambe le eq. ereditano una sol.
$\implies$ al più ottengo delle limitazioni del tipo
$n \not\equiv$ qualcosa (M)

$m \not\equiv$ 〃 altro

in particolare non potrò mai escludere $\boxed{\text{tutti}}$ i casi

6 $z \not\equiv$ qualcosa ($\mathrm{ord}(5)$)

$w \not\equiv$ 〃 altro ($\mathrm{ord}_M^M(7)$)

Questo succede purché $M \neq 5^a, 7^b$

$$2 + 5^z = 7^w$$

ora provo potenze di 5 o 7 perché gli altri moduli non concludono
(si chiude proprio mod 25)

5 $x, y, z \in \mathbb{Q}$ $\quad x^2+y^2+z^2 = 7$

$x = \frac{x'}{w'}$ $\quad y = \frac{y'}{w'}$ $\quad \ldots$

$x^2+y^2+z^2 = 7w^2$ $\qquad (x,y,z,w) = 1$

Moduli sensati sono : 7
cose che hanno pochi $\square$

mod 4 abbiamo $\frac{1}{2}$ residui
8 〃 $3/8$ residui

mod 8 $\quad x^2+y^2+z^2+w^2 \equiv 0 \ (8)$

$0, 1, 4$ $\quad$ l'unica possibilità è $2 \mid x, y, z, w$

8 $\quad a, b \in \mathbb{Z}_{>0} \quad 9^a - 7^a = 2^b$

Mod 8 $\quad$ (va bene provare anche 7, 9)

$1-(-1)^a \equiv 1, 2, 4, 0$

b limitato $\quad$ a pari

assurdo

$(9^{a'}-7^{a'})(9^{a'}+7^{a'}) = 2^b$

11 $\quad 3^x - y^2 = 41$

Mod 41

$3^x \equiv y^2 \ (41)$

$3 \equiv a^2$

$3 \not\equiv a^2 \leftarrow$ Hope!

Se fosse $3 \equiv a^2$

$3^{20} = 3^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{p-1} \equiv 1$

$$3^{20} \equiv (3^4)^5 \equiv (81)^5 \equiv (-1)^5 \equiv -1$$

12 $\quad n+f(m) \mid f(n)+nf(m) \qquad f: \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$

Se $g(x) \mid Cost$ e $g(x)$ assume valori arbitrar. grandi $\Rightarrow$ la $Cost = 0$

$$0 < \frac{c}{g(x)} < 1$$

se ho solo $\left|\frac{c}{g(x)}\right| < 1$

se ed è intero $\Rightarrow \quad c = 0$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{f(n)+na}{n+a} \qquad \text{con } a = f(m) \quad \forall n, m$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{Z} \ni \frac{f(n)-n^2}{n+a} \qquad \frac{f(n)-a^2}{n+a} \in \mathbb{Z}$$