ALGEBRA 1

Poly: $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n, 0, 0, \dots)$

$\updownarrow$

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n$$

TERMINE NOTO

$$\deg P = \max\{k \mid a_k \neq 0\}$$

$a_{\deg P}$: LEADING COEF. / COEF. DIRETTIVO

PROB 1: Trova tutti i polys $P(x)$, $Q(x) \in \mathbb{R}[x]$ t.c.

insieme dei polys a coef. reali

$$\underline{P(Q(x)^2)} = \underline{P(x) \cdot Q(x)^2}$$

Sol:

Oss 1: Siano $A(x) = a_n x^n + \dots + a_0$
$B(x) = b_m x^m + \dots + b_0$

Polys, $a_n, b_m \neq 0$

$$\deg A(B(x)) = \deg A \cdot \deg B$$
$$\deg [A(x) \cdot B(x)] = \deg A + \deg B$$

$$\deg[A(x)+B(x)] \leq \max\{\deg A, \deg B\}$$

$\deg P = p$, $\deg Q = q$

$\Rightarrow \deg Q^2 = 2q$

$\deg P(Q(x)^2) = 2pq$

$\deg[P(x)\, Q(x)^2] = p + 2q$

$p + 2q = 2pq$

$\Leftrightarrow \quad \underline{(p-1)}\,\underline{(2q-1)} = 1$

- Soluzioni costanti (ESERCIZIO)
- Sol. non cost. $p = 2$, $q = 1$

- Se P, Q sono soluz $\Rightarrow \lambda P, Q$ sono soluzioni , $\lambda \in \mathbb{R}$

WLOG P monico (coef direttivo 1)

- Sia q_0 il coef. dir. di Q

$$q_e^4 = q_0^2 \implies q_0 = \pm 1$$

- $Q(x) = x - t$ oppure $Q(x) = t - x$

$$\underline{Q(x)^2 = (x-t)^2}$$

$$P(Q^2(x)) = P(x) \cdot Q^2(x)$$

$$x = t \implies \underset{\substack{\parallel \\ \text{termine noto di } P}}{P(0)} = 0$$

$$P(x) = x^2 + a x = x(x+a)$$

$$\cancel{(x-t)^2}\left[(x-t)^2 + a\right] = x(x+a)\cancel{(x-t)^2}$$

PROB 2: $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ in $\mathbb{R}[x]$

$, n \geq 1 \qquad |P(0)| = P(1)$

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ le radice e comprese tra 0 e 1 $(\alpha_i \in [0,1])$

Dimostrare che
$$\alpha_1 \cdots \alpha_m \leq \frac{1}{2^m}$$

Th di Ruffini: $P(x)$ Poly

$(x-\alpha) \mid P(x)$ se e solo se $P(\alpha) = 0$.

In particolare $P(x) = (x-\alpha) \cdot Q(x)$ per qualche polinomio Q

OSS: Supponiamo $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ radici di P

$$P(\alpha_1) = 0 \implies P(x) = (x-\alpha_1) \cdot Q_1(x)$$
$$P(\alpha_2) = 0 \implies Q_1(\alpha_2) = 0$$
$$\implies Q_1(x) = (x-\alpha_2) Q_2(x)$$

$$P(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) Q_2(x) = \dots$$
$$= (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_k) Q_k(x)$$

$$\deg Q_k = \deg P - k$$

Sol.

$$\deg Q_m = 0 \implies Q_m(x) \equiv C$$

$$P(x) = \cancel{C} (x-\alpha_1) \cdots (x-\alpha_m)$$

$$|P(0)| = P(1) \Rightarrow$$

$$|(-\alpha_1)\cdots(-\alpha_m)| = (1-\alpha_1)\cdots(1-\alpha_m)$$

$$\underbrace{\overset{\shortparallel}{\alpha_1\cdots\alpha_m}}$$

Se $\alpha \in [0,1]$ allora

$$\alpha(1-\alpha) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \alpha - \alpha^2 = \frac{1}{4} - \left(\alpha - \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\le \frac{1}{4}$$

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_m)^2 = \alpha_1 \cdots \alpha_m \cdot (1-\alpha_1)(1-\alpha_2)\cdots(1-\alpha_m)$$

$$= [\alpha_1(1-\alpha_1)] \cdots [\alpha_m(1-\alpha_m)] \le$$

$$\le \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdots \frac{1}{4} = \frac{1}{4^m} = \frac{1}{2^{2m}}$$

$$\Rightarrow \alpha_1 \cdots \alpha_m \le \frac{1}{2^m}$$

PROB 3 $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$

insieme dei polys a coef. interi

a, b, c distinti. Dimostrare che non può succedere

$$\begin{cases} P(a) = b \\ P(b) = c \\ P(c) = a \end{cases}$$

Th: Sia $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$, $a, b \in \mathbb{Z}$ $(a \neq b)$

allora $a - b \mid P(a) - P(b)$

Dim: $T(x) = P(x) - P(y)$, $y \in \mathbb{Z}$

y è radice di T

$$P(x) - P(y) = T(x) = (x - y)\, Q(x)$$

Considera $y = b$, $x = a$

$$P(a) - P(b) = (a - b)\, Q(a)$$

Basta dim. che $Q \in \mathbb{Z}[x]$

Questo è vero perché Q è ottenuto dalla divisione di un poly a coef interi per un poly monico $\square$

Sol: Per assurdo sia P t.c.

$$P(a) = b, \quad P(b) = c, \quad P(c) = a$$

$$a - b \mid P(a) - P(b) = b - c$$
$$b - c \mid c - a$$
$$c - a \mid a - b$$

$$a - b \mid b - c \mid c - a \mid a - b$$

Se n, m interi pos. e $n \mid m$ allora $n \le m$

- Caso 1 $a > b > c$

$$a - b \mid b - c \mid a - c \mid a - b$$

$$a - b \underset{=}{\le} b - c \underset{=}{\le} a - c \underset{=}{\le} a - b$$

$$\Rightarrow a = b = c \quad \lightning$$

$\square$

Altri casi analoghi (esercizio)

PROB 4 Fattorizzare in $\mathbb{R}[x]$

$$P(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2$$

Sol: $P(x) = a_k x^k + \dots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$

Oss 1: Se $\frac{n}{m}$ (n, m coprimi in $\mathbb{Z}$) è una radice ($P(\frac{n}{m}) = 0$)

$\Rightarrow n \mid a_0, \; m \mid a_k$

Quindi $n \mid -2, \; m \mid 1$

$\Rightarrow \frac{n}{m} \in \{\pm 1, \pm 2\}$

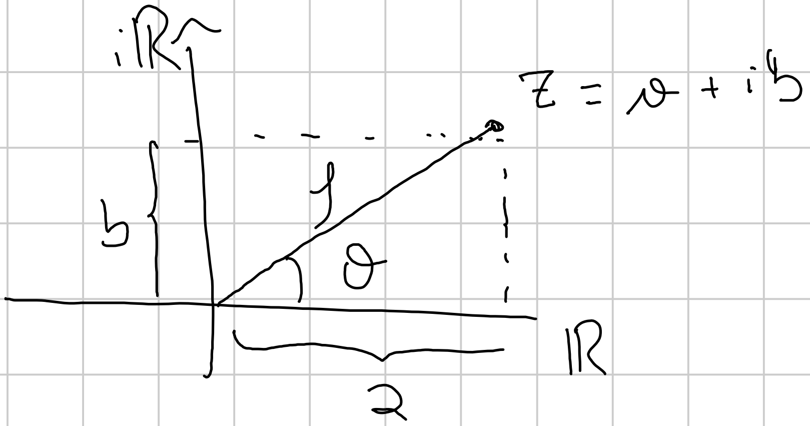
$P(\pm 1) \neq 0, \quad P(-2) \neq 0, \quad P(2) = 6$

$(x-2) \mid P(x)$

$$P(x) = (x-2)\underline{(x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)}$$

Teoria: $\mathbb{C} = \{ a + ib \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

dove $i^2 = -1$



$|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$z = a + ib = \rho(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$$

$$\underline{\underline{= \rho e^{i\theta}}} \qquad \text{dove } e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

$$z = \rho \cdot e^{i\theta}, \quad \underline{w = r \cdot e^{i\alpha}}$$

$$z \cdot w = (\rho \cdot r) \cdot e^{i \cdot (\theta + \alpha)}.$$

RADICE m-esima di z:

$$w \text{ t.c. } \quad w^m = z$$

$$r^m e^{i m \alpha} = w^m = z = \rho e^{i\theta}$$

$$\Rightarrow r^m = \rho \qquad \Rightarrow r = \sqrt[m]{\rho}$$

$$m\alpha = \theta + k\,360^\circ \qquad \Rightarrow \alpha = \frac{\theta + k\,360^\circ}{m}$$

$$k = 0, \ldots, m-1$$

$$Q(x) = x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1$$

OSS 1 : $\underline{x^m - 1} = (x-1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \dots + 1)$

OSS 2 : Se $\alpha^m - 1 = 0$, e $\alpha \neq 1$

allora $\underline{\alpha^{m-1} + \alpha^{m-2} + \dots + 1 = 0}$,

$\alpha^m = 1 \Rightarrow \alpha^{m+1} = \alpha \cdot \alpha^m = \alpha \cdot 1 = \alpha$

Prendiamo $m = 5$, α radice $x^5 - 1$

e $\alpha \neq 1$

$$\underbrace{\alpha^6}_{\alpha^5 \cdot \alpha = \alpha} + \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + 1 = \alpha^4 + \alpha^3 + \alpha^2 + \alpha + 1 = 0$$

$$(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) \mid (x^6 + x^4 + x^3 + x^2 + 1)$$

$$P(x) = x^7 - 2x^6 + x^5 - x^4 - x^3 - 2x^2 + x - 2 =$$

$$= (x-2)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

Per il t. f. d. a. $\exists\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ radici

di P ($\deg P = m$)

$$P(x) = c \cdot (x - \alpha_1) \cdot \dots (x - \alpha_m)$$

Se $P(\alpha) = 0 \Rightarrow P(\bar{\alpha}) = 0$

$$P(x) = c \cdot \underline{(x - \alpha_1)(x - \bar{\alpha}_1)}(x - \alpha_2)(x - \bar{\alpha}_2) \dots$$

$$\dots (x - \alpha_k)(x - \bar{\alpha}_k)(x - \alpha_{k+1}) \dots (x - \alpha_j)$$

dove $\alpha_{k+1}, \dots, \alpha_j \in \mathbb{R}$

$$(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}) = x^2 - (\alpha + \bar{\alpha})x + \alpha \cdot \bar{\alpha}$$

$$= x^2 - 2\mathrm{Re}\,\alpha \cdot x + |\alpha|^2$$

$$\in \mathbb{R}[x]$$

ESERCIZIO: Scomporre $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

PROB 5 Esistono 2 polys $\overline{P(x), Q(x)}$ Quadratici $\in \mathbb{R}[x]$ tali che $P(Q(x))$ ha esattamente gli zeri semplici $2, 3, 5$ e 7 ?

FORMULE DI VIETE:

$P(x) = x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0$

Siano $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ le radice

$$x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \dots + a_0 = P(x) =$$

$$= (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_m) =$$

$$= x^m - (\alpha_1 + \dots + \alpha_m)x^{m-1} +$$

$$+ (\alpha_1\alpha_2 + \dots + \alpha_i\alpha_j + \dots)x^{m-2} \quad i<j$$

$$+ \dots +$$

$$(-1)^m \alpha_1 \cdots \alpha_m$$

$$-a_{m-1} = \alpha_m + \alpha_{m-1} + \dots + \alpha_1$$

$$a_{m-2} = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3 + \dots + \alpha_i \alpha_j + \dots$$

$$\vdots$$

$$a_0 = (-1)^m \alpha_1 \cdots \alpha_m$$

Soluzione

- $P(Q(x))$ è di quarto grado

$\deg P \cdot \deg Q = 4$

$\deg P$ sia 2, siano a e b le radici. $P(a) = P(b) = 0$.

$P(Q(x))$ si annulla $\Leftrightarrow Q(x) = a$ o $Q(x) = b$

Considera $Q_1(x) = Q(x) - a$
$Q_2(x) = Q(x) - b$

Quindi il coef di grado 1 in Q_1 e Q_2 è lo stesso

Se α_1, α_2 radici di Q_1,
β_1, β_2 radici di Q_2

allora $\alpha_1 + \alpha_2 = \beta_1 + \beta_2$ $(*)$

Inoltre $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ sono le radici di P

$\Rightarrow \{\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\} = \{2, 3, 5, 7\}$

impossibile per $(*)$

esempio
$P(x) = (x-3)(x-4)(x-6)(x-8)$
$Q(x) = (x+1)$

$\Rightarrow P(Q(x)) = (x-2)(x-3)(x-5)(x-7)$

ESERCIZI

1. Scomporre in $\mathbb{R}[x]$ i polys

$$x^3 - 2x^2 + 3x - 2$$

$$x^6 - a^2 \qquad (a \in \mathbb{R})$$

$$x^6 + 3x^3 - 2$$

2. Sia $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ t.c. $p(2) = a$, $p(a) = a+2$ $(a \in \mathbb{Z})$. Determinare i possibili valori di a

3. Calcola le radici terze di $i+1$

4. Dimostra l'identità

$$1 = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}$$

5. Siano a, b, c, d, e, f interi positivi

$S = a + b + c + d + e + f$

Supponi che $S \mid abc + def$

$S \mid ab + bc + ca - de - ef - df$

Dimostra che S è composto

6. Sia $p(x) \in \mathbb{Z}[x]$ t.c.

$p(16) = 36$, $p(14) = 16$, $p(5) = 25$

Trova i possibili valori di $p(10)$

7. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}$ le radici 100-esime dell'unità

Calcola $\sum_{1 \le i \le j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5$

8. Trova tutti i polys $P(x), Q(x)$ a coef. reali t.c.

$$P(x)\,Q(x) - P(x) = P(Q(x))$$

ES 5 : a, b, c, d, e, f int. pos.

$S = a + b + \dots + f$: $S \mid abc + def$
$S \mid ab + bc + ac - ed - ef - df$

$P(x) = (x+a)(x+b)(x+c)$
$Q(x) = (x-e)(x-f)(x-d)$

$R(x) = P(x) - Q(x) =$

$= x^3 + (a+b+c)x^2 + (ab+bc+ac)x + abc - x^3 + (d+e+f)x^2 - (de+ef+df)x + def$

$$= S x^2 + x(ab + bc + ac - de - ef - df)$$
$$+ abc + def$$

$$S \mid R(x) \quad \forall x \in \mathbb{Z}$$

$$R(x) = (x+a)(x+b)(x+c) - (x-e)(x-f)(x-d)$$

$$S \mid R(e) = (e+a)(e+b)(e+c)$$

$$S = a+b+c+d+e+f > e+a$$
$$S > e+b$$
$$S > e+c$$

S è composto

PROB 4 :

$$1 = \underbrace{\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} + \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)} + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}}_{P(x)}$$

- $P(a) = 0 + 1 + 0 = 1$
- $P(b) = P(c) = 1$

(*)

$Q(x) = P(x) - 1$. Per assurdo $Q(x) \neq 0$

$\Rightarrow \deg Q \leq 2$

$\overset{(*)}{\Rightarrow}$ a, b, c sono radici distinte di Q

assurdo

PROB 6

$p(16) = 36 = 6^2$
$p(14) = 16 = 4^2$
$p(5) = 25 = 5^2$

$Q(x) = (x-16)^2$

$Q(16) = 36$
$Q(14) = 16$
$Q(5) = 25$

$R(x) = p(x) - Q(x)$ allora $R(x)$ ha 3 radici $(16, 14, 5)$

$R(x) = (x-16)(x-14)(x-5)\,T(x)$

$R(10) = 120\,T(10) \Rightarrow 120 \mid R(10)$

$Q(10) = 0$

$p(10) = R(10) + Q(10)$

$\Rightarrow \quad 120 \mid p(10)$

ESEMPIO :

$$P(x) = (x-16)^2 + (x-16)(x-14)(x-5)\,T(x)$$

con $T(x)$ poly qualunque

$$P(10) = 120 \cdot T(10)$$

7. Siano $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{100}$ le radici 100-esime dell'unità

Calcola $\displaystyle\sum_{1 \le i \le j \le 100} (\alpha_i \alpha_j)^5$

Se α è radice 100-esima dell'unità, allora α^5 è radice 20-esima dell'unità

In $\{\alpha_1^5, \dots, \alpha_{100}^5\}$ ogni radice

20-esima dell'unità comparirà esattamente

5 volte

$$\begin{cases} 5\vartheta = \frac{\pi}{10} + 2k\pi \\ \vartheta = \frac{\pi}{50} + \frac{2}{5}k\pi \qquad k = 0,1,2,3,4 \end{cases}$$

$$(x-\alpha_1^5)\cdots(x-\alpha_{100}^5) = (x^{20}-1)^5$$

Guarda il coef di x^{98}

$$\sum_{1\le i<j\le 100} (\alpha_i\alpha_j)^5 = 0$$

$$\sum_{1\le i\le j\le 100} (\alpha_i\alpha_j)^5 = \sum_{1\le i<j\le 100} (\alpha_i\alpha_j)^5 + \sum_{i=1}^{100} \left((\alpha_i)^2\right)^5$$

$$= \sum_{i=1}^{100} \alpha_i^{10} = 10 \sum_{i=1}^{10} \beta_i$$

β_i sono le radici 10me dell'unità